



UNIDAD ACADÉMICA:

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADOS

TEMA:

DESARROLLO DE GRÁFICAS ANIMADAS Y ANIMACIONES INTERACTIVAS PARA
EL ESTUDIO DE FUNCIONES MATEMÁTICAS ELEMENTALES

**Proyecto de Investigación y Desarrollo de grado, previo a la obtención
del título de**

Magíster en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docentes

Línea de Investigación, Innovación y Desarrollo Principal:

Sistemas de Información y Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación,
y sus Aplicaciones

Caracterización técnica del trabajo:

Desarrollo

Autor:

Miguel Ángel González Antolín

Directora:

Elsa Pilar Urrutia Urrutia, Mg.

Ambato - Ecuador

Febrero 2017

Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales

Informe de Trabajo de Titulación

presentado ante la

Pontificia Universidad Católica del Ecuador

Sede Ambato

por

Miguel Ángel González Antolín

En cumplimiento parcial
de los requisitos para el Grado de
Magíster en Tecnologías para la
Gestión y Práctica Docentes.



Departamento de Investigación y Postgrados

Febrero 2017

Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales

Aprobado por:

Varna Hernández Junco, PhD.
Presidenta del Comité Calificador
Directora del DIP

Darío Javier Robayo Jácome, Mg.
Miembro Calificador

Elsa Pilar Urrutia Urrutia, Mg.
Miembro Calificador
Directora del Proyecto

Miguel Augusto Torres Almeida, Mg.
Miembro Calificador

Hugo Rogelio Altamirano Villarroel, Dr.
Secretario General

Fecha de aprobación: Febrero 2017

Ficha Técnica

Programa: Magíster en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docentes.

Tema: Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales.

Tipo de trabajo: Proyecto de Investigación y Desarrollo

Clasificación técnica del trabajo: Desarrollo

Autor: Miguel Ángel González Antolín

Directora: Elsa Pilar Urrutia Urrutia, Mg.

Líneas de Investigación: Innovación y Desarrollo

Principal: Sistemas de Información o Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación y sus Aplicaciones.

Resumen Ejecutivo

Una destreza fundamental en el estudio de las funciones elementales que se exige en bachillerato, es la de ser capaz de graficarlas. El pénsum de estudios de bachillerato incluye una introducción al cálculo: teoría de límites, derivada de una función en un punto, función derivada, el concepto de continuidad, aplicaciones de las derivadas sucesivas en el estudio de las variaciones de una función, máximos y mínimos, y aplicaciones de la derivada en la optimización de funciones, con especial atención a las ciencias físicas y a la economía.

En el libro electrónico, que es el producto final de este trabajo de desarrollo que aquí se describe, se pretende, mediante el uso adecuado de las TIC, mejorar el grado de comprensión que el estudiante de bachillerato adquiere del concepto de función, su capacidad de análisis de las funciones elementales algebraicas y trascendentes, y la elaboración e interpretación de las gráficas de las mismas, gracias, precisamente, al dinamismo de las imágenes que resultan y su interacción con ellas.

El estudiante suele encontrarse con la exigencia de tener que entender y describir fenómenos cambiantes mediante modelos matemáticos -las funciones reales de variable real, correspondientes a su nivel bachillerato- que se representan con gráficas estáticas. Este trabajo se propone, mediante el uso adecuado de las Tecnologías de la Información, dar movimiento a las gráficas que representan funciones, mejorar el grado de comprensión que el estudiante de bachillerato adquiere de las mismas y su capacidad para analizarlas e interpretarlas. Las TIC pueden ayudarnos didácticamente a mejorar nuestra representación de la realidad y nuestra comprensión de los cambios que estudiamos.

Declaración de Originalidad y Responsabilidad

Yo, Miguel Ángel González Antolín, con la cédula de identidad nº1600291692, declaro que los resultados obtenidos en el proyecto de titulación y presentados en el informe final, previo a la obtención del título de Magíster en Tecnologías para la Gestión y Práctica Docentes, son absolutamente originales y personales. En tal virtud, declaro que el contenido, las conclusiones y los efectos legales y académicos que se desprendan del trabajo propuesto, y luego de la redacción de este documento, son y serán de mi sola y exclusiva responsabilidad legal y académica.

Miguel Ángel González Antolín
Cédula nº1600291692

Reconocimientos

En este espacio quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi directora, Ing. Mg. Elsa Pilar Urrutia Urrutia, quien con su experiencia me orientó acertadamente en el adecuado desarrollo del presente trabajo. Gracias por su ayuda. Agradezco a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Sede Ambato, a sus autoridades y a sus docentes. Agradezco a todas aquellas personas que me han apoyado con su experiencia y con su ánimo; especialmente a los docentes de matemáticas de la Unidad Educativa Verbo Divino de Guaranda, de la Unidad Educativa San Vicente Ferrer de Puyo y de la Unidad Educativa Sagrada Familia de Ambato, por sus observaciones y comentarios.

Resumen

El presente trabajo de investigación y desarrollo, titulado Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales, tiene como objetivo demostrar que el uso adecuado de las Tecnologías de la Información y la Comunicación mejora, de forma significativa, la didáctica y el aprendizaje de varios conceptos fundamentales que corresponden al programa de bachillerato en la asignatura de matemática: el límite de una función en un punto, las gráficas de las funciones algebraicas y trascendentes, el cálculo y el significado de sus asíntotas y el concepto de derivada. El logro de dicho objetivo se consigue mediante la elaboración, como producto final, de un libro electrónico, con el mismo título, en el que se explican los conceptos mencionados con gráficas animadas, y se ponen a disposición del lector, docente o estudiante, numerosos enlaces para interactuar con ellas. El método seguido en este trabajo –Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación, con ligeras variantes- permite afirmar, en primer lugar, que el uso que comúnmente se hace de las TIC en la didáctica de la matemática es muy limitado. Se diseña a continuación una secuencia lógica de los contenidos que se exponen. Seguidamente se desarrollan, según esa secuencia, las animaciones correspondientes, en 28 videos –que en conjunto tienen una duración superior a las siete horas, todos ellos elaborados por el autor de este trabajo- y otras tantas interacciones animadas. Finalmente, se implementa el uso del libro electrónico elaborado, mediante la colaboración de 19 docentes expertos consultados, quienes hacen una valoración del mismo y predicen los resultados de su aplicación en las clases de matemática y en la preparación de las mismas: el uso frecuente del producto final de este trabajo de investigación y desarrollo resultará bastante útil o muy útil, 73,68% y 26,31%, respectivamente, como herramienta didáctica y para el aprendizaje.

Palabras clave: asíntota, derivada, función, límite.

Abstract

This research and development work entitled “Development of Animated Graphics and Interactive Animations for an Elementary Mathematical Functions Study” aims to demonstrate that the adequate use of Information and Communication Technologies improves significantly the teaching and learning process of several fundamental concepts such as : the idea of a limit of a function, the graphical representation of an algebraic or transcendental function, the calculation and the meaning of its asymptotes and the concept of a derivative; which correspond to the subject of mathematics’ curriculum of the Baccalaureate program. The achievement of this objective is measured by the creation of an e-book as a final product, in which the aforementioned concepts are explained with animated graphics and are available to the reader, teacher or student with several interactive links. The Analysis, Design, Development, Implementation and Evaluation methodology was used with slightly variants that primarily affirm in the first place that the use of ICT’s in math’s teaching and its explanation about the concepts that are under study are limited. After that, a logical sequence of the aforementioned contents is explained to then, develop the animations according to the defined sequence in 28 videos, which together have a duration of more than seven hours and have been developed by the author among other animated interactions. Finally, the developed e-book was applied with the support of 19 experts that were consulted, who have evaluated and predict the outcomes of its application in math’s class and preparation. If the final product of this research and development project is frequently used, it will be very useful or useful, 73,68% y 26,31%, respectively, as a didactic and learning tool.

Key words: asymptote, derivative, function, limit.

Tabla de Contenidos

Ficha Técnica	iii
Resumen Ejecutivo.....	iii
Declaración de Originalidad y Responsabilidad.....	iv
Reconocimientos.....	v
Resumen.....	vi
Abstract.....	vii
Lista de Tablas.....	xi
Lista de Figuras.....	xii

CAPÍTULOS

1	Introducción	1
1.1	Presentación del trabajo.	2
1.1.1	Descripción del documento	3
2	Planteamiento de la propuesta de trabajo	4
2.1	Información técnica básica.	4
2.2	Descripción del problema	4
2.3	Preguntas básicas	5
2.3.1	¿Cómo aparece el problema que se pretende solucionar?	5
2.3.2	¿Por qué se origina?	5
2.4	Formulación de la meta	6
2.5	Objetivos	6
2.5.1	Objetivo general	6
2.5.2	Objetivos específicos	6
2.6	Delimitación funcional	6
2.6.1	Pregunta 1	6
2.6.2	Pregunta 2	7
3	Marco Teórico	8
3.1	Metodología que proponen actualmente los libros de texto aprobados por el Ministerio de Educación	8

3.2	La metodología necesaria	9
3.3	El concepto de función	9
3.4	Producto cartesiano de conjuntos	9
3.5	Relaciones	11
3.6	Función real de variable real	11
3.6.1	Una primera definición	12
3.6.2	Definición formal de función	12
3.6.3	Una definición menos formal de función	14
3.7	Clasificación de las funciones	16
3.7.1	Funciones algebraicas	16
3.7.1.1	Funciones explícitas	16
3.7.1.2	Funciones implícitas	17
3.7.1.3	Funciones polinómicas	17
3.7.1.4	Función constante	17
3.7.1.5	Funciones lineal, afín e identidad	17
3.7.1.6	Función cuadrática o de segundo grado	18
3.7.1.7	Funciones polinómicas a trozos	18
3.7.1.8	Funciones valor absoluto, parte entera y función signo	18
3.7.2	Funciones trascendentes	18
3.7.2.1	Función exponencial	19
3.7.2.2	Función logarítmica	19
3.7.2.3	Funciones trigonométricas	19
3.8	El concepto de límite de una función en un punto	20
3.9	Definición intuitiva de límite	21
3.10	Definición formal de límite	22
3.11	Estado del arte	24
4	Metodología	25
4.1	Análisis	25
4.2	Resultados antes de la evaluación del libro electrónico	27
4.2.1	Resumen de los resultados	28
4.3	Desarrollo y diseño	30
4.4	Desarrollo	30
4.4.1	Diseño y secuenciación de los contenidos	32
4.5	Gráficas animadas de funciones algebraicas	32
4.5.1	Funciones polinómicas	32
4.5.1.1	Función polinómica de primer grado	33
4.5.1.2	La función cuadrática y la parábola	35
4.5.2	Funciones polinómicas de grado superior	39
4.5.2.1	Diferentes animaciones de la función polinómica de tercer grado	39
4.5.2.2	Función polinómica de cuarto grado	41
4.5.2.3	Función polinómica de quinto grado	43

4.5.3	Funciones racionales	45
4.5.3.1	Funciones racionales con asíntotas verticales	47
4.5.3.2	Funciones racionales con asíntotas oblicuas	51
4.5.4	Funciones radicales	59
4.6	Funciones trascendentes	64
4.6.1	Función exponencial	64
4.6.2	Función logarítmica	66
4.6.3	Funciones trigonométricas	67
4.6.3.1	Función seno	69
4.6.3.2	Función coseno	70
4.6.3.3	Función tangente	72
4.6.3.4	Las funciones secante y cosecante	73
4.6.3.5	Función cotangente	75
4.7	Derivada de una función	76
4.7.1	Razón de cambio y pendientes de rectas secantes	77
4.7.2	Derivada de una función en un punto	78
4.7.3	Interpretación geométrica de la derivada	81
4.8	Implementación	83
5	Evaluación y resultados	84
5.1	Evaluación después de la revisión del libro electrónico	84
5.2	Resultados que predicen los docentes después de usar el libro electrónico .	85
5.2.1	Resumen de los resultados que predicen los docentes después de evaluar el libro electrónico	86
6	Conclusiones	89
6.1	Conclusiones	89
	Apéndice A	91
	Apéndice B	92
	Referencias	93

Lista de Tablas

1. Resultados de la encuesta antes de la evaluación del libro electrónico	28
2. Resumen de los resultados antes de la lectura del libro	29
3. Resultados de la encuesta después de la utilización del libro electrónico . . .	85
4. Resumen de los resultados después de evaluar el libro electrónico	86
5. Encuesta aplicada antes de la utilización del libro electrónico	91
6. Encuesta aplicada después de la utilización del libro electrónico.	92

Lista de Figuras

1.	Producto cartesiano $X \times Y$	10
2.	Dominio y rango de una función	14
3.	Gráfica y puntos del plano	15
4.	Punto y par ordenado.	15
5.	Definición intuitiva de límite	21
6.	La idea de límite.	23
7.	Logo de LyX	31
8.	Deducción de la ecuación de la recta	33
9.	Variaciones de la función según m y b	34
10.	Recta en la forma $y = mx + b$	34
11.	Función lineal a partir de dos puntos dados.	35
12.	La parábola se escribe analíticamente como una función cuadrática.	36
13.	La parábola como función cuadrática	38
14.	Interactuar con la función cuadrática animada.	38
15.	Función de tercer grado a partir de un polinomio.	39
16.	Función polinómica de tercer grado a partir de cuatro puntos dados.	40
17.	Función polinómica de tercer grado.	40
18.	Función de tercer grado a partir de 4 puntos dados.	41
19.	La función de cuarto grado a partir de un polinomio dado	42
20.	Función de cuarto grado a partir de una serie de puntos dados:	42
21.	Función polinómica de cuarto grado a partir de una expresión polinómica.	43
22.	Función polinómica de cuarto grado a partir de cinco puntos dados.	43
23.	Video explicativo de la función polinómica de 3º grado.	44
24.	Interactuar con la función polinómica de 5º grado.	44
25.	Primer ejemplo de función racional	45
26.	Función racional con asíntotas verticales. Es mayor el grado del denominador.	47
27.	Función racional con asíntotas verticales.	48
28.	Función racional con discontinuidad.	50
29.	Función con puntos de discontinuidad	50
30.	Gráfica de la función 4.5.22, con asíntota oblicua	51
31.	Función con asíntotas oblicuas.	52
32.	Función racional con asíntotas verticales y oblicuas.	53
33.	Función racional con asíntotas vertical y oblicua, sin hueco.	54

34.	Función racional con asíntotas vertical y oblicua ,sin"hueco".	55
35.	Función racional con asíntotas vertical,oblicua y punto de discontinuidad.	57
36.	Función racional sin asíntotas verticales ni horizontales.	58
37.	Solución de la inecuación	60
38.	Función irracional con asíntotas verticales y oblicuas	63
39.	Función irracional con asíntotas verticales y oblicuas	63
40.	Función exponencial	65
41.	Tipos de función exponencial	65
42.	Diferentes formas de la función logarítmica	66
43.	Gráfica de la función logarítmica	67
44.	Razones trigonométricas de un ángulo.	68
45.	Gráfica de la función seno	69
46.	Gráfica de la razón y función seno.	70
47.	Gráfica de la función coseno.	71
48.	Gráfica de la función tangente.	72
49.	Gráfica de la función secante.	73
50.	Gráfica de la función cosecante	74
51.	Gráfica de la función cotangente	75
52.	Recta tangente a una curva.	76
53.	Razón de cambio	77
54.	Razón de cambio y secante a una curva	78
55.	La derivada en un punto es la pendiente de la tangente en ese punto	79
56.	Función derivada y recta tangente.	81
57.	Secantes a una curva	82
58.	Interpretación geométrica de la derivada.	83

Capítulo 1

Introducción

Una destreza fundamental en el estudio de las funciones elementales que se exige en bachillerato es la de ser capaz de graficarlas. El p nsum de estudios de bachillerato incluye una introducción al cálculo: teoría de límites, derivada de una función en un punto, función derivada, el concepto de continuidad, aplicaciones de las derivadas sucesivas en el estudio de la variaciones de una función, máximos y mínimos, y aplicaciones de la derivada en la optimización de funciones, con especial atención a las ciencias físicas y a la economía.

Dicho p nsum incluye también el estudio de las gráficas correspondientes. Pero el resultado de dicho estudio suele ser un “dibujo o gráfico” est ticos sobre un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. La riqueza conceptual de las funciones queda así reducida a una imagen, a un dibujo o a un gráfico sin movimiento que pretende explicar una realidad que cambia. Aparece, pues, un problema didáctico: se quiere explicar el cambio con un símbolo gráfico que no cambia; el movimiento, con algo inmóvil.

Es posible, sin embargo, gracias al uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación, estudiar las funciones elementales de una manera diferente: se pueden construir gráficas animadas e interactivas de las mismas. En el libro electrónico se pretende, mediante el uso adecuado de las TIC, mejorar el grado de compresión que el estudiante de bachillerato adquiere del concepto de función, su capacidad de análisis de las funciones elementales algebraicas y trascendentes, y la elaboración e interpretación de las gráficas de las mismas, gracias, precisamente, al dinamismo de las imágenes que resultan y su interacción con ellas.

Uno de los elementos fundamentales del currículo de matemáticas para el tercer año de Bachillerato General Unificado, según los estándares actuales del Ministerio de Educación, es el estudio y análisis de funciones elementales. Este estudio exige una larga introducción a los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: el límite de una función en un punto y el concepto de derivada en un punto y función derivada. Dichos conceptos se suelen explicar mediante gráficas est ticas, especialmente el de asíntota o cuando se explica la tan conocida y socorrida interpretación geométrica de la derivada.

Sin embargo, la inmovilidad de las gráficas que se estudian o la quietud de las rectas asintóticas o las rectas tangentes a la curva, que describen las variaciones de una función, no facilitan la compresión de los fenómenos físicos o de otra naturaleza que la misma función describe, ni los cambios que experimenta. La función, esencialmente, describe fenómenos cambiantes, pero gráficamente no hay nada que, aparentemente, cambie.

El estudiante tiene que entender y describir fenómenos cambiantes mediante modelos matemáticos -las funciones reales de variable real, correspondientes a su nivel de bachillerato- que se representan con gráficos fijos o estáticos. El cambio, de esta manera, se representa con gráficas inmóviles; las variaciones de la función o las fluctuaciones de sus concavidades o convexidades, se representan como si no hubiera tales variaciones. Y el estudiante tiene que recorrer un largo y penoso proceso imaginativo para otorgar movimiento a una figura que no lo tiene.

La consecuencia de todo esto es que la gran mayoría de los bachilleres llegan a la universidad sin haber entendido nunca la idea fundamental del cálculo: las funciones, los límites y las derivadas estudian y describen cómo cambia la realidad, y cómo se puede representar y calcular ese cambio. Este trabajo pretende, mediante el uso adecuado de las Tecnologías de la Información, dar movimiento a las gráficas que representan funciones, mejorar el grado de comprensión que el estudiante de bachillerato adquiere de las mismas y su capacidad para analizarlas, graficarlas e interpretarlas.

Los libros de texto u obras de carácter científico que se utilizan en el aprendizaje de las matemáticas, las funciones, sus gráficas y sus variaciones, por la propia naturaleza de estos medios, no pueden ofrecer lo que buscamos: movimiento, animación e interacción. Probablemente el software que mejor se presta para la realización de gráficos animados, en geometría y cálculo, es Geogebra (contracción de Geometría y Álgebra). De hecho, fue concebido como un software de geometría dinámica. Es un software interactivo y libre; y eso hace de él la herramienta ideal para el trabajo de desarrollo que aquí se presenta: gráficos animados de las funciones elementales. El repositorio asociado a este software se encuentra en <http://www.tube.geogebra.org/>, pero aunque contiene abundante material, incluso de carácter dinámico, está disperso y desestructurado, según los aportes que desinteresadamente ofrecen sus usuarios.

El usuario podría mejorar su aprendizaje, si todos estos aportes estuvieran organizados secuencial y sistemáticamente. Geogebra permite y recomienda, precisamente por ser una institución sin fines de lucro, que todas las personas que construyen proyectos originales utilizando este software libre, pongan el resultado de sus trabajos en un “repositorio” dispuesto en la web para el efecto, y faciliten el uso discrecional de esos trabajos a todos quienes lo deseen, con la sola “obligación”, como es comprensible, de mencionar el nombre del autor del proyecto o trabajo.

1.1 Presentación del trabajo.

Las Nuevas Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) –que no son otra cosa que las TIC aplicadas en los ambientes académicos- proporcionan ahora una herramienta que antes no existía. No se trata de resolver un problema pedagógico ni metodológico, sino de mejorar un aspecto de la didáctica de las matemáticas que corresponden al nivel del bachillerato.

La escasa comprensión de la riqueza conceptual del término matemático de “función”, y las dificultades didácticas que entrañan su explicación y estudio, se detectan en los tres

cursos de bachillerato, especialmente en 3º de Bachillerato General Unificado. La representación y comprensión de fenómenos reales en cambio permanente, sean éstos de naturaleza física, biológica o social, mejorará notablemente si utilizamos gráficas animadas con las que el estudiante pueda interactuar.

Es muy difícil entender una realidad cambiante mediante una gráfica inmóvil. El concepto matemático de “función” hace referencia a realidades en estado de cambio permanente. Las TIC pueden ayudarnos didácticamente a mejorar nuestra representación simbólica de la realidad y nuestra comprensión de los cambios que estudiamos. El contacto permanente de los jóvenes estudiantes -y también de los profesores, aunque en menor escala-, con las Nuevas Tecnologías, exige inevitablemente, en todas las áreas de estudio, aun más si cabe en matemáticas, la utilización de herramientas informáticas que mejoren el aprendizaje, gracias al dinamismo con que pueden ser representados los fenómenos físicos, los químicos o las realidades sociales.

1.1.1 Descripción del documento

El presente documento está organizado en seis capítulos. En el primero de ellos se presenta una breve **introducción**, se explica el sentido y alcance del documento y se detalla una descripción del mismo.

El segundo capítulo describe el planteamiento de la **propuesta de trabajo** con la información técnica básica, se describe el problema, se formulan las preguntas básicas, y se enuncian la meta, los objetivos y la delimitación funcional del producto final.

En el tercer capítulo se aborda el **marco teórico**, es decir, los conceptos básicos que se presentan en el “producto final”. Y seguidamente se presenta una referencia al “**estado del arte**” que tiene que ver con el presente proyecto de investigación y desarrollo. Todo ello fundamenta la propuesta de trabajo.

El capítulo cuarto se dedica a explicar la **metodología** utilizada en el desarrollo de los recursos digitales que se han utilizado: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación.

En el quinto capítulo se presentan las opiniones de profesores expertos en la materia que es objeto del proyecto de desarrollo, con el fin de predecir la validez del libro electrónico elaborado como “producto final” y el **resultado** de su utilización. Resulta imposible establecer una comparación, en un tiempo inferior a un año lectivo, entre los resultados de un grupo de estudiantes que podrían utilizar dicho “producto final” y otro grupo que no lo usara.

Finalmente, en el sexto capítulo se establecen las principales conclusiones obtenidas y las **recomendaciones** que se consideran oportunas como consecuencia.

Capítulo 2

Planteamiento de la propuesta de trabajo

2.1 Información técnica básica.

Tema: Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales.

Tipo de trabajo: Proyecto de Investigación y Desarrollo.

Clasificación técnica del trabajo: Desarrollo

Líneas de Investigación: Innovación y Desarrollo

Principal: Sistemas de Información o Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación y sus Aplicaciones.

2.2 Descripción del problema

Uno de los elementos fundamentales del currículo de matemáticas para el tercer año de Bachillerato General Unificado, según los estándares actuales del Ministerio de Educación, es el estudio y análisis de funciones elementales. Este estudio exige una larga introducción a los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: el límite de una función en un punto y el concepto de derivada en un punto y función derivada. Dichos conceptos se suelen explicar mediante gráficas estáticas, especialmente cuando se ejemplifican conceptos como el de asíntota o cuando se explica la tan conocida y socorrida interpretación geométrica de la derivada.

Sin embargo, la inmovilidad de las gráficas que se estudian o la quietud de las rectas asíntóticas o las rectas tangentes a la curva, que describen las variaciones de una función, no facilitan la comprensión de los fenómenos físicos o de otra naturaleza que la misma función describe, ni los cambios que experimenta. La función, esencialmente, describe fenómenos cambiantes, pero gráficamente no hay nada que, aparentemente, cambie.

El estudiante tiene que entender y describir fenómenos cambiantes mediante modelos matemáticos -las funciones reales de variable real, correspondientes a su nivel de

bachillerato- que se representan con gráficos estáticos. El cambio, de esta manera, se representa con gráficas inmóviles; las variaciones de la función o las fluctuaciones de sus concavidades o convexidades, se representan como si no hubiera tales variaciones. Y el estudiante tiene que recorrer un largo y penoso proceso imaginativo para otorgar movimiento a una figura que no lo tiene. La consecuencia de todo esto es que la gran mayoría de los bachilleres llegan a la Universidad -y a veces salen de ella-, sin haber entendido nunca la idea fundamental del cálculo: las funciones, los límites y las derivadas estudian y describen cómo cambia la realidad, y cómo se puede representar y calcular ese cambio.

Este trabajo pretende, mediante el uso adecuado de las Tecnologías de la Información, dar movimiento a las gráficas que representan las funciones, mejorar el grado de comprensión que el estudiante de bachillerato adquiere de las mismas y su capacidad para analizarlas, graficarlas e interpretarlas.

2.3 Preguntas básicas

2.3.1 ¿Cómo aparece el problema que se pretende solucionar?

Los libros de texto u obras de carácter científico que se utilizan en el aprendizaje de las matemáticas, las funciones, sus gráficas y sus variaciones, por la propia naturaleza de estos medios, no pueden ofrecer lo que buscamos: movimiento, animación e interacción. Las Nuevas Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) – que no son otra cosa que las TIC aplicadas en los ambientes académicos- proporcionan ahora una herramienta que antes no existía. No se trata de resolver un problema pedagógico ni metodológico, sino de mejorar un aspecto de la didáctica de las matemáticas que corresponden al nivel del bachillerato.

La escasa comprensión de la riqueza conceptual del término matemático de “función” y las dificultades didácticas que entrañan su explicación y estudio, se detectan en los tres cursos de bachillerato, especialmente en 3º de Bachillerato General Unificado. La representación de fenómenos reales en cambio permanente, sean éstos de naturaleza física, biológica o social, mejorará notablemente si utilizamos gráficas animadas con las que el estudiante pueda interactuar. Es muy difícil entender una realidad cambiante mediante una gráfica inmóvil. El concepto matemático de “función” hace referencia a realidades en estado de cambio permanente. Las TIC pueden ayudarnos didácticamente a mejorar nuestra representación simbólica de la realidad y nuestra comprensión de los cambios que estudiamos.

2.3.2 ¿Por qué se origina?

El modelamiento matemático de muchos fenómenos que estudian las ciencias positivas o sociales, exige la destreza fundamental de elaborar funciones que los describan y gráficas que los representen. Las representaciones gráficas son casi siempre, en el estado actual de las herramientas didácticas que se usan, esquemas privados de movimiento. Cuando la realidad física que se modela matemáticamente cambia con el tiempo, resulta especialmente conveniente animar las gráficas que se usan.

El contacto permanente de los jóvenes estudiantes -y también de los profesores, aunque en menor escala-, con las Nuevas Tecnologías, exige, inevitablemente, en todas las áreas de estudio, aun más si cabe en matemáticas, la utilización de herramientas informáticas que mejoren el aprendizaje, gracias al dinamismo con que pueden ser representados los fenómenos físicos, químicos o las realidades sociales.

2.4 Formulación de la meta

Obtener gráficas animadas e interactivas de las funciones matemáticas elementales, a partir de convenientes aplicaciones de software.

2.5 Objetivos

2.5.1 Objetivo general

Desarrollar gráficas animadas e interactivas para el estudio de las funciones matemáticas elementales.

2.5.2 Objetivos específicos

1. Describir la didáctica, las estrategias y la metodología que se utilizan en el estudio y desarrollo del currículo de matemáticas que corresponde a 2º y 3º del B.G.U., especialmente en las funciones elementales y sus gráficas.
2. Seleccionar el software necesario para construir gráficas animadas e interactivas, y aplicarlas en la enseñanza de las matemáticas.
3. Elaborar un libro electrónico, con acceso en línea, que contenga y desarrolle las gráficas animadas e interactivas de las funciones matemáticas elementales.
4. Establecer la validez del producto final, el libro electrónico, mediante la participación de docentes especialistas en el área de matemáticas del Bachillerato General Unificado.

2.6 Delimitación funcional

2.6.1 Pregunta 1

¿Qué será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación?

El producto final del trabajo de titulación consiste en un libro electrónico que presenta un estudio clásico del concepto de función y desarrolla las funciones elementales que corresponden al nivel de Bachillerato. Lo que se pretende con este trabajo de desarrollo de estos temas del currículo no es, desde el punto de vista conceptual, nada nuevo. El trabajo se propone presentar los mismos contenidos de siempre, pero dando especial importancia a los gráficos animados e interactivos.

El libro electrónico contendrá numerosos enlaces y referencias didácticas a tres lugares principales:

- <http://www.tube.geogebra.org/> , en donde el estudiante podrá interactuar libremente con gráficos de funciones, en formato HTML, y estudiar en ellos lo que de forma analítica se le presenta en el documento o libro electrónico.
- <http://www.youtube.com/> : habrá un canal exclusivo con videos que expliquen cómo interactuar con lo gráficos animados que se presentan.
- Acceso a un abundante material bibliográfico dispuesto en la “nube”:

<https://drive.google.com/drive/folders/0B52aib1JBjQKWE1ieGHNm1Rd2M?usp=sharing>.

En él encontrarán los estudiantes de bachillerato la ayuda necesaria para el estudio de tan importantes contenidos del currículo de matemáticas que corresponden a su nivel de formación; podrán libremente copiar y multiplicar los contenidos del mismo y reelaborar los gráficos que más interés tengan para ellos.

El aporte original de este trabajo de desarrollo es elemental pero, al mismo tiempo, importante: se presentarán algunos contenidos del p nsum de estudio de bachillerato, pero de una forma dinámica e interactiva. Los objetos matemáticos a estudiar son los mismos: las gráficas de las funciones elementales; la propuesta didáctica, sin embargo, pretende ser novedosa: movimiento e interacción.

2.6.2 Pregunta 2

 Qu  no será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación?

No puede ni debe reemplazar a los necesarios libros de texto que normalmente utilizan los estudiantes y las guías didácticas de los maestros. Solamente quiere ser una ayuda, un complemento en las explicaciones, muchas veces largas y tediosas, que los contenidos de bachillerato exigen de parte del maestro. Tampoco pretende ni debe ser utilizado como un instrumento de evaluación ni de asignación de calificaciones de los estudiantes. La lectura del mismo, sin embargo, y especialmente el seguimiento atento de los videos que se presentan, y la interacción y análisis de las gráficas interactivas a las que el lector puede acceder, seguramente contribuirán a un mayor y mejor entendimiento de los conceptos fundamentales de las matemáticas de bachillerato.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1 Metodología que proponen actualmente los libros de texto aproba por el Ministerio de Educación

Según la propuesta de los actuales libros de texto de matemáticas del Bachillerato General Unificado, desde segundo curso, que es en realidad la propuesta del Ministerio de Educación, se deben estudiar las funciones y sus gráficas sin una sólida base teórica. El docente tiene que explicar cómo se calculan el dominio y el recorrido de una función, los ceros, las ramas y las asíntotas correspondientes, especialmente las verticales y horizontales. Y el estudiante, consecuentemente, tendría que adquirir las destrezas para esos cálculos y las gráficas resultantes.

Sencillamente eso no es posible: no se puede calcular una asíntota o una rama asintótica con una tabla de valores de las variables por muy extensa y detallada que ésta sea. Son imprescindibles, antes de entrar en ese estudio, algunos conceptos sin los cuales el estudiante terminaría por no entender nada, sino un conjunto de «trucos» o artificios que no se sabe bien cómo se justifican. ¿Cómo se puede saber, por ejemplo si una función tiene o no una rama asintótica y una asíntota sin tener una idea, aunque solamente sea intuitivamente, del concepto de límite, o sin la idea de aproximación de la variable dependiente -en realidad se suele identificar con el valor de la función- a un determinado valor, según el entorno en el que se mueva la variable independiente? ¿Cómo se pueden calcular las asíntotas horizontales, si no se es capaz de establecer el comportamiento de la función cuando x tiende al infinito positivo o negativo?

Y esos conceptos imprescindibles, antes de «atreverse» a graficar o a «adivinar» la gráfica de una función son fundamentales: el concepto mismo de función, el concepto de entorno o intervalo, la idea de asíntota, qué es una rama asintótica y, de una manera especial, el concepto de límite.

La estrategia que se propone es que se realicen muchos ejercicios, muchas gráficas, pero sin fundamentos teóricos que los justifiquen. Sin el concepto de límite, nada de eso tiene ningún sentido, sencillamente se juega a las «adivinanzas».

Los libros, además, cuando se estudian las traslaciones verticales u horizontales, y cuando presentan los resultados de las gráficas que se estudian, no pueden «físicamente» más que hacerlo de forma estática. Sin embargo, la naturaleza de estos entes matemáticos que llamamos funciones es precisamente lo contrario: describen fenómenos cambiantes en

el espacio y en el tiempo; y exigen, por lo tanto, una representación dinámica que permita interpretar sus cambios y comportamientos.

3.2 La metodología necesaria

Lo que se pretende en el «producto final» de este trabajo de investigación y desarrollo, y en este informe sobre el mismo, consiste en establecer una secuencia más lógica de los contenidos necesarios para el estudio de las funciones y sus gráficas, los conceptos imprescindibles para ello y, finalmente, otorgar animación y movimiento a las gráficas de las funciones que se estudian: primero los conceptos fundamentales y después la aplicación de los mismos, realizada por cierto, de forma dinámica.

Los conceptos que a continuación se explican en este marco teórico, y las gráficas animadas a las que se refiere el capítulo 4 de este informe, al menos lo intentan.

3.3 El concepto de función

El concepto de función es uno de los más importantes de las matemáticas. En los fenómenos que estudian las ciencias sociales, la física, la química, la biología y otras ciencias, aparecen magnitudes relacionadas entre sí. Estos fenómenos naturales y las relaciones que existen entre sus magnitudes, que se llaman variables, se representan con modelos matemáticos que se llaman funciones. Aunque el propósito es estudiar de forma «animada» e interactiva los gráficos que representan esos modelos matemáticos que llamamos funciones, es conveniente, antes, explicar algunos conceptos fundamentales que ayuden a entender mejor las gráficas que se presentan.

No es el «producto final» un libro electrónico que pueda ser usado, por sí solo, como texto para el estudio de los diferentes tipos de funciones que corresponden al pñsum de bachillerato. Se pretende solamente aportar un elemento dinámico en la presentación de las gráficas de las funciones elementales, con algunos ejemplos que puedan ayudar al docente y a los estudiantes de matemáticas, en su trabajo de enseñanza y aprendizaje.

Así que, en este capítulo, se expondrán solamente los conceptos imprescindibles para una mejor comprensión de las gráficas animadas que se desarrollan en libro electrónico.

3.4 Producto cartesiano de conjuntos

Sean X e Y dos conjuntos. Se define el producto cartesiano de X e Y , así:

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\} \quad (3.4.1)$$

El nuevo conjunto formado así y que se puede escribir como $Z = X \times Y$, está formado por elementos $z = (x, y)$, de tal manera que $z \in Z \iff x \in X$ e $y \in Y$ ¹.

¹Para una explicación más detallada de este concepto, se puede consultar[3], pág.61 y 62

Los elementos $z = (x, y)$ se llaman pares ordenados. Y dos pares ordenados son iguales $(x, y) = (x', y') \iff x = x' \wedge y = y'$.

Si, por ejemplo, definimos los conjuntos X e Y así:

$$X = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$Y = \{1, 2, 3\}$$

Entonces,

$$Z = X \times Y = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3), (f, 1), (f, 2), (f, 3)\} \quad (3.4.2)$$

y gráficamente, usando un diagrama de Venn, podríamos representar la operación así:

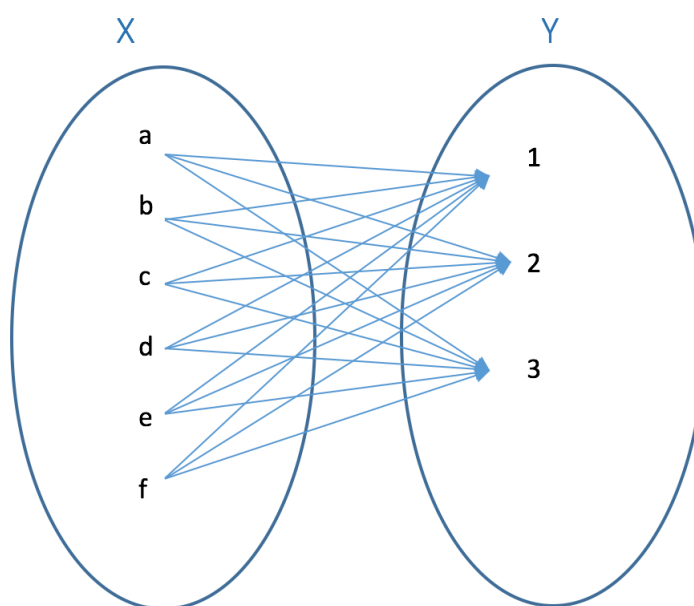


Figura 1: Producto cartesiano $X \times Y$

Las 18 flechas que aparecen en la figura, corresponden a los 18 elementos del nuevo conjunto $Z = X \times Y$. Por ejemplo, la flecha que va del elemento b de X, hasta el 3 de Y, representa el par (b,3), que es distinto del par (3,b), que en realidad no pertenece al conjunto Z. Esta operación, por tanto, no es conmutativa, $X \times Y \neq Y \times X$ si $X \neq Y$. La noción de producto cartesiano se puede generalizar al caso de varios factores². Si el

²Si $X = Y = Z = \mathbb{R}$, entonces $X \times Y$ se puede asociar con el conjunto de los puntos de un plano según los ejes de la geometría de Descartes, (por eso el nombre de «Producto Cartesiano»). De forma similar $X \times Y \times Z$ se puede asociar con los puntos en el espacio tridimensional[3], pág.63 y 64.

producto fuera de tres conjuntos, por ejemplo, se formarían ternas así:

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) / x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z\} \quad (3.4.3)$$

3.5 Relaciones

La palabra «relación» es usada con mucha frecuencia en el lenguaje común y tiene un significado fácil de entender: dos objetos, dos personas, dos entes cualesquiera están relacionados, cuando entre ellos existe algo en común. Puede ser que el uno dependa del otro, que sean parecidos o diferentes, o que sean opuestos en alguna de sus propiedades, etc... Pero en matemáticas, la palabra «relación» tiene un significado muy preciso que es imprescindible definir. Una función es un tipo particular de relación, pero no todas las relaciones son funciones. Por eso este concepto es previo al concepto de función.

Consideremos el producto cartesiano de X e Y según lo establecido en (3.4.1). Una relación R es un subconjunto de los pares ordenados o elementos del conjunto $X \times Y$.

Más formalmente se escribe así:

$$R : X \rightarrow Y \iff R \subseteq X \times Y \quad (3.5.1)$$

Si consideramos el conjunto $Z = X \times Y$, según lo establecido en (3.4.1), cualquier subconjunto de pares ordenados de Z es una relación de X en Y . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, 1), (e, 3), (f, 2)\} \\ R_2 &= \{(a, 3), (f, 1)(a, 1)\} \\ R_3 &= \{(d, 3), (a, 2)\} \end{aligned}$$

R_1 , R_2 y R_3 son subconjuntos de $X \times Y$, y por tanto, son relaciones de $X \rightarrow Y$ (de X en Y). En particular, el conjunto $\emptyset$ (conjunto vacío), también es una relación, ya que $\emptyset \subset X \times Y$. El conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados que forman la relación, se llama dominio; y el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados, codominio.

3.6 Función real de variable real

Una función es una relación especial entre dos conjuntos. Para definir el concepto de relación no se exige que $X \neq Y$. Si $X \subseteq \mathbb{R}$ y además $Y \subseteq \mathbb{R}$ (conjunto de los números reales), entonces se dice que la relación de X en Y es una relación del conjunto de los reales en los reales.

Se exponen a continuación varias formas de definir el concepto de función:

3.6.1 Una primera definición

Supongamos dos conjuntos de objetos, el conjunto A y el conjunto B. Una función de A en B es, en primer lugar, una relación de A en B. Para que dicha relación pueda llamarse función se debe tener una ley que asocie a cada elemento u objeto de A uno y sólo uno de B. Los elementos de A se llaman dominio de la función³. Los elementos de B, asociados con algún elemento de A, forman otro conjunto que se denomina recorrido o rango de la función[1]⁴. Si A y B son subconjuntos de los números reales, entonces, la función se llama real de variable real. Los elementos de A, la variable independiente, se suele representar por una x ; los valores de B, se suelen representar por una y , variable dependiente; y para decir que los valores de A y B están relacionados y forman una función, se escribe $f : A \rightarrow B$, o también, más frecuentemente $y = f(x)$. Es decir que y es el resultado de transformar el valor x en su «imagen» o valor correspondiente, que se le asigna mediante un conjunto de transformaciones representadas por f .

Si escribimos $y = f(x)$, estamos diciendo que y depende de x mediante la ley de asignación f . Por ejemplo:

$$\begin{aligned}y &= f(x) = x^2 - 5 \\y &= f(x) = \frac{1}{x - 1}\end{aligned}$$

son funciones reales(y)de variable real(x).

3.6.2 Definición formal de función

Se llama función[3]⁵ f a la terna

$$f = (G, X, Y) \tag{3.6.1}$$

en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes[3]⁶:

1. El conjunto G es un subconjunto del producto cartesiano de $X \times Y$, es decir, $G \subset X \times Y$.
2. $\forall x \in X$, existe un y sólo un $y \in Y / (x, y) \in G$.

Se dice que G es el «grafo» o la gráfica de la función f . El único elemento $y \in Y$, tal que $(x, y) \in G$, se llama valor de la función f en x , y para designarlo, se utiliza la notación

$$y = f(x)$$

Así pues, G es el conjunto de pares ordenados de f de la forma $(x, f(x))$, y se llama gráfica de la función. Dada una función $f = (G, X, Y)$, se dice que X es el conjunto de partida y Y , el conjunto de llegada de f .

³Este concepto fundamental está elaborado con toda precisión en T. Apóstol, Calculus, Vol 1, segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona 1982, pág. 61 y ss.

⁴Ver pág. 61.

⁵Ver pág. 63.

⁶Ver pág. 63 y 64.

Además, en lugar de decir:

sea f una aplicación de X en Y ,

se dice a menudo:

sea una función o aplicación⁷ $f : X \mapsto Y$,

o también:

sea una aplicación $X \xrightarrow{f} Y$.

Con frecuencia el lenguaje matemático es menos riguroso y no se ajusta estrictamente a esta definición formal que se ha expuesto. En lugar de designar una función por medio de una letra, como f , g , etc., se designa mediante una «fórmula» que permite calcular $f(x)$ en función de x .

En el caso de que $X = Y = \mathbb{R}$, cuando se dice

consideremos la aplicación $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$,

se suele escribir

$$f(x) = x^3 \text{ o simplemente } y = x^3$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

El conjunto G es el gráfico de la función, pero cuando se utiliza el término «gráfico» o «gráfica», se efectúa intuitivamente una operación que en realidad es bastante compleja. Se realiza, en primer lugar, una «correspondencia»⁸ entre los puntos de una recta horizontal, que se considera un eje de «coordenadas», y el conjunto de los números reales, del cual X es un subconjunto. Se forman así pares ordenados en los que su primer elemento es un número real, y el segundo, un punto en una recta horizontal que se llama «recta real». Y sobre cada uno de esos puntos, imaginariamente, se levanta una recta perpendicular, y todos sus puntos quedan relacionados con el valor x .

De forma similar, establecemos una relación o correspondencia entre los puntos de una recta vertical y los valores o elementos de Y . El punto de intersección de la recta vertical que corresponde a x , y la recta horizontal cuyos puntos se han relacionado con un valor de y , se dice que representa el par (x, y) en ese punto del plano llamado cartesiano. Se establece de esta manera, en realidad, una nueva función entre pares ordenados de números reales y un subconjunto de los puntos del plano.

La operación que consiste en «dibujar» o «graficar» una función real, $(y = f(x))$, de variable real (x) , es mucho más compleja de lo que puede parecer en un primer momento.

⁷Nota: «aplicación» y «función» son términos que se utilizan como sinónimos.

⁸Nota: por «correspondencia» debe entenderse lo mismo que se entiende por «relación», según la definición (3.5.1).

Pero son precisamente los «dibujos» o «gráficas» de las funciones los que facilitan la comprensión de las mismas, la forma en que las variables dependen una de otra, su comportamiento en torno al valor « $x = 0$ », su crecimiento o su decrecimiento, y otras características importantes.

Si, además, se puede conseguir que las gráficas estén animadas, estén provistas de movimiento y se presenten de modo sucesivo las relaciones cambiantes entre x y y , aumentará la comprensión de las mismas.

3.6.3 Una definición menos formal de función

En aritmética se trabaja con números; en álgebra, con letras que representan números[8]⁹. En análisis matemático, los objetos matemáticos fundamentales son las funciones.

Definición: Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto X , un único elemento y de un conjunto Y . El elemento y se llama imagen de x mediante f y se escribe $y = f(x)$.

La x se llama variable independiente, y la y , variable dependiente, ya que su valor depende del que toma x .

El conjunto X se llama dominio de f , $D(f)$, y el conjunto de todas las imágenes de los elementos de X se llama recorrido, rango o imagen de f , $R(f)$ [8]¹⁰.

Las funciones pueden definirse entre dos conjuntos cualesquiera, pero este estudio se centra en aquellas en las que tanto X como Y son conjuntos de números reales. Estas funciones, por ello, se llaman funciones reales de variable real[8]¹¹.

La definición anterior queda ilustrada con el siguiente diagrama:

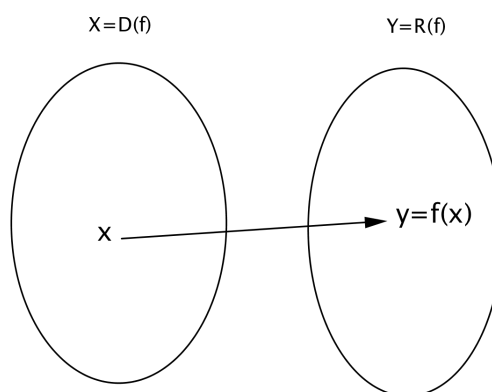


Figura 2: Dominio y rango de una función.

⁹Ver pág. 186.

¹¹Ver pág. 186.

La gráfica de una función f es un conjunto de pares ordenados, $(x, (f(x)))$, a los que se les hace corresponder con los puntos del plano en un sistema de ejes cartesianos. El punto (a, b) está en la gráfica de f solamente si la coordenada de a es un valor x del dominio de f , y b , que es la segunda coordenada del punto, corresponde a un valor y del rango de la función, de manera que $b = f(a)$.

Ejemplos:

Sea $y = x^3 - x + 2$. Su gráfica en el plano cartesiano es:

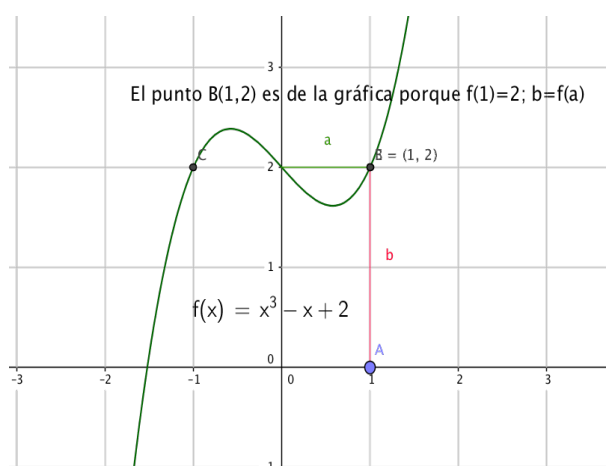


Figura 3: Gráfica y puntos del plano.

Como se puede observar por la gráfica, $D(f) = Rang(f) = \mathbb{R}$.

Sea la función $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Su gráfica en el plano cartesiano es:

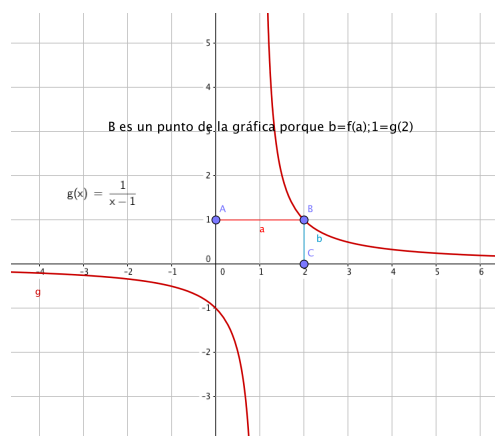


Figura 4: Punto y par ordenado.

El $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$, puesto que $g(1)$ no está definido. El $Rang(g) = \mathbb{R} - \{0\}$, porque la gráfica nunca corta al eje X, no existe un $x \in \mathbb{R}/y = f(x) = 0$.

3.7 Clasificación de las funciones

Funciones reales de variable real

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{Algebraicas} \\ 2. \text{Trascendentes} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{Funciones polinómicas} \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{Función constante} \\ 2. \text{Función de primer grado} \\ 3. \text{Función cuadrática} \\ 4. \text{Función de grado superior} \end{array} \right. \\ 2. \text{Funciones racionales} \\ 3. \text{Funciones radicales} \\ 4. \text{Funciones definidas a intervalos} \\ 1. \text{Funciones exponenciales} \\ 2. \text{Funciones logarítmicas} \\ 3. \text{Funciones trigonométricas} \end{array} \right.$$

3.7.1 Funciones algebraicas

Son funciones algebraicas aquellas que están definidas por una regla de asignación o «fórmula», en la cual la variable independiente se transforma por operaciones algebraicas, es decir, por la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación o la radicación. Por ejemplo, una función como

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2x^2 - 3x + 5}{1 - x + 3x^3}} \quad (3.7.1)$$

es una función algebraica: las operaciones que se realizan con la variable x son operaciones aritméticas.

3.7.1.1 Funciones explícitas

Cuando en una función algebraica, o una función en general, la variable dependiente, y , está claramente separada a un lado de la fórmula que define la función, y en el otro lado solamente la expresión contiene operaciones con x , se dice que es una función explícita. Por ejemplo:

$$y = f(x) = \frac{1 - x^3 - x^4}{x^2 - 4} \quad (3.7.2)$$

3.7.1.2 Funciones implícitas

A veces se presentan funciones en las que la variable dependiente no se encuentra «sola» escrita a un lado del signo igual; se dice entonces que no está despejada la y . Por ejemplo:

$$3x + 4y - 5 = 0 \quad (3.7.3)$$

Y se dice que se trata de una función explícita. No siempre es fácil, pero la función implícita se puede convertir en explícita, como la anterior, que se podría escribir explícitamente así:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \quad (3.7.4)$$

3.7.1.3 Funciones polinómicas

Son aquellas que están definidas mediante un polinomio. De forma general:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (3.7.5)$$

en donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ son números reales. Su dominio es el conjunto de los números reales.

3.7.1.4 Función constante

Tiene la forma

$$f(x) = k \quad (3.7.6)$$

en donde $k \in \mathbb{R}$. Su dominio es el conjunto de los reales. Su recorrido es $R(f) = k$. Es una función polinómica de grado 0.

3.7.1.5 Funciones lineal, afín e identidad

- La función lineal tiene la forma:

$$f(x) = mx \quad (3.7.7)$$

- La función afín:

$$f(x) = mx + b \quad (3.7.8)$$

en donde m y b son números reales. m se llama pendiente -más adelante se verá por qué- y b es la ordenada en el origen. Cuando $x = 0 \rightarrow f(x) = b$. Por ejemplo, $f(x) = 2x - 5$.

- La función identidad:

$$f(x) = x \quad (3.7.9)$$

La función lineal es un caso particular de la función afín cuando $b = 0$. La función identidad es un caso particular de la función lineal cuando $m = 1$. Las funciones lineales, afín e identidad son funciones polinómicas de grado 1 ($n=1$).

3.7.1.6 Función cuadrática o de segundo grado

Tiene la forma general de un polinomio de segundo grado, y se suele representar así:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (3.7.10)$$

en donde a , b y c son números reales. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{5}x - 1.$$

3.7.1.7 Funciones polinómicas a trozos

Son funciones que se definen con una expresión diferente en distintos intervalos de su dominio. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 5 \\ 1 - 2x, & x > 5 \end{cases} \quad (3.7.11)$$

3.7.1.8 Funciones valor absoluto, parte entera y función signo

Valor absoluto¹²:

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad (3.7.12)$$

Parte entera¹³:

$$y = \llbracket x \rrbracket \quad (3.7.13)$$

Función signo:

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3.7.14)$$

3.7.2 Funciones trascendentes

Son funciones trascendentes aquellas que se definen mediante operadores no aritméticos: exponenciación, logaritmicación o relaciones trigonométricas.

¹²Las funciones «Valor Absoluto», «Parte Entera» y «Función Signo», contienen expresiones polinómicas, aunque no son propiamente funciones polinómicas.

¹³La parte entera de x es el entero más próximo a x y menor o igual que x .

3.7.2.1 Función exponencial

$$f(x) = ka^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.7.15)$$

La función exponencial «natural» es aquella en la que $k = 1$ y $a = e$:

$$f(x) = e^x \quad (3.7.16)$$

en donde

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3.7.17)$$

Lo cual significa que el valor de e se puede aproximar tanto como se desee, haciendo n convenientemente grande. Cuanto mayor sea n , el cálculo que resulte de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ estará más cerca de e . El verdadero valor de e es el límite. El concepto de límite, formalmente, se explica más adelante.

Se puede demostrar que es posible calcular el valor del número e así:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

3.7.2.2 Función logarítmica

Definición: Se dice que $\lg_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, en donde $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, es decir, que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos. El Dominio de la función logarítmica es el conjunto $\mathbb{R}^+$, y se escribe

$$f(x) = \lg_a x \quad (3.7.18)$$

Si $a = e$, entonces se dice que f es la función logarítmica natural, que se escribe

$$y = f(x) = \lg_e x, \quad \text{o simplemente } y = \ln(x)$$

3.7.2.3 Funciones trigonométricas

1. Función seno: $y = \text{sen}(x)$
2. Función coseno: $y = \text{cos}(x)$
3. Función tangente: $y = \text{tg}(x)$
4. Función secante: $y = \text{sec}(x)$
5. Función cosecante: $y = \text{csc}(x)$
6. Función cotangente: $y = \text{ctg}(x)$

En general, la relación inversa de una función trigonométrica no es propiamente una función. Sin embargo, si se restringe su dominio a un intervalo determinado, dichas relaciones inversas sí pueden ser funciones. Pero se estudian -con un cierto abuso del lenguaje matemático- las funciones trigonométricas inversas, como si fueran tales. Por ejemplo:

$\text{sen}(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pero $\text{sen}^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^0 + 2k\pi$, en donde k es un número entero. Hay, por tanto, infinitos valores de x cuyo seno tiene el mismo valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La relación inversa de la función seno, llamada arcoseno y escrita como $y = \text{arcsen}(x)$ o $y = \text{sen}^{-1}(x)$, no es propiamente una función.

También se consideran funciones trascendentes las funciones que resultan de hacer operaciones con funciones trascendentes entre sí o entre funciones algebraicas y trascendentes. Así, son funciones trascendentes las siguientes:

- Funciones trigonométricas (trascendentes): $f(x) = \text{sen}(x) + \cos^2 x$.
- Funciones trascendentes: $y = x \ln(x) + tg(x)$.
- O también: $y = e^x(x^2 - \text{sen}(x))$.

3.8 El concepto de límite de una función en un punto

Si se quiere estudiar hacia qué valor tiende una función cuando la variable independiente toma valores próximos a un número real dado, resulta imprescindible introducir el concepto de **límite de una función en un punto**[8]¹⁴.

En la función $f(x) = 1 - x^2$, si la variable x toma valores próximos al número 2, es fácil ver que f toma valores próximos a -3 , es decir, $f(2^+) \simeq -3$, lo cual quiere decir que para valores de x próximos a 2 por la derecha (un poco mayores que dos), la función toma valores muy próximos a -3 . De forma similar, $f(2^-) \simeq -3$, que quiere decir que para valores de x próximos a 2 por la izquierda (un poco inferiores a 2), la función también toma valores próximos a -3 . Esto se expresa diciendo que el límite de la función $f(x) = 1 - x^2$, cuando $x \rightarrow 2$, (x tiende a 2), es igual a -3 ; y se puede escribir que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

o también

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - x^2) = -3$$

En muchos casos el valor del límite no es tan evidente. Por ejemplo, si se quiere calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

La función $\frac{\text{sen}(x)}{x}$, evidentemente, no existe en $x = 0$. Sin embargo se puede demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

¹⁴Ver pág. 190.

3.9 Definición intuitiva de límite

Si se parte del ejemplo siguiente, como aparece en la figura:

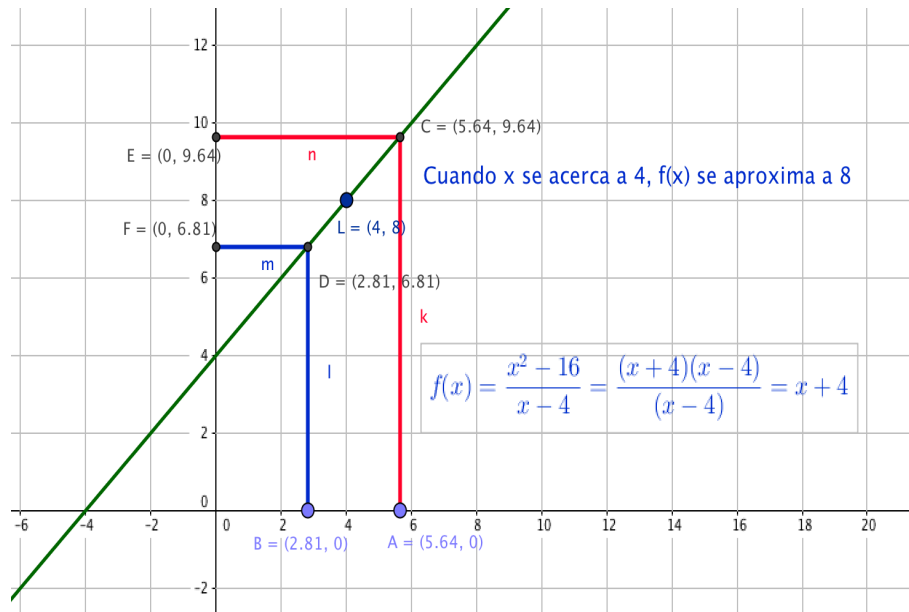


Figura 5: Definición intuitiva de límite

La gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

es esencialmente la gráfica de la función

$$g(x) = x + 4$$

con la excepción de que la gráfica de la función f tiene un «hueco» en el punto en el que $x = 4$. Para valores de x suficientemente próximos a 4, $f(x)$ se aproxima cada vez más a 8. Se dice entonces que 8 es el límite de la función $f(x)$ cuando x se acerca o tiende a 4. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8, \text{ aunque } f(4) \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8, \quad g(4) = 8$$

En $x \neq 4$, evidentemente se tiene que $f(x) = g(x)$. Las dos funciones tienen el mismo límite cuando x tiende a 4, aunque son funciones distintas solo y precisamente en ese punto, $x = 4$.

Una definición intuitiva o «informal» del concepto de límite se puede hacer así^[14]¹⁵:

¹⁵Ver pág. 68

Si $f(x)$ puede hacerse arbitrariamente próximo a un número L al tomar x valores suficientemente próximos, pero diferentes de un número a , por la izquierda y por la derecha de a , entonces el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

3.10 Definición formal de límite

Sea f una función definida en un entorno de a , es decir, en valores tan cercanos a a como se quiera, sin importar si $f(a)$ existe o no¹⁶. Se dice que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si $\forall \epsilon > 0$, sin importar cuán pequeña sea ϵ , existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \epsilon$$

Esta definición, una de las más importantes de toda la matemática, porque de ella depende todo el cálculo diferencial e integral, se lee así:

Se dice que el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a , es L (exactamente L), si para todo número positivo ϵ (épsilon), sin importar cuán pequeño sea, existe un número positivo δ (delta), tal que, si la diferencia en valor absoluto entre x y a es mayor que cero y menor que δ , implica que la diferencia en valor absoluto entre $f(x)$ y L es menor que ϵ . Dicho de otra manera: L es el límite de la función $f(x)$, cuando x tiende a a , si $f(x)$ se puede acercar todo lo que se quiera a L , acercando convenientemente x a a , sin importar el valor que la función tenga en $x = a$.

El valor absoluto de la diferencia entre L y $f(x)$ puede ser cero. El valor absoluto de la diferencia entre x y a tiene que ser mayor que cero. Es decir, para que se pueda afirmar que existe el límite L , no importa lo que ocurre exactamente en a , no importa el valor de $f(a)$. Puede ocurrir que, existiendo L , $f(a)$ exista o que no exista.

En el libro electrónico, producto final de este trabajo, o en este informe en su formato digital, se puede acceder al video en el que se explica dinámicamente este importante concepto:

<https://youtu.be/BQ6ij8jkk4>.

De forma similar, desde el formato digital de este informe se puede interactuar con la gráfica siguiente usando el enlace

<https://www.geogebra.org/m/r4JCRDH4>.

¹⁶Ver pág. 38.

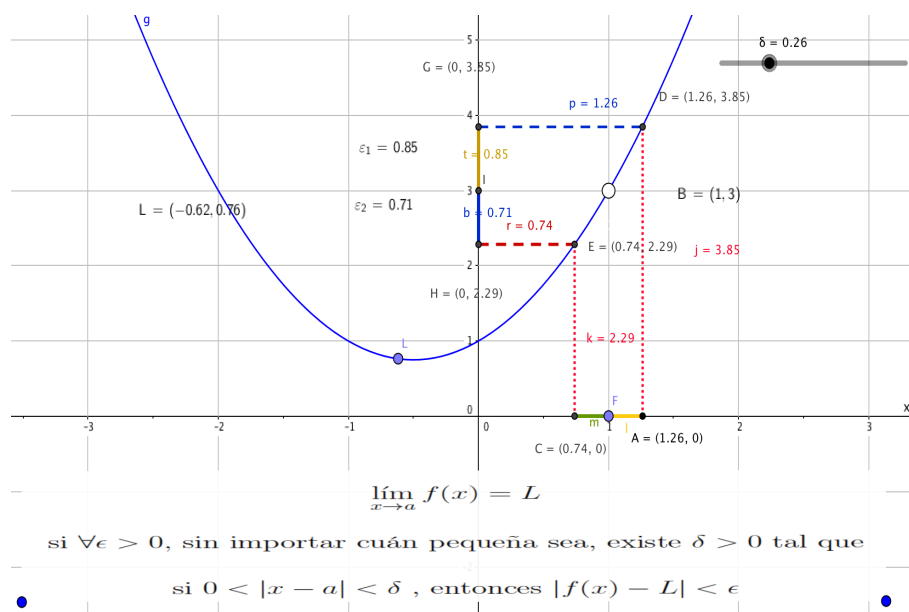


Figura 6: La idea de límite

Conviene insistir en que la existencia de un límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a (desde un lado o desde ambos lados) no depende de si f está definida en a , sino solamente de si está definida en valores de x cercanos a a [14]¹⁷.

Puede ocurrir, que la función esté definida en $x = a$, y sin embargo la función tenga por límite en ese punto un valor diferente de $f(a)$. Por ejemplo¹⁸:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16-x^2}{4+x}, & x \neq -4 \\ 5, & x = -4 \end{cases}$$

En donde, evidentemente, se tiene que $f(-4) = 5$ y sin embargo

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{16-x^2}{4+x} = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} = \lim_{x \rightarrow -4^-} (4-x) = 8$$

e igualmente

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{16-x^2}{4+x} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{(4-x)(4+x)}{4+x} = \lim_{x \rightarrow -4^+} (4-x) = 8$$

¹⁷Ver pág. 69.

¹⁸Para mayores detalles, ver en [14], pág. 69 y ss.

3.11 Estado del arte

La Academia Khan (Khan Academy) es una organización no gubernamental y educativa (ONG), que se dedica prioritariamente y de forma completamente gratuita, a la enseñanza de las matemáticas a cualquier persona y en cualquier parte del mundo. Su fundador es Salman Khan, egresado del Instituto Tecnológico de Massachusetts y de la Universidad de Harvard. En el año 2006 creó el sitio web www.khanacademy.org con este propósito, y actualmente es, con toda seguridad, uno de los lugares de internet más requeridos para quienes quieren aprender matemáticas “on line”. Existe en la red muy poco material parecido a éste.

Existen en esa plataforma miles de videos perfectamente diseñados y organizados secuencialmente, según el nivel y la profundidad de los conocimientos que quiera el usuario. Los contenidos están dirigidos principalmente a la educación primaria y secundaria. Inicialmente fue creada para la enseñanza de las matemáticas, pero poco a poco se van añadiendo contenidos de otras ciencias.

A pesar de lo extraordinariamente valiosa que es esta plataforma educativa para matemáticas, no se encuentran en ella los contenidos a los que este trabajo se refiere: no hay gráficos animados e interactivos para la descripción y análisis de las funciones reales de variable real que deben estudiarse en el nivel de bachillerato, aunque sí, como queda dicho, numerosísimos vídeos.

Probablemente el software que mejor se presta para la realización de gráficos animados en geometría y cálculo, es Geogebra (contracción de Geometría y Álgebra). De hecho, fue concebido como un software de geometría dinámica. Es un software interactivo y libre; y eso hace de él la herramienta ideal para el trabajo que se propone en este plan: gráficos animados de las funciones elementales. El repositorio asociado a este software se encuentra en www.tube.geogebra.org, pero aunque contiene abundante material, incluso de carácter dinámico, está disperso y desestructurado, según los aportes que desinteresadamente ofrecen sus usuarios. El usuario podría mejorar su aprendizaje si todos estos aportes estuvieran organizados secuencial y sistemáticamente.

Geogebra exige, precisamente por ser una institución sin fines de lucro, que todas las personas que construyen proyectos originales utilizando este software libre, pongan el resultado de sus trabajos en el “repositorio” mencionado, y permitan el uso discrecional a todos quienes lo deseen, con la sola “obligación”, como es comprensible, de mencionar el nombre del autor del proyecto o trabajo. Sin embargo, cada persona envía sus trabajos a ese sitio de la web sin ningún tipo de orden o sistema de clasificación por niveles.

Una de las herramientas más poderosas para crear gráficos de funciones explícitas o implícitas, específicamente para los sistemas MAC, es la aplicación “Grapher”. Contiene esta aplicación numerosísimos ejemplos y permite todo tipo de análisis de las funciones que se propongan. Permite exportar los gráficos a formato $\text{\LaTeX}$. No tiene, sin embargo, la posibilidad de interactuar con cada gráfico animado que se diseñe.

Capítulo 4

Metodología

Aunque no se pretende un Diseño Instruccional propiamente dicho, parece conveniente utilizar, con las adaptaciones que exige este trabajo de desarrollo, la metodología llamada ADDIE (Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación).

La metodología ADDIE ha sido pensada especialmente para realizar diseños instruccionales a través de una plataforma informática educativa y el desarrollo de un curso en línea. Lo que se pretende con este trabajo de desarrollo, sin embargo, es la elaboración de una herramienta didáctica, un libro electrónico, que contenga gráficas animadas e interactivas, las cuales permitan una mejor comprensión de las funciones matemáticas elementales que se estudian en el bachillerato.

4.1 Análisis

El libro electrónico llamado Desarrollo de Gráficas Animadas e Interactivas para el Estudio de Funciones Matemática Elementales, producto final de este trabajo, no debe ser puesto a disposición de los estudiantes de bachillerato sin contar con la imprescindible ayuda y dirección de su profesor de matemáticas. Los conceptos fundamentales de introducción al cálculo, como el concepto de límite de una función, el concepto de derivada o el estudio de las asíntotas y variaciones de una función «elemental», no son tan elementales. Exigen una dedicación muy especial de parte de los estudiantes y, a veces, una explicación detallada de parte del docente.

El mencionado libro electrónico sobre gráficas animadas no puede ni pretende sustituir la labor pedagógica del docente, ni prescindir del esfuerzo y la dedicación del estudiante. Solamente quiere ser una ayuda para profundizar en el alcance y la riqueza conceptual de lo que se estudia.

Se presenta a continuación el resultado de una encuesta aplicada a algunos docentes especialistas en la materia sobre, en primer lugar, de qué manera utilizan las TIC en la enseñanza de las matemáticas; y en segundo lugar, los previsibles resultados de utilizar el libro electrónico que se presenta en este trabajo de desarrollo.

En el actual currículo establecido por el Ministerio de Educación para bachillerto, en la asignatura de matemáticas desde el 2º de Bachillerato General Unificado, consta un bloque temático completo dedicado al estudio de las funciones elementales: funciones polinómicas, funciones racionales, radicales y trascendentes. Se exige en este estudio que el

estudiante sea capaz de adquirir la destreza de graficarlas y de calcular sus asíntotas. El esquema que propone el Ministerio de Educación para dicho estudio, es el siguiente:

1. **Cálculo del dominio de la función.**
2. **Cortes con los ejes de coordenadas.**
3. **Signo de la función en los diferentes intervalos en los que está definida.**
4. **Cálculo de las asíntotas verticales, horizontales, oblicuas y sus puntos de discontinuidad.**
5. **Ramas asíntóticas de la función.**
6. **Esbozo de una gráfica aproximada de la misma, con la ayuda de una «tabla de valores».**
7. **Cálculo del recorrido de la función.**

Para establecer el dominio de una función, especialmente en el caso de las racionales y radicales, se precisa una cierta habilidad en la resolución de inecuaciones, en las cuales pueden aparecer polinomios de grado superior, cuya factorización exige, a su vez, el dominio de la teoría de la divisibilidad de polinomios, del teorema del residuo y del teorema del factor.

Estas destrezas necesarias para analizar de manera detallada las funciones elementales, no las tiene el estudiante de 2º de bachillerato, e incluso carece de ellas el estudiante de 3º.

Igualmente, para el estudio de las asíntotas y ramas asíntóticas, se precisa un cierto dominio de la destreza de calcular límites laterales y límites en el infinito. Sin embargo, el concepto de límite no se trata sino al final del temario y de forma muy elemental e intuitiva. Esta secuenciación de contenidos, evidentemente, es un error metodológico que complica, aun más, la ya difícil tarea del profesor de matemáticas.

Si se quiere calcular con precisión el recorrido de una función, en la mayoría de los casos, se deben establecer los máximos y mínimos relativos de la misma. Para ello se necesita el concepto de derivada la continuidad de una función en un punto, y su significado con relación a las zonas o intervalos de crecimiento o de decrecimiento.

Se presentará en la siguiente sección la secuenciación que se considera imprescindible en el estudio de toda esta temática. Y se analizará también, a partir de la encuesta, cuyos resultados aparecen a continuación, el uso que los docentes suelen hacer de las nuevas tecnologías como elementos didácticos en el estudio de gráficas de las funciones matemáticas elementales.

Se presentará en la sección 4.4.1 la secuenciación que se considera imprescindible en el estudio de toda esta temática. Y se analizará también, a partir de la encuesta, cuyos resultados aparecen a continuación, el uso que los docentes suelen hacer de las nuevas tecnologías como elementos didácticos en el estudio de gráficas de las funciones matemáticas elementales.

En el cuadro 4.2., en la sección siguiente, se presentan los resultados de la encuesta aplicada a varios docentes sobre el uso de la TIC en sus clases diarias de matemáticas, especialmente en el estudio y graficación de las funciones elementales.

Las encuestas, según el modelo que consta en los apéndices A y B, han sido aplicadas a docentes de matemáticas de bachillerato y de Básica Superior de tres centros educativos:

- 1. Unidad Educativa Verbo Divino de la ciudad de Guaranda: 6 docentes.**
- 2. Unidad Educativa Sagrada Familia de la ciudad de Ambato: 5 docentes.**
- 3. Unidad Educativa San Vicente Ferrer de la ciudad de Puyo: 8 docentes.**

En total, pues, han respondido 19 docentes. El primero y el tercero de estos centros educativos mantienen como oferta educativa el Bachillerato Internacional, lo cual hace que sus respuestas sean especialmente valiosas y dignas de consideración.

Algunas de las funciones cuyas gráficas se presentan con animaciones ya se estudian en el pénsum de Básica Superior. Por esa razón, también se ha tenido en cuenta la opinión y la valoración que hacen los profesores de ese nivel.

4.2 Resultados antes de la evaluación del libro electrónico

A continuación se presenta una tabulación de las respuestas de los docentes, antes de leer, utilizar o evaluar el libro electrónico que se ha puesto a su disposición para el libre uso en su trabajo docente.

Son 8 preguntas en las cuales el docente puede manifestar de qué manera está utilizando las TIC en sus clases de matemáticas, especialmente en relación con las gráficas de funciones elementales.

También se le pregunta sobre aplicaciones informáticas concretas y cómo las utiliza en el estudio de dos conceptos fundamentales: el concepto de límite y la interpretación geométrica de la derivada.

Encuesta aplicada a profesores de matemáticas de bachillerato.				
Resultados de la encuesta aplicada a docentes de matemáticas, antes de la utilización del libro electrónico, según la ficha que consta en el Apéndice A.				
Tabulación de las respuestas según las siguientes cuatro opciones: 1 (equivalente a nunca); 2, con frecuencia; 3, casi siempre y 4, siempre.				
Preguntas	1	2	3	4
1. ¿Con qué frecuencia utiliza las TIC en la enseñanza de las matemáticas?	0	16	3	0
2. ¿Utiliza aplicaciones informáticas para la representación gráfica de funciones elementales?	0	16	3	0
3. ¿Suele utilizar el software «Geogebra» en la representación de funciones polinómicas, racionales, radicales o trascendentes?	5	10	3	1
4. Con el software que usted usa en la representación de funciones, ¿consigue animación de las gráficas que se visualizan?	17	0	2	0
5. ¿Pueden sus estudiantes interactuar con las gráficas que usted presenta haciendo uso de software matemático especializado?	16	1	2	0
6. ¿Cómo juzga usted el grado de comprensión que los estudiantes consiguen en la graficación y cálculo de las asíntotas de las funciones elementales?	0	16	3	0
7. ¿Explica usted el concepto de límite de una función en un punto utilizando gráficas animadas, mediante algún tipo de software especializado?	17	2	0	0
8. ¿Utiliza usted software especializado en el estudio del concepto de derivada de una función y consigue animación en la representación gráfica de dicho concepto?	17	2	0	0

Tabla 1: Resultados de la encuesta antes de la evaluación del libro electrónico

4.2.1 Resumen de los resultados

Una simple observación de los resultados que aparecen en la tabla anterior, permite afirmar que la utilización de las TIC en la enseñanza de las matemáticas es muy limitada y ocasional.

Sin embargo, los tres centros educativos tienen instalados equipos de proyección y señal de internet en cada aula, y además, los estudiantes disponen de computadora personal.

Dos de los tres centros desarrollan el programa de Bachillerato Internacional; uno de ellos, curiosamente, ha obtenidos los mejores resultados, a nivel nacional, en la asignatura de matemáticas, en la prueba «Ser Bachiller» que ha aplicado el Instituto Nacional de Evaluación en el mes de julio de este año a los estudiantes de 3º del Bachillerato General Unificado.

Esto permite afirmar que, muy posiblemente, los resultados serían más deficientes si se aplicara la misma encuesta a todos los docentes de matemáticas del país. Una tarea, por cierto, que no es posible ni se pretende en este trabajo.

Porcentualmente, se pueden resumir los resultados así:

Nº de pregunta	Frecuencia de uso de las TIC	Porcentaje
1	Nunca	0%
	Con frecuencia	84,21%
	Casi siempre	15,78%
	Siempre	0%
2	Nunca	0%
	Con frecuencia	84,21%
	Casi siempre	15,78%
	Siempre	0%
3	Nunca	26,31%
	Con frecuencia	52,63%
	Casi siempre	15,78%
	Siempre	5,26%
4	Nunca	89,47%
	Con frecuencia	0%
	Casi siempre	10,52%
	Siempre	0%
5	Nunca	84,21%
	Con frecuencia	5,26%
	Casi siempre	10,52%
	Siempre	0%
6	Nunca	0%
	Con frecuencia	84,21%
	Casi siempre	15,78%
	Siempre	0%
7	Nunca	89,47%
	Con frecuencia	10,52%
	Casi siempre	0%
	Siempre	0%
8	Nunca	89,47%
	Con frecuencia	10,52%
	Casi siempre	0%
	Siempre	0%

Tabla 2: Resumen de los resultados antes de la lectura del libro

De los porcentajes obtenidos en el cuadro anterior, se pueden extraer los siguientes resultados:

1. La mayoría de los docentes consultados de los tres centros educativos (84,21%), utilizan software especializado en la enseñanza de las matemáticas con cierta frecuencia. Disponen de los equipos necesarios y los utilizan, frecuentemente, de forma apropiada.
2. Igualmente, para la graficación de funciones matemáticas elementales, también con

cierta frecuencia, suelen utilizar aplicaciones informáticas que ayudan a comprender y explicar las variaciones de las diferentes funciones que son objeto de estudio.

3. Con bastante menos frecuencia, (52,63%), se utiliza la aplicación «Geogebra», que es precisamente la que se ha utilizado en la mayoría de las gráficas animadas que se presentan en el «producto final» al que se refiere este informe. Seguramente esto se debe a que esta aplicación exige un largo aprendizaje para su correcta utilización.
4. Casi nunca, (89,47%, se consiguen, en las representaciones gráficas que los docentes consultados realizan ante sus estudiantes, animaciones de las funciones que se estudian. La mayoría de las aplicaciones informáticas que utilizan tienen esta limitación.
5. Con parecido porcentaje, (84,21%), los docentes no consiguen interacción de los estudiantes con las gráficas que con cierta frecuencia presentan en sus explicaciones.
6. No obstante, los docentes, en un alto porcentaje, (84,21%), afirman que la adquisición de destrezas que sus estudiantes evidencian en la graficación de las funciones elementales, suele ser suficiente, aceptable, se da con cierta frecuencia.
7. Lo más sobresaliente quizás de los resultados de esta encuesta, consiste en comprobar que, prácticamente en casi todos los casos, (89,47%), los docentes no utilizan ningún tipo de software especializado para la explicación y el estudio del concepto de límite de una función en un punto. Sin embargo, este concepto es, sin duda alguna, uno de los más importantes de toda la matemática.
8. Y lo mismo se puede decir del estudio del concepto de derivada de una función en un punto: el 89,47% de los docentes nunca presenta o explica este concepto, y menos de forma interactiva o animada, mediante el uso de alguna aplicación informática especializada.

4.3 Desarrollo y diseño

A continuación se detallan las herramientas informáticas utilizadas en el desarrollo del producto final, y se establece la secuencia de contenidos que parece más lógica en el estudio de las funciones matemáticas elementales, así como el material didáctico que se aporta, mediante un libro electrónico con animaciones y gráficas interactivas, para lograr un aprendizaje más profundo de los mismos. En el capítulo dedicado al «Marco Teórico» se han explicado dichos contenidos.

4.4 Desarrollo

En el desarrollo de las gráficas animadas e interactivas se han utilizado las siguientes aplicaciones informáticas o software especializado:

1. «Geogebra», software libre y multiplataforma.

2. El repositorio www.tube.geogebra.org, en donde se han puesto a disposición del lector todas las interacciones a las que se puede acceder desde el libro electrónico.
3. Un canal propio en www.youtube.com, en donde reposan los videos a los que se puede acceder desde el libro electrónico, mediante los enlaces correspondientes a cada caso o concepto estudiado.
4. La aplicación Screenflow, software propietario de Apple, con el cual se ha elaborado la mayoría de los videos. Dicha aplicación forma parte del sistema operativo «macOS Sierra», versión 10.12.1, incluido en el equipo MacBook Pro (Retina, 15 pulgadas, finales de 2013), propiedad del autor.
5. La aplicación Quicktime, también software propietario de Apple, con el cual se han elabora también algunos de los videos que constan en el libro electrónico. La licencia de esta aplicación forma parte también del sistema operativo «macOS Sierra», versión 10.12.1, incluido en el equipo MacBook Pro del autor.
6. La aplicación SketchBookPro, igualmente software propietario, aunque no de Apple, para una demostración que se ha hecho de forma manuscrita en un video, sobre la parábola y la función cuadrática. El autor posee licencia por un año, desde noviembre de 2016, para el uso de esta aplicación.
7. El producto final titulado «Desarrollo de Gráficas Animadas e Interactivas para el estudio de las Funciones Matemáticas Elementales», y este informe final, han sido elaborados con el editor de documentos “ $\text{\LaTeX}$ ”, que es un software libre especialmente apropiado para la edición de textos relacionados con las ciencias matemáticas y las diferentes ramas de la ingeniería. En realidad se ha utilizado, sobre el software de $\text{\LaTeX}$, como interfaz, una aplicación que también es software libre y que se denomina « $\text{\LyX}$ ». Su logo es particularmente original y tiene la siguiente forma¹:

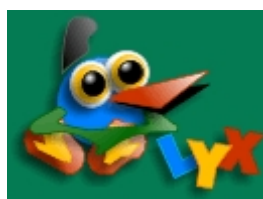


Figura 7: Logo de LyX

Tanto $\text{\LaTeX}$ como $\text{\LyX}$ son aplicaciones de software libre que pueden ser utilizadas en sistemas Windows, Mac OS o Linux.

¹Imagen tomada de <http://www.dipler.org/2010/08/lyx/>

4.4.1 Diseño y secuenciación de los contenidos

1. Se establece el concepto de función real de variable real, según los contenidos del currículo del Bachillerato General Unificado, con numerosos ejemplos y gráficas apropiados de los mismos.
2. Se presenta una clasificación de dichas funciones elementales y el orden que se debe seguir en el estudio de las mismas.
3. A partir de gráficos dinámicos, se realiza el estudio de las primeras funciones elementales: funciones afín y lineal, función cuadrática y funciones polinómicas de grado superior y sus variaciones.
4. Construcción de las gráficas de las funciones exponencial y logarítmica: definiciones, características, traslaciones, simetrías y gráficas animadas de las mismas.
5. Elaboración gráfica de animaciones de funciones racionales.
6. Elaborar formalmente la idea y el concepto de límite de una función en un punto, a partir de la construcción gráfica de la idea de “entorno” y de la idea intuitiva de aproximación. Construcción de Ramas y Asíntotas. Representación con gráficas animadas.
7. Representación gráfica, con el uso de “deslizadores” o parámetros, mediante el software de «Geogebra», de funciones con radicales y estudio de sus características.
8. Gráficas animadas de las funciones trigonométricas: variaciones, periodicidad.
9. Estudio del concepto de derivada de una función en un punto, con atención especial a su carácter dinámico, haciendo uso de la aplicación informática «Geogebra».

4.5 Gráficas animadas de funciones algebraicas

4.5.1 Funciones polinómicas

Según la definición 3.7.5, una función polinómica está definida mediante un polinomio. El número n define el grado de la función. El dominio de toda función polinómica de cualquier grado es $\mathbb{R}$. El cálculo del recorrido de una función polinómica, sin embargo, puede resultar menos sencillo. Como se verá en las gráficas animadas siguientes, se pueden dar varios casos:

1. Si el grado del polinomio es cero, el dominio sigue siendo el conjunto de los reales. El recorrido se reduce precisamente al valor de la constante.
2. Si el grado del polinomio es impar, el dominio y el recorrido de la función es el conjunto de los números reales.
3. Si el grado del polinomio es par, como se puede ver en las gráficas que siguen, la función tiene un máximo o un mínimo absoluto como mínimo; y se puede calcular el recorrido de la función fácilmente desde ese máximo o mínimo hasta menos o más infinito respectivamente.

4.5.1.1 Función polinómica de primer grado

La función polinómica de primer grado o función lineal se deduce de la general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (4.5.1)$$

cuando $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$. La función queda reducida así:

$$f(x) = a_1 x + a_0 \quad (4.5.2)$$

que más comúnmente se suele escribir, haciendo $a_1 = m$ y $a_0 = b$,

$$f(x) = mx + b \quad (4.5.3)$$

o simplemente

$$y = mx + b \quad (4.5.4)$$

1. Se puede deducir la ecuación de la recta fácilmente, como muestra el gráfico siguiente:

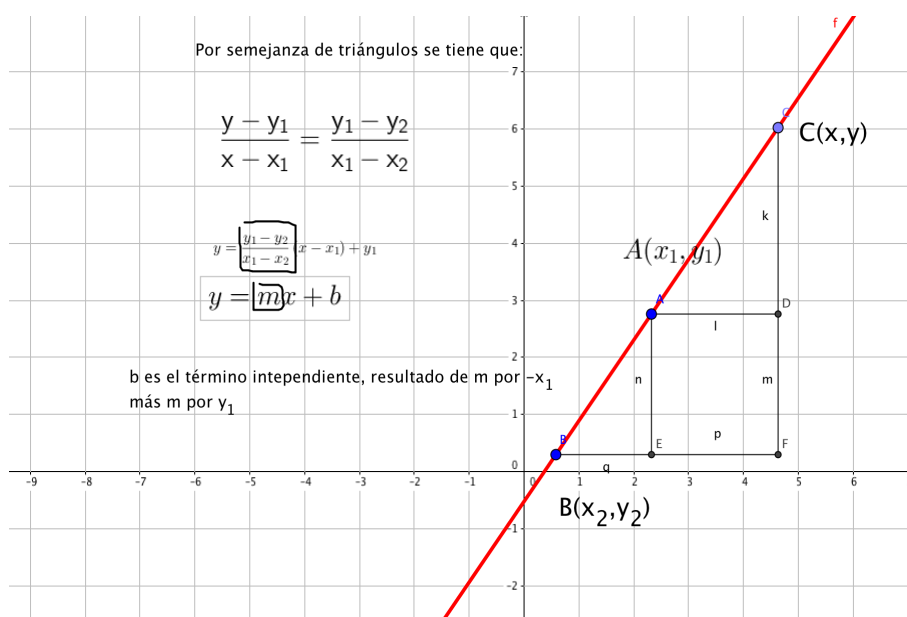


Figura 8: Deducción de la ecuación de la recta

2. Para el estudio del significado de los valores de m y de b , y las variaciones que experimenta la función según esos valores, se puede acceder, desde este informe en su formato digital, al video que se anuncia en la siguiente figura:

El enlace es <https://youtu.be/oGmvfh0X5Ag>.

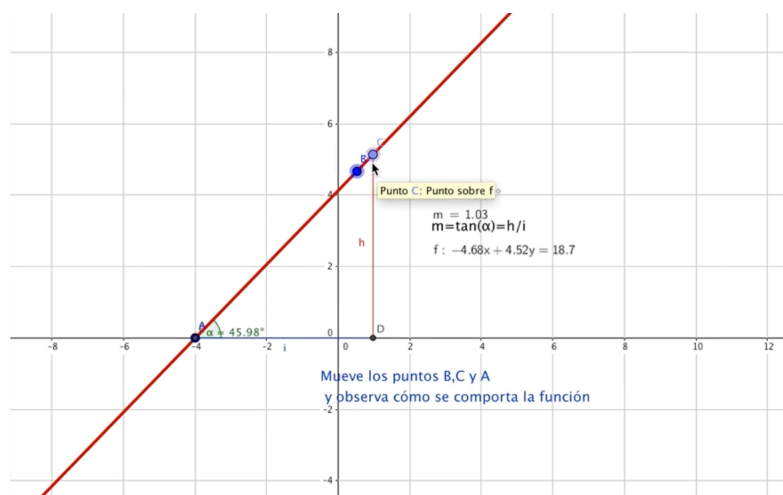


Figura 9: Variaciones de la función según m y b

3. Desde este informe en formato digital, se puede interactuar con los diferentes elementos de la recta y comprobar sus variaciones. La recta viene dada en la forma

$$y = mx + b$$

El enlace es <https://www.geogebra.org/m/uy8tVZpw>

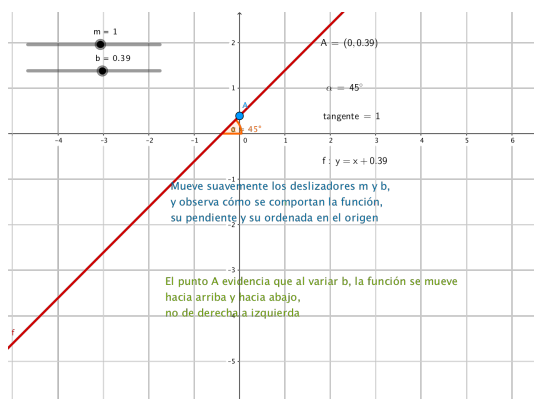


Figura 10: Recta en la forma $y=mx+b$

4. De forma similar, desde este informe en formato digital, se puede interactuar y comprobar las variaciones que experimenta la función lineal, construida ahora a partir de dos puntos dados.

El enlace es <https://www.geogebra.org/m/JaxD2EFU>

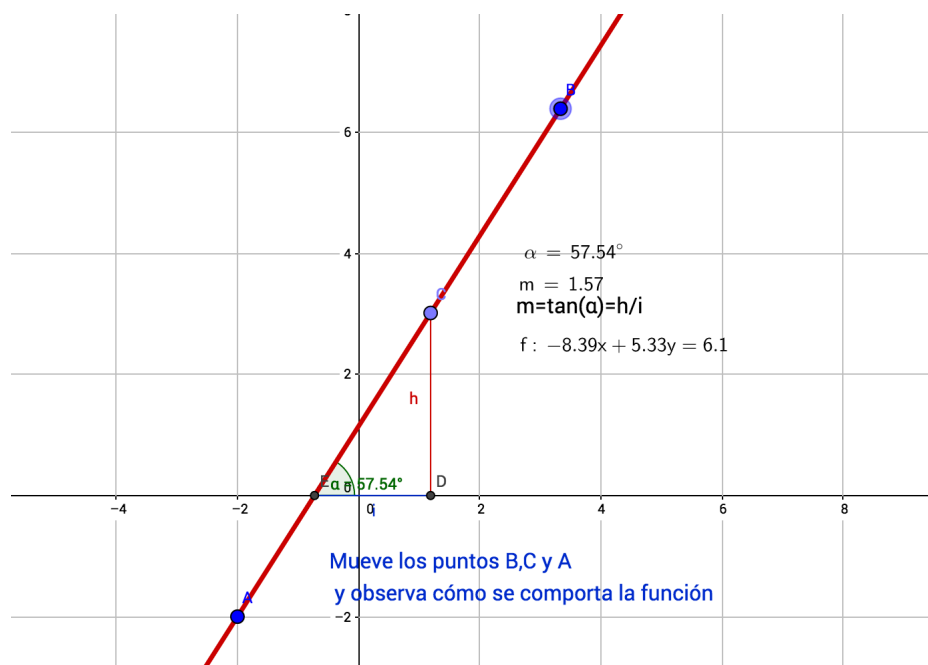


Figura 11: Función lineal a partir de dos puntos dados.

La función constante, que también puede ser considerada lineal, tiene como dominio el conjunto de los reales; su recorrido es la constante. En las demás funciones propiamente lineales, en donde la «pendiente» es diferente de cero, el dominio y el recorrido son el conjunto de los reales.

4.5.1.2 La función cuadrática y la parábola

La función cuadrática es una función polinómica, según la definición 3.7.5, en donde $a_n = a_{n-1} = \dots = a_3 = 0$. Por lo tanto, la función de segundo grado, también llamada cuadrática, queda así:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (4.5.5)$$

Haciendo $a_2 = a$, $a_1 = b$ y $a_0 = c$, esta función se escribe de esta manera:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.5.6)$$

La función cuadrática corresponde en realidad a una curva muy especial llamada «parábola».

1. Si se quiere una demostración de la afirmación anterior, se puede acceder, desde el formato digital de este informe, al video que se anuncia con la imagen siguiente, y mediante este enlace:

<https://youtu.be/ZKz9LugOfY0>

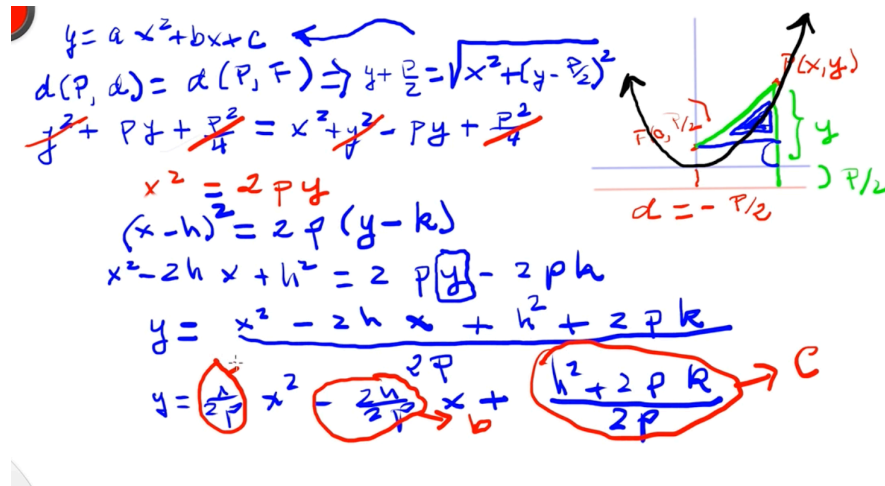


Figura 12: La parábola se escribe analíticamente como una función cuadrática.

La función cuadrática es una parábola, vertical u horizontal, aunque las parábolas horizontales o con otras posiciones respecto de los ejes cartesianos tienen otras ecuaciones. Pero todas son similares y, en realidad, las diferencias se reducen a cambios producidos por giros de los ejes de coordenadas.

Este estudio se debe reducir a las parábolas verticales, porque son funciones. Así que la atención se pondrá en la función escrita como en 4.5.6: $y = ax^2 + bx + c$.

Se puede, sin acudir a las herramientas que proporciona el cálculo diferencial, realizar un análisis de la función cuadrática, y calcular algunos de sus puntos y establecer sus características más importantes.

Se pueden hacer los «arreglos» siguientes:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (4.5.7)$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \quad (4.5.8)$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (4.5.9)$$

El valor de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ es una constante, de manera que el valor de la función depende, principalmente de $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Se pueden hacer las siguientes precisiones:

$$\text{Si } a > 0 \text{ y } a \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$$

la parábola se abre hacia arriba, y su valor mínimo se encuentra cuando

$$x = \frac{-b}{2a}$$

así que

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ese punto en el que la función cuadrática tiene el valor mínimo, y que se llama vértice de la parábola, tiene, por lo tanto las coordenadas:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

De forma similar:

$$\text{Si } a < 0 \text{ y } a \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$$

la parábola se abre hacia abajo, y su valor máximo se encuentra cuando

$$x = \frac{-b}{2a}$$

y por lo tanto el vértice tiene por coordenadas, de forma similar a la expresión correspondiente anterior:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Partiendo de la expresión 4.5.9, se pueden encontrar los valores de x para los cuales $y = 0$.

$$\text{Si } y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$\text{entonces } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que son los dos ceros de la función o dos raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

2. Si se quiere una explicación animada de lo anteriormente expuesto, desde el el formato digital de este informe, se puede acceder al video que comienza con la figura siguiente, mediante el enlace

<https://youtu.be/qnrPnbdnDhw>

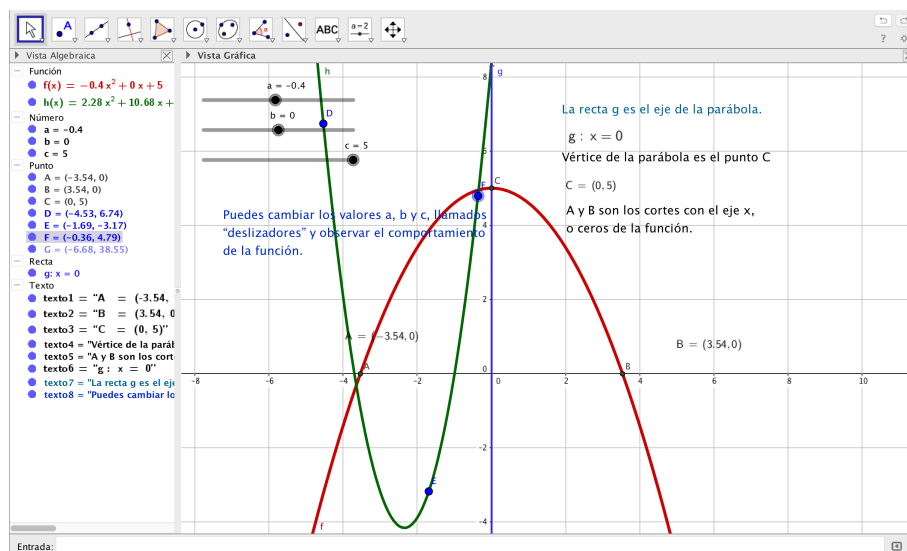


Figura 13: La parábola como función cuadrática

3. Igualmente, si se quisiera interactuar con la animación que contiene el libro electrónico, se puede utilizar el siguiente enlace, que comienza con la figura siguiente:

Enlace: <https://www.geogebra.org/m/ARsn8XXt>

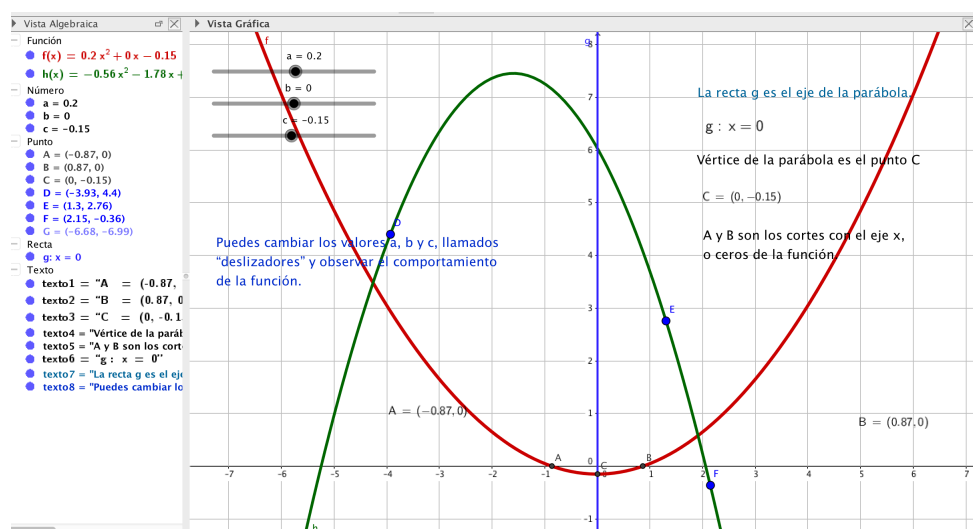


Figura 14: Interactuar con la función cuadrática animada.

El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los reales. El recorrido, sin embargo, admite dos casos:

1. Si $a > 0$, la función tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{2a}$, se abre hacia el infinito y por lo

tanto su recorrido o rango es

$$\text{Rang}(f) = (f(\frac{-b}{2a}), \infty) \quad (4.5.10)$$

2. Si $a < 0$, la función se abre hacia el infinito negativo, tiene un máximo en $\frac{-b}{2a}$, cuyo valor es $f(\frac{-b}{2a})$, y por lo tanto su recorrido o rango es

$$\text{Ran}(f) = (-\infty, f(\frac{-b}{2a})) \quad (4.5.11)$$

4.5.2 Funciones polinómicas de grado superior

4.5.2.1 Diferentes animaciones de la función polinómica de tercer grado

La función polinómica general, como se ha definido ya anteriormente, tiene la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Cuando $a_n = a_{n-1} = \dots = a_4 = 0$, esta función queda reducida como se muestra a continuación:

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

o más sencillamente se podría escribir así:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (4.5.12)$$

Se ponen a continuación algunos ejemplos concretos:

1. Utilizando el formato digital de este informe, se puede acceder a un video explicativo de la función de tercer grado, a partir de una expresión polinómica como se muestra en la figura.

Enlace: <https://youtu.be/yxnh01oqMRE>

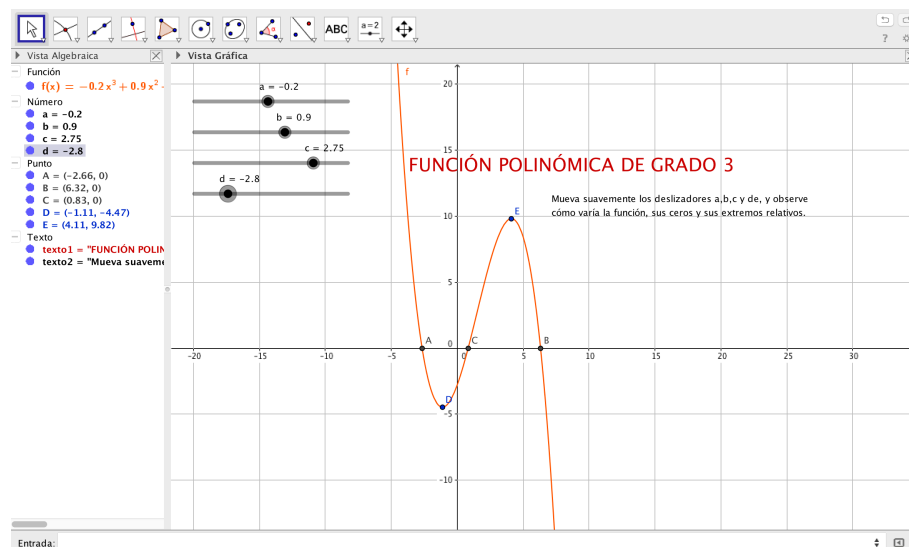


Figura 15: Función de tercer grado a partir de un polinomio.

2. Igualmente, se puede acceder a un video explicativo de la función de tercer grado, construida a partir de una serie de puntos dados, usando el enlace siguiente:

<https://youtu.be/KweNVOzYdZA>

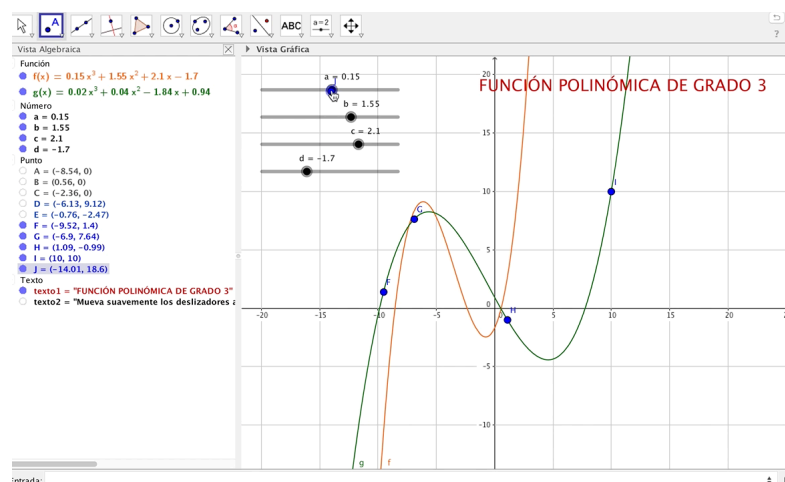


Figura 16: Función polinómica de tercer grado a partir de cuatro puntos dados.

3. Para poder interactuar con los diferentes elementos de la función de tercer grado que aparece en la figura, se puede utilizar el enlace siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/f4rtB6z6>

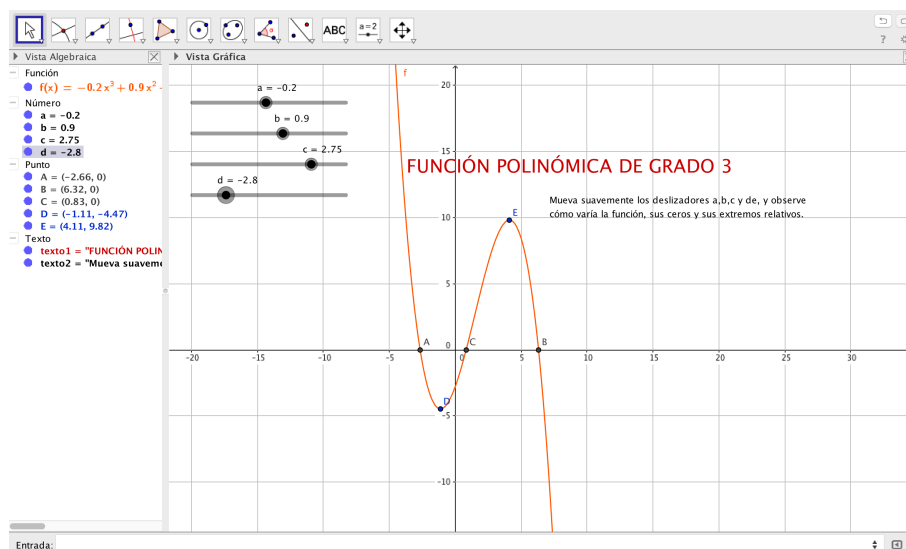


Figura 17: Función polinómica de tercer grado

4. Para poder interactuar con los diferentes elementos de la función de tercer grado que aparece en la figura, pero construida a partir de cuatro puntos dados, se puede utilizar el enlace siguiente. Se pueden mover los puntos de color azul y observar cómo se comporta la función:

<https://www.geogebra.org/m/qNnfb5ux>

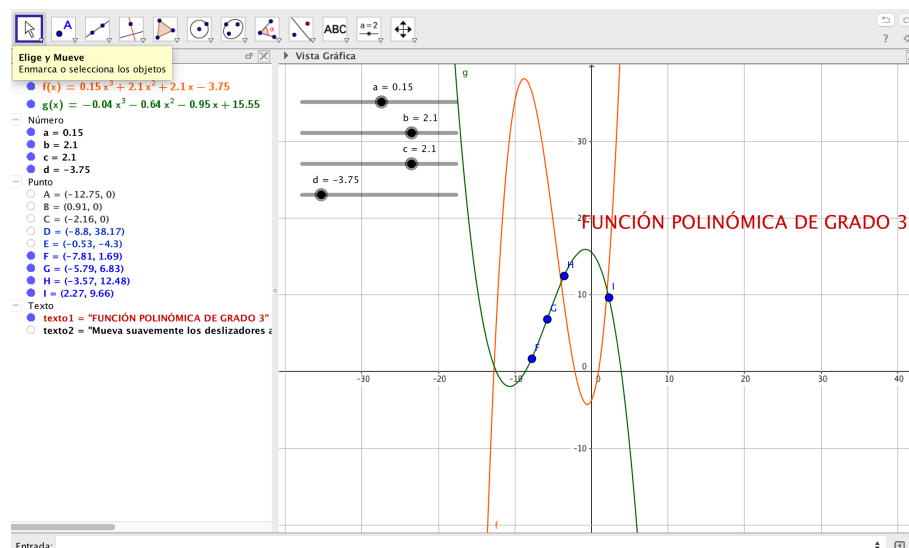


Figura 18: Función de tercer grado a partir de 4 puntos dados.

4.5.2.2 Función polinómica de cuarto grado

La función polinómica de cuarto grado tiene la forma siguiente, de manera similar a las anteriores funciones polinómicas de menor grado:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (4.5.13)$$

Si en dicha expresión, $b = d = 0$, se dice que la función es bicuadrada, y tiene la forma:

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e \quad (4.5.14)$$

A continuación se proponen varias gráficas de la función polinómica de cuarto grado. Se puede acceder a animaciones e interacciones con las mismas, utilizando los enlaces que constan antes de cada figura.

1. Función polinómica de cuarto grado, a partir de una determinada expresión polinómica:

Se puede acceder al video explicativo de la función, cuya gráfica aparece en la figura siguiente, utilizando el enlace

<https://youtu.be/tq06ZVz8L4c>

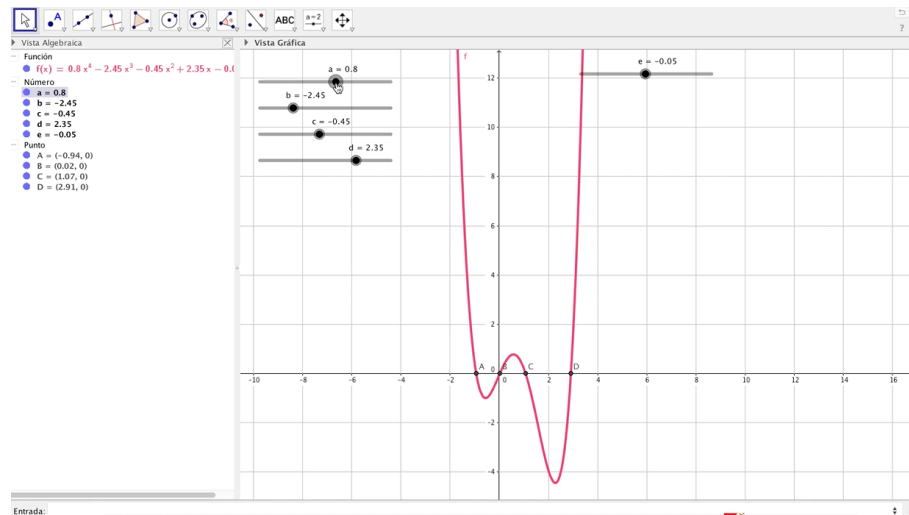


Figura 19: Función de cuarto grado a partir de un polinomio dado:

2. Función polinómica de cuarto grado a partir de una serie de puntos dados.

Enlace para acceder al video explicativo de la figura siguiente, desde este informe en su formato digital: <https://youtu.be/GkyjbsTBKdM>

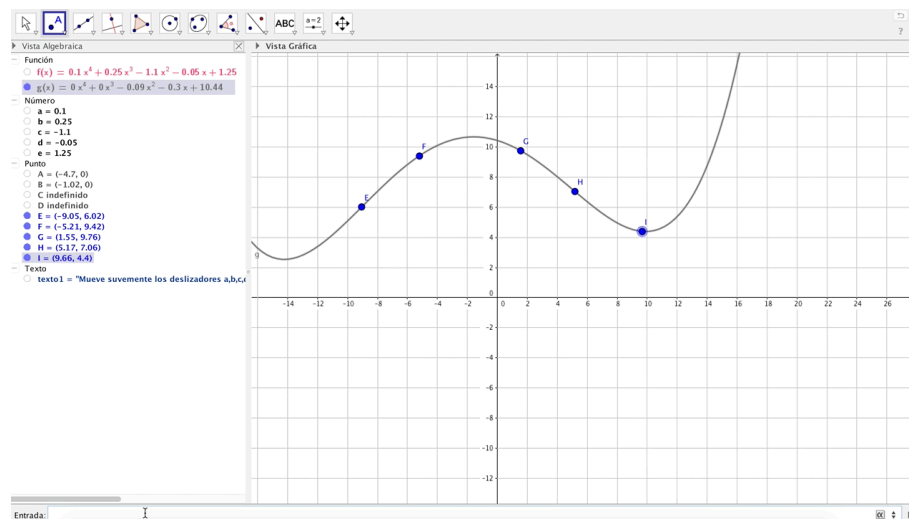


Figura 20: Función de cuarto grado a partir de una serie de puntos dados:

3. Si se quiere interactuar con una función de cuarto grado a partir de una expresión polinómica, se puede acudir al formato digital de este informe y utilizar el enlace siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/x6MENRNp>

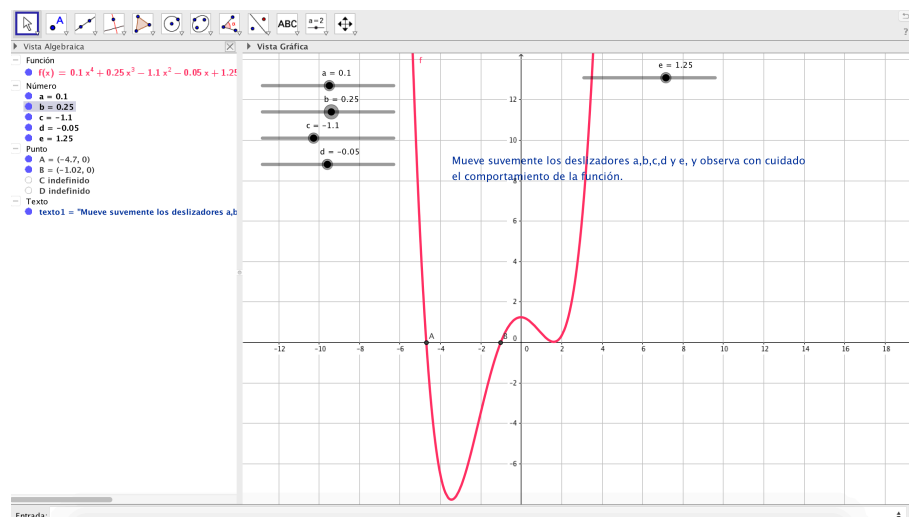


Figura 21: Función polinómica de cuarto grado a partir de una expresión polinómica.

4. Si se quisiera interactuar con una función polinómica de cuarto grado a partir de una serie de puntos dados, se puede acudir al formato digital de este informe y utilizar el enlace siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/xgM6qzZV>

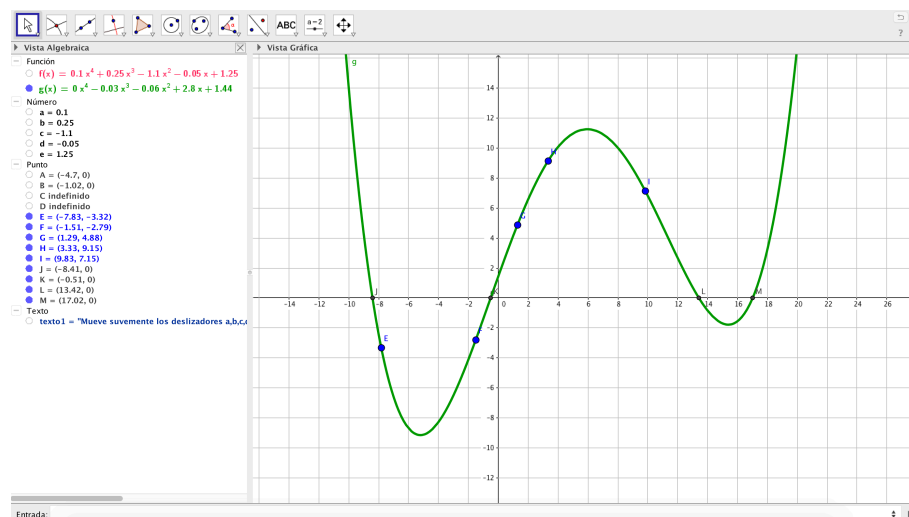


Figura 22: Función polinómica de cuarto grado a partir de cinco puntos dados.

4.5.2.3 Función polinómica de quinto grado

La función polinómica de 5º grado viene dada por un polinomio del mismo grado y tiene la forma siguiente:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \quad (4.5.15)$$

1. La figura siguiente corresponde a un función polinómica de quinto grado. Desde este informe, en su formato digital, se puede acceder a un video explicativo de la misma utilizando este enlace:

<https://youtu.be/PmawXuNnK5E>

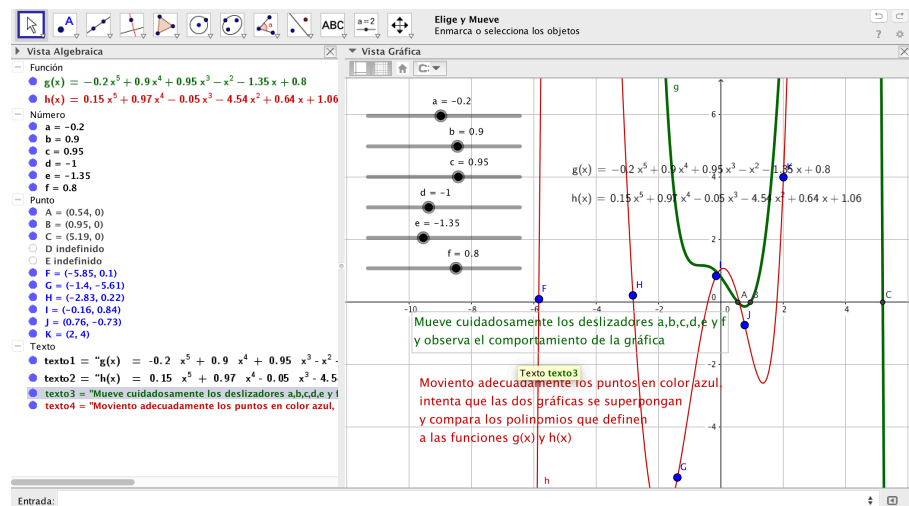


Figura 23: Video explicativo de la función polinómica de 3º grado.

2. La figura siguiente corresponde a una función polinómica de quinto grado. Se puede interactuar con la gráfica, se pueden modificar los coeficientes de la variable, se puede construir una función con una, tres o cinco raíces reales, etc., utilizando el enlace siguiente, desde este informe en su formato digital:

<https://www.geogebra.org/m/DnhwNxTx>

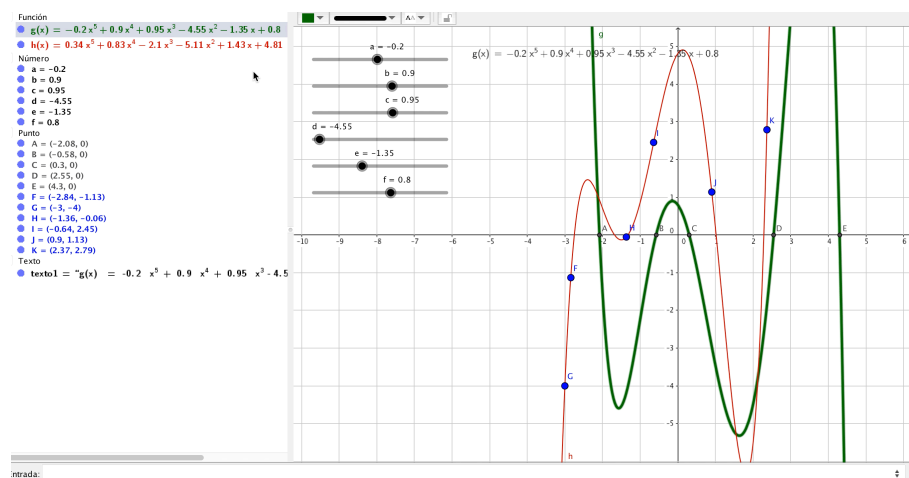


Figura 24: Interactuar con la función polinómica de 5º grado.

4.5.3 Funciones racionales

Definición:

Una función f se llama racional² si se puede escribir como cociente de dos funciones polinómicas, es decir:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (4.5.16)$$

en donde el grado de $Q(x) \geq 1$. De otra manera, si el grado de $Q(x) = 0$, entonces el denominador sería en realidad un número real, y por lo tanto, $f(x)$ se reduciría a una función polinómica³.

Dominio:

El dominio de una función racional ya no es, como en las funciones polinómicas, todo el conjunto de los reales. Si $Q(x) = 0$, la función no existe. Habrá, en consecuencia, que excluir de su dominio los números reales que son raíces de la ecuación $Q(x) = 0$.

Ejemplo:

Sea la función

$$f(x) = \frac{3}{x-1} \quad (4.5.17)$$

Su gráfica es:

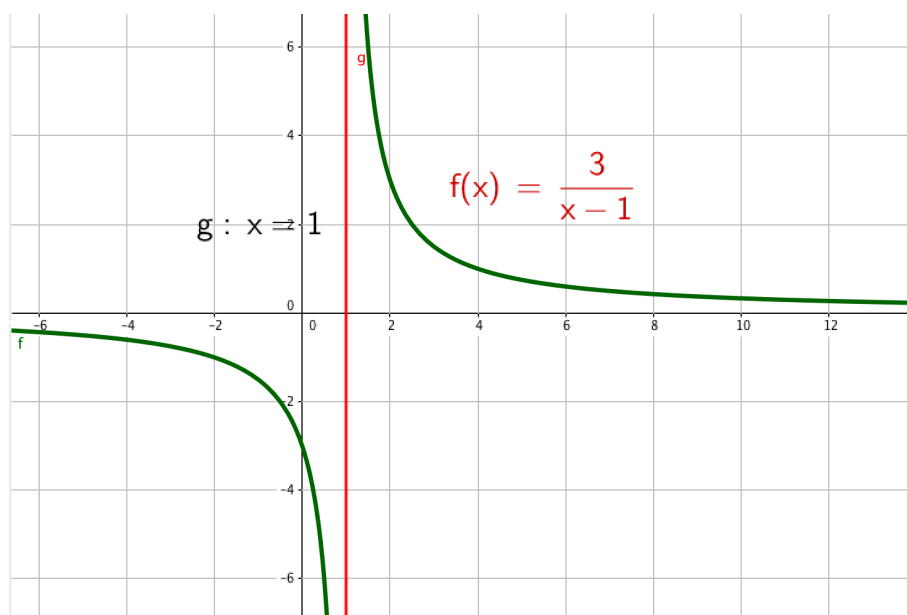


Figura 25: Primer ejemplo de función racional

²Para una ampliación de este concepto, consultar [8], pág. 220 y ss.

³Ver pág. 220.

El dominio de la función $f(x) = \frac{3}{x-1}$ es $\mathbb{R}-\{1\}$, pues si $x = 1$ el denominador se hace cero y $f(1)$ no existe.

El rango de f , sin embargo, es $Rng(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Las funciones polinómicas son continuas en todo el conjunto de los reales. Las funciones racionales pueden tener «saltos», puntos o intervalos en los que la función no existe. Entonces se dice que la función no es continua.

El concepto formal de continuidad exige un estudio detallado de la teoría de límites que no se pretende en este trabajo. Pero intuitivamente podemos darnos cuenta de que cuando $x = 1$, la función «sufre» un cambio brusco: pasa de $-\infty$ a $+\infty$.

Hay dos rectas importantes que conviene señalar en la gráfica anterior y que se llaman «asíntotas».

La recta $y = 0$: Cuando $x \rightarrow -\infty$, entonces $y \rightarrow 0^-$. Es decir, que se acerca a cero con valores negativos tan próximos como se quiera, haciendo x convenientemente pequeña (que tienda a menos infinito). Si $x \rightarrow \infty$, entonces $y \rightarrow 0^+$, con valores positivos tan próximos a cero como se quiera, haciendo x convenientemente grande. Se dice entonces que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{3}{x-1}$.

De otra forma:

$$\frac{3}{-\infty - 1} \rightarrow 0^-$$

$$\frac{3}{\infty - 1} \rightarrow 0^+$$

Y se dice que $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$.

La recta $x = 1$: Cuando $x \rightarrow 1^-$, es decir, que x se acerca a 1 con valores menores que 1 pero tan próximos a 1 como se quiera (excluido el 1), entonces $y \rightarrow -\infty$; si $x \rightarrow 1^+$, es decir, que x tiende a 1 por la derecha con valores mayores que 1, pero tan próximos a 1 como se quiera (excluido el 1), entonces $y \rightarrow \infty$. Se dice entonces que la función $f(x) = \frac{3}{x-1}$ tiene una asíntota vertical en la recta $x = 1$.

La parte de la curva que se acerca a la recta llamada asíntota recibe el nombre de «rama asíntótica» o simplemente «rama».

De otra forma:

$$f(1^-) = \frac{3}{1^- - 1} = \frac{3}{0^-} \rightarrow -\infty$$

$$f(1^+) = \frac{3}{1^+ - 1} = \frac{3}{0^+} \rightarrow \infty$$

Y se dice que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en la recta $x = 1$. La parte de la curva que se acerca a la recta vertical, igualmente, recibe el nombre de rama asíntótica o simplemente rama.

4.5.3.1 Funciones racionales con asíntotas verticales

Sea una función racional de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Pueden existir asíntotas verticales en los valores de x tales que $Q(x) = 0$, aunque no siempre⁴. Se pueden considerar algunos ejemplos y estudiarlos dinámicamente:

Ejemplo 1. Sea la función:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \quad (4.5.18)$$

Obsérvese que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Así que cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $y \rightarrow 0$. Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Interesan sin embargo, en este apartado, las asíntotas verticales.

Si el denominador de la función se hace cero, entonces:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ o } x = -2$$

La función tiene dos asíntotas verticales: $x = 2$ y $x = -2$.

Si se quiere una explicación animada de este ejemplo, se puede acceder, desde el formato digital de este informe, al video correspondiente mediante el enlace

<https://youtu.be/Xmqh3Zged3A>

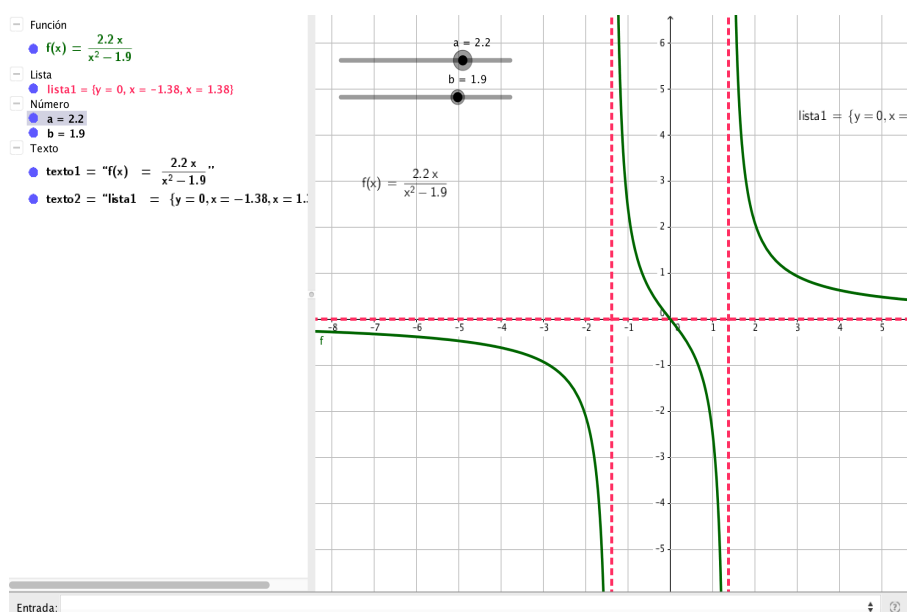


Figura 26: Función racional con asíntotas verticales. Es mayor el grado del denominador.

⁴Para estudiar con más detalle las asíntotas de funciones racionales, ver[14], pág.26 y 27.

Si se quisiera interactuar con los diferentes elementos que permiten estudiar la función anterior de forma animada, se puede usar el enlace siguiente, desde el formato digital de este informe.

<https://www.geogebra.org/m/Hur4wpdW>

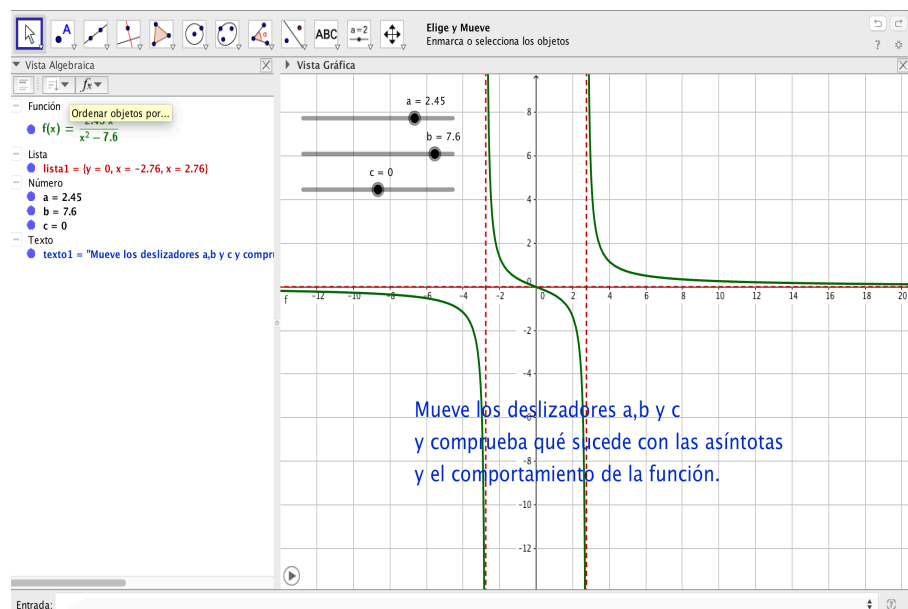


Figura 27: Función racional con asíntotas verticales.

En el caso de la función anterior se pueden determinar fácilmente el dominio y el rango:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

$$\text{Rng}(f) = (-\infty, \infty)$$

Si se cambian las constantes 2 y 4 (como se muestra de forma animada en el video del formato digital de este informe) , puede resultar una gráfica sin asíntotas verticales, aunque siempre tendrá una asíntota horizontal ⁵.

Ejemplo 2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 - 4x + 3} \quad (4.5.19)$$

El grado del numerador es igual que el grado del denominador. Así que cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $y \rightarrow 2$. Por tanto, $y = 2$ es una asíntota horizontal.

⁵Se pueden encontrar numerosos ejemplos en [6], pág. 238-244.

Esta conclusión se puede entender más fácilmente si la misma función se escribe, por factorización de los polinomios del numerador y del denominador, de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \quad (4.5.20)$$

La función no está definida en $x = 1$ ni en $x = 3$. Así que en todos los valores diferentes de 3, se puede escribir que

$$f(x) = \frac{2(x-2)}{x-1},$$

y tomando valores de x tan grandes o pequeños como se quiera, sin necesidad de acudir al cálculo de límites, intuitivamente, se puede ver que $f(x)$ se acerca a 2. Es decir, que si $x \rightarrow \pm\infty$, entonces $f(x) \rightarrow 2$. Por lo tanto tiene una asíntota horizontal en $f(x) = y = 2$.

Interesa, sin embargo, en este apartado, estudiar las asíntotas verticales, es decir, aquellos valores de x que hacen que el denominador valga 0. Entonces, aparentemente, habría dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 3$. Pero la función tiene una particularidad en $x = 3$ que impide que tenga asíntota vertical en ese valor.

En $x = 3$ la función no existe porque el denominador se hace cero, pero si se consideran valores tan próximos a 3 como se desee, se tiene que

$$f(3^-) = \frac{2(3^- - 2)}{3^- - 1} = \frac{2(1^-)}{2^-} \rightarrow 1,$$

y además

$$f(3^+) = \frac{2(3^+ - 2)}{3^+ - 1} = \frac{2(1^+)}{2^+} \rightarrow 1,$$

Lo cual quiere decir que si x se aproxima convenientemente a 3, por la derecha (3^+) o por la izquierda (3^-), la función se acerca a 1 tanto como se quiera. Se dice entonces que la función tiene en $x = 3$ un punto de discontinuidad (un hueco), pero no tiene una asíntota vertical aunque el denominador valga cero. Más precisamente se debería decir que el límite de la función es 1 cuando x tiende a 3, aunque en ese punto la función no existe. Utilizando la simbología de la teoría de límites se escribiría así:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-2)}{x-1} = \frac{2(3-2)}{3-1} = 1 \quad (4.5.21)$$

o sea que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1.$$

La función no existe en $x = 3$, tampoco tiene asíntota en ese punto, pero tiene límite y vale 1, es decir que se acerca a 1 tanto como se quiera, acercando x convenientemente a 3.

El dominio de la función, simplemente observando su gráfica, figura 28, es:

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty).$$

Su recorrido, de forma similar, es:

$$\text{Rang}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty).$$

Se puede estudiar este caso de forma dinámica, si se utiliza, desde el formato digital de este informe, el enlace siguiente:

<https://youtu.be/9MPrm7AG5qg>

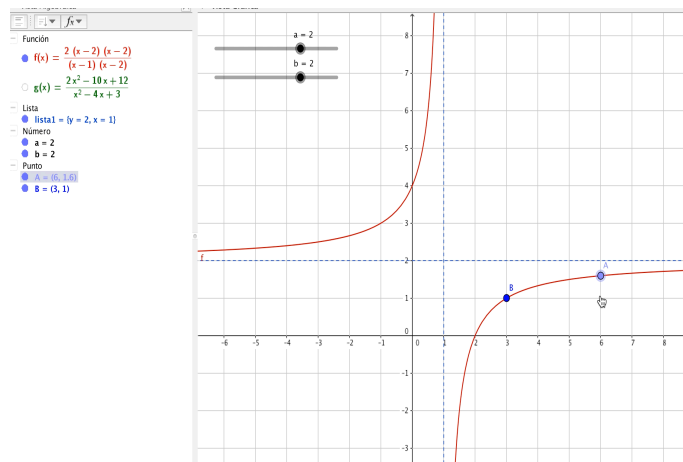


Figura 28: Función racional con discontinuidad.

Se puede interactuar dinámicamente con los diferentes elementos de la gráfica de la función siguiente, usando el enlace que corresponde desde el formato digital de este informe.

<https://www.geogebra.org/m/wQdbT8wp>

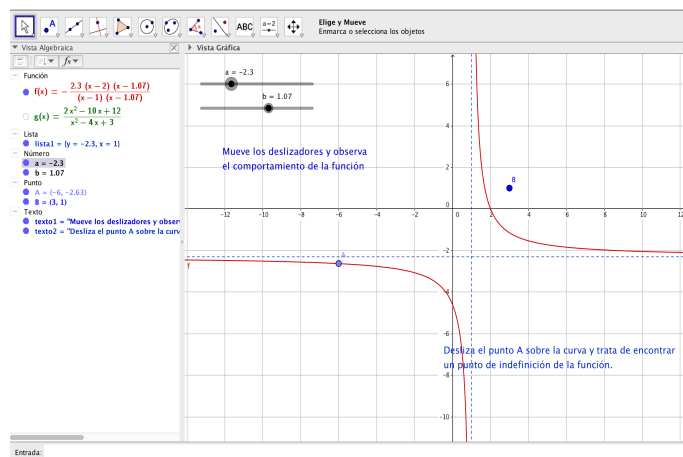


Figura 29: Función con puntos de discontinuidad

4.5.3.2 Funciones racionales con asíntotas oblicuas

Ejemplo 1. Cuando en una función racional el grado del numerador es igual al grado del denominador más 1, hay una asíntota oblicua, además de las asíntotas verticales que pueda tener⁶.

Sea la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} \quad (4.5.22)$$

Claramente, se puede estudiar mejor la función, sin necesidad de realizar un análisis exhaustivo de la misma, si se la escribe de otra manera:

$$f(x) = \frac{x^2(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} \quad (4.5.23)$$

Una primera conclusión es que tiene dos asíntotas verticales, a saber, $x = 1$ y $x = -1$. Su dominio, claramente es el conjunto de los reales excepto el -1 y el 1.

Su grafica es la de la figura que sigue:

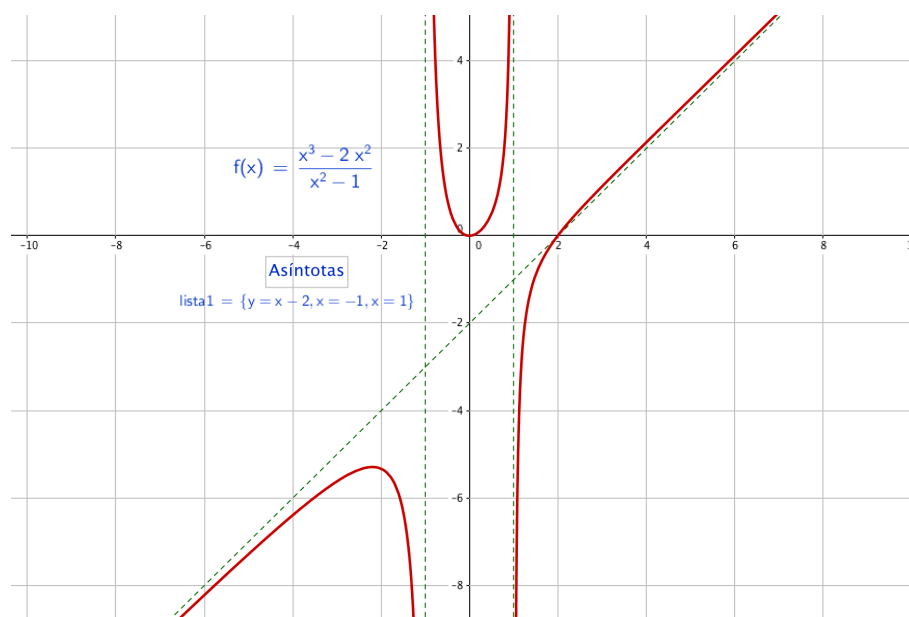


Figura 30: Gráfica de la función 4.5.22, con asíntota oblicua.

Se observa que si x tiende a más o menos infinito, la función no tiene límite, es decir, no se aproxima a ningún número real sino que tiende también al infinito. No tiene, por tanto, asíntota horizontal. Si se escribe esto más formalmente, quedaría así:

⁶Se pueden encontrar numerosos ejemplos en [11], pág. 312 y ss.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 - \frac{2}{x})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

y de forma similar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - \frac{2}{x})}{(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

Así que no existen asíntotas horizontales. Pero existe una asíntota oblicua de la forma $y = mx + b$, si se pueden encontrar los valores m y b , que se pueden calcular así:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x(x^2 - 1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1.x) = -2$$

La asíntota oblicua, por lo tanto, es

$$y = x - 2$$

Otra forma de calcular esta asíntota puede hacerse presentando la función original como el resultado de una división de los dos polinomios:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 1} = (x - 2) + \frac{(x - 2)}{x^2 - 1},$$

Y el resultado es el mismo: una asíntota oblicua en $y = x - 2$.

En el video al que se puede acceder desde el formato digital de este informe se explican más detalles de este caso de funciones racionales que tienen asíntotas oblicuas.

El enlace es

<https://youtu.be/RyJkP6fev-U>

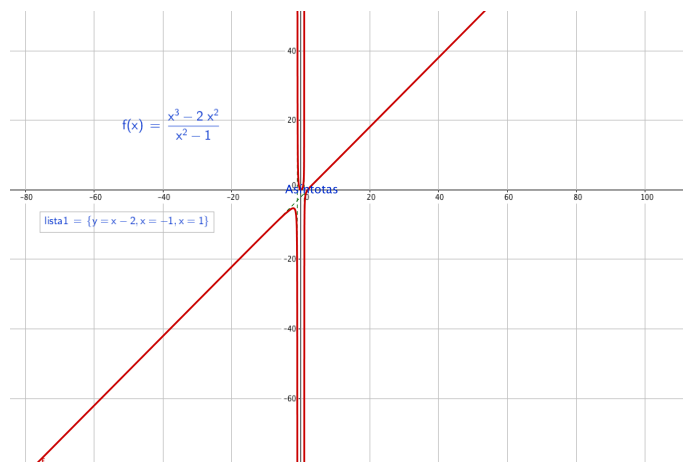


Figura 31: Función con asíntotas oblicuas.

Si se quisiera interactuar con la gráfica de la figura siguiente, y comprobar especialmente cómo se comportan sus asíntotas, se puede utilizar el enlace correspondiente desde este informe en su formato digital:

<https://www.geogebra.org/m/QspWdQ63>

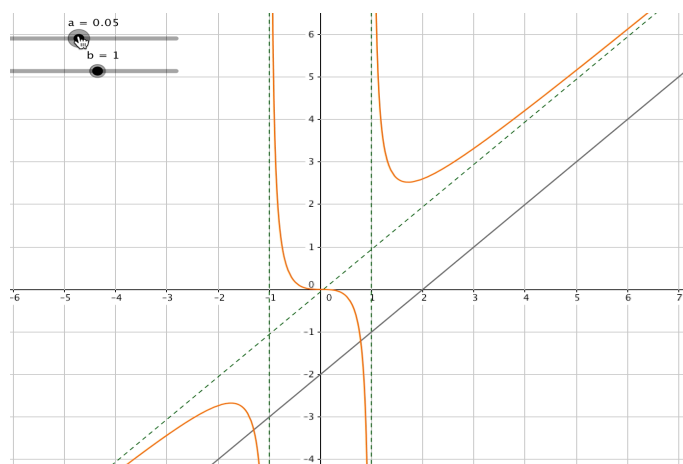


Figura 32: Función racional con asíntotas verticales y oblicuas.

Ejemplo 2. Se estudian a continuación varios ejemplos de funciones racionales que tienen una asíntota vertical y una asíntota oblicua. Sin embargo, se puede dar el caso de que para algún valor de x , el denominador valga cero y sin embargo no exista la asíntota que a primera vista podría suponerse. Se hace necesario un análisis más detallado de algunos casos:

1. Estudio de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3} \quad (4.5.24)$$

Esta función no tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xx}{x(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1 - \frac{3}{x})} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xx}{x(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(1 - \frac{3}{x})} = \frac{-\infty}{0} = -\infty$$

Asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^+} = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

por lo tanto, la asíntota vertical es

$$x = 3$$

Asíntota oblicua⁷:

Si existe, tiene la forma

$$y = mx + b$$

en donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2(1 - \frac{3}{x})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = 1$$

y además

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} = 3,$$

así que la asíntota oblicua encontrada es

$$y = x + 3$$

Para entender mejor la existencia y el cálculo de las asíntotas oblicuas, se puede acceder, desde el formato digital de este informe, al video que corresponde al siguiente enlace:
<https://www.youtube.com/watch?v=2GjUxSYd-W0>

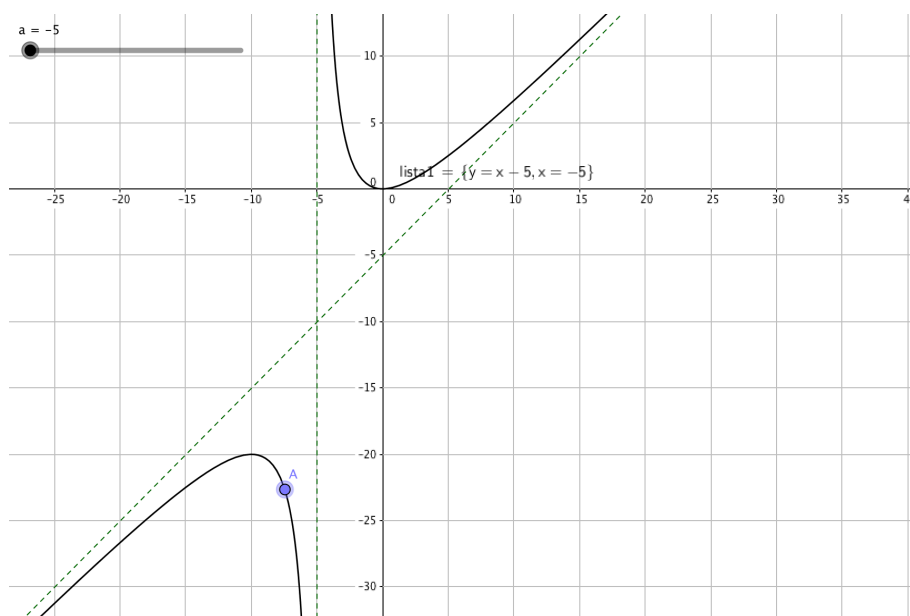


Figura 33: Función racional con asíntotas vertical y oblicua, sin hueco

Y si se quisiera interactuar con la figura siguiente, en la que aparecen asíntotas oblicuas, se puede usar el enlace

<https://www.geogebra.org/m/R6bWse59>

⁷Para el cálculo de asíntotas oblicuas, consultar [9], pág 231 y ss.

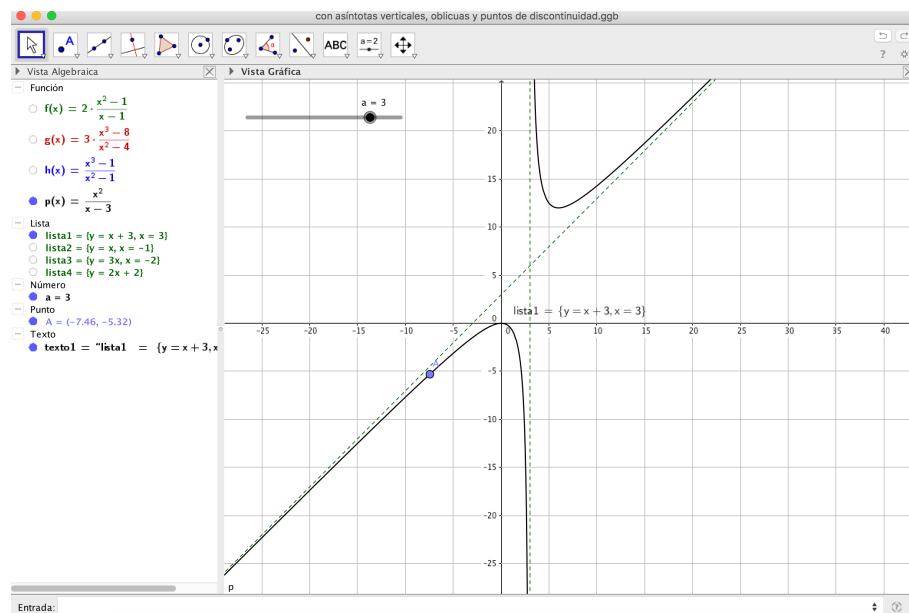


Figura 34: Función racional con asíntotas vertical y oblicua, sin "hueco".

2. Estudio de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

Asíntota horizontal:

No tiene asíntota horizontal, pues con un procedimiento similar al utilizado para la función anterior, se puede calcular fácilmente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \infty,$$

y además

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(1 - \frac{1}{x^3})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x^3})}{1 - \frac{1}{x^2}} = -\infty,$$

Asíntota vertical:

Para mejor estudiar este detalle, se puede escribir la misma función así:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

El denominador se hace cero cuando $x = -1$ o cuando $x = 1$. Pero si se estudia el comportamiento de la función en el entorno de esos dos puntos, se llega a la conclusión de que solamente en uno de ellos hay una asíntota vertical, que es $x = -1$. En $x = 1$, la función no tiene una asíntota, sino un punto de discontinuidad. En términos coloquiales podríamos decir que tiene un salto o un «hueco».

Véase lo que resulta del estudio del entorno de esos dos puntos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{3}{2},$$

y se puede decir que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2}$$

Así que la función no existe en $x = 1$, no tiende a $-\infty$ ni a $+\infty$, es decir, no tiene ramas ni asíntotas verticales. Sin embargo, en ese punto, $x = 1$, la función tiene límite, y vale $\frac{3}{2}$. La función puede no existir en un punto -ese punto no pertenece a su dominio- y sin embargo sí tiene límite en $x = 1$ (se acerca tanto a $\frac{3}{2}$ como se quiera, haciendo que la variable x tome valores tan próximos a 1 como se necesite).

En $x = -1$, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

y por lo tanto, se puede concluir que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en

$$x = -1$$

Asíntota oblicua.

Si existe una asíntota oblicua, ésta deberá tener la forma

$$y = mx + b,$$

en donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x})} = 1,$$

y

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x+1} - x \right)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

Por lo tanto, la función tiene una asíntota oblicua de la forma

$$y = x.$$

Ésta y otras funciones similares pueden ser estudiadas de forma dinámica si, desde este informe en su formato digital, se accede al video que corresponde al siguiente enlace:
<https://youtu.be/4j7kXmpDKxw>

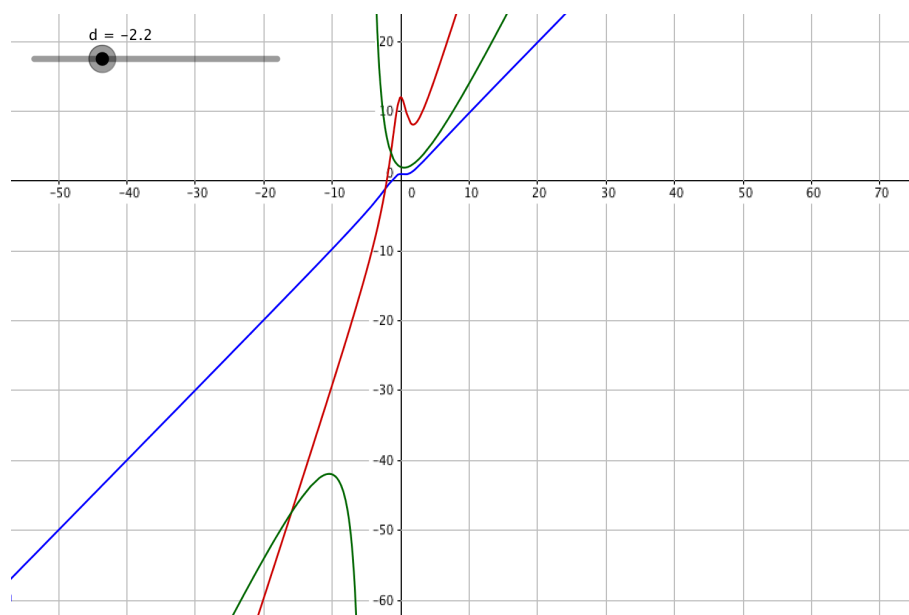


Figura 35: Función racional con asíntotas vertical, oblicua y punto de discontinuidad.

Ejemplo 3 Existen funciones racionales que solamente tienen asíntotas oblicuas. Esto sucede cuando el grado del numerador es igual al grado del denominador más 1 y, además, el denominador nunca se hace cero.

Estudio de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{0^-} = -\infty,$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{0^+} = \infty.$$

Por lo tanto, no existe una asíntota horizontal.

Asíntota vertical:

En el conjunto de los números reales, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Es decir, el denominador nunca se hará cero; y entonces la función no puede tener ramas que se acerquen verticalmente a una recta que llamamos asíntota vertical. Dicho de una manera más formal: no existe ningún $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \pm\infty,$$

y por lo tanto, la función

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}.$$

no tiene asíntotas verticales.

Asíntota oblicua:

Si existe, debe tener la forma

$$y = mx + b$$

en donde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2,$$

y además

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2 + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^2 + 1} \right) = 0.$$

Se llega entonces a la conclusión de que existe una asíntota oblicua que tiene la forma

$$y = 2x.$$

Con más detalle, se puede estudiar esta función, de forma dinámica, utilizando el siguiente enlace:

https://youtu.be/lChnnut_Jco

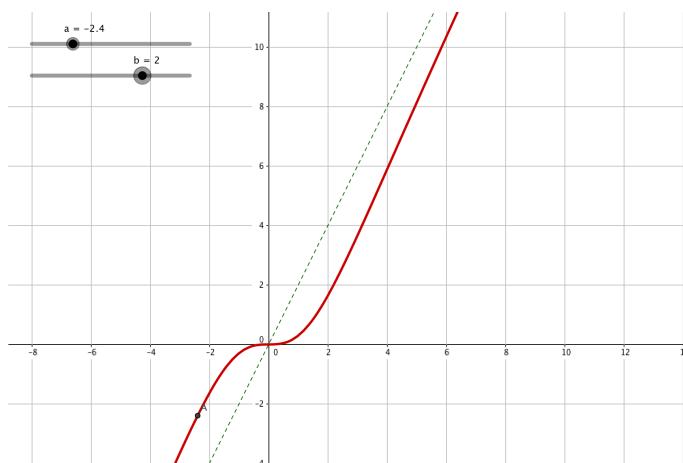


Figura 36: Función racional sin asíntotas verticales ni horizontales.

4.5.4 Funciones radicales

Definición[8, pág. 222]:

Una función f se llama radical o irracional si la variable independiente aparece bajo un signo radical.

Algunos ejemplos son⁸:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} \\f(x) &= \sqrt{x^2 - 7x + 10} \\f(x) &= \sqrt[3]{x} \\f(x) &= \frac{1 + \sqrt[3]{x^2}}{x^2 + 1} \\f(x) &= \sqrt{16 - x^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 1: estudio de la función⁹

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}} \quad (4.5.25)$$

Para calcular el dominio de funciones irracionales de índice par se impone la condición de que los radicandos sean positivos. Si, además, en la función aparecen fracciones, es necesario excluir del dominio los valores de x en los que el denominador se anula[8], pág. 222.

En las funciones radicales, el comportamiento en el infinito y las asíntotas, si las hay, se obtienen calculando los límites correspondientes.

Se estudia a continuación la función 4.5.25:

Dominio. Se debe cumplir que

$$\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1} \geq 0,$$

en donde los valores $x = -1$ y $x = 1$ deben ser excluidos del dominio de la función puesto que el denominador se haría cero.

Por lo tanto

⁸Se pueden encontrar numerosos ejemplos en [6], pág. 254 y ss.

⁹Este ejemplo está tomado de [8], pág. 222, y se desarrolla de un modo un poco diferente.

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 4)(x^2 + 4)(x - 1)(x + 1) &\geq 0 \\
 x^2 + 4 &\geq 0 \\
 (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Se puede resolver esta inecuación analíticamente, pero si se prefiere una forma gráfica de resolverla, se puede utilizar el enlace siguiente desde el formato digital de este informe:
<https://youtu.be/a5qVb6cwChk>

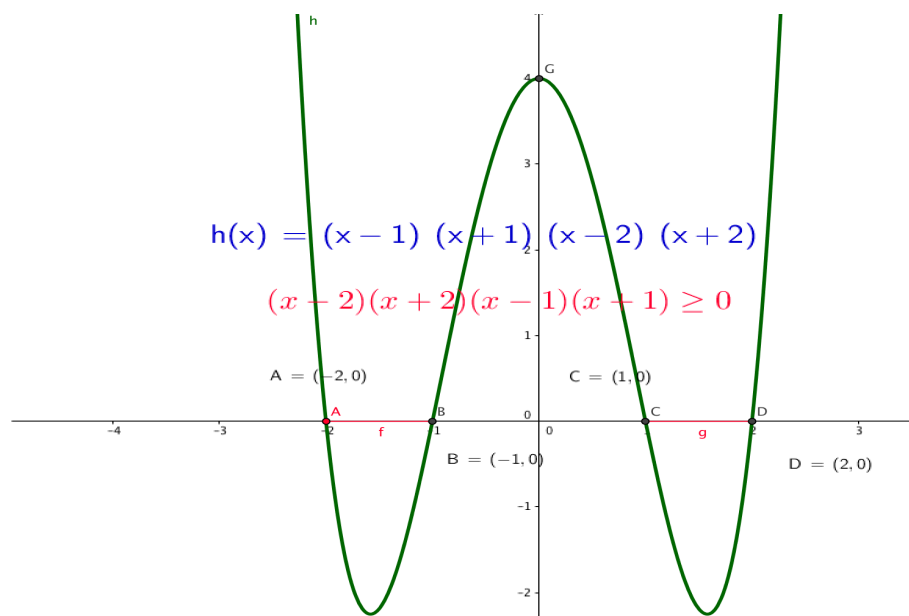


Figura 37: Solución de la inecuación.

Con lo cual, se tiene que

$$D(f) = (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, \infty)$$

Asíntotas horizontales: No tiene, puesto que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1} = \infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 1} = \infty$$

Asíntotas verticales: Las posibles asíntotas verticales pueden encontrarse en $x = 1$ y en $x = -1$.

Se calcula el límite en esos dos puntos, aunque la función no existe en ellos.

En $x = -1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-1}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4-16}{x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4(1-\frac{16}{x^4})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^4})}{(1-\frac{1}{x^2})}} = \sqrt{\frac{-15}{1-1^-}} = \sqrt{\frac{-15}{0^+}} = \sqrt{-\infty}.\end{aligned}$$

Este límite lateral no se puede calcular, puesto que a la izquierda de $x = -1$, la función no existe, como se vio en el cálculo del dominio de la misma.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-1}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4-16}{x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^4(1-\frac{16}{x^4})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^4})}{(1-\frac{1}{x^2})}} = \sqrt{\frac{-15}{1-1^+}} = \sqrt{\frac{-15}{0^-}} = +\infty.\end{aligned}$$

Hay, por tanto, una asíntota vertical en $x = -1$.

En $x = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-1}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4-16}{x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4(1-\frac{16}{x^4})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^4})}{(1-\frac{1}{x^2})}} = \\ &= \sqrt{\frac{-15}{1-1^+}} = \sqrt{\frac{-15}{0^-}} = \sqrt{+\infty} = +\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-1}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4-16}{x^2-1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4(1-\frac{16}{x^4})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(1-\frac{16}{x^4})}{(1-\frac{1}{x^2})}} = \\ &= \sqrt{\frac{-15}{1-1^-}} = \sqrt{\frac{-15}{0^+}} = \sqrt{-\infty}.\end{aligned}$$

Este último límite no existe, porque la función no existe desde uno por la derecha, hasta 2. No es posible «acercarse» a 1 por la derecha porque la función no existe en ese intervalo.

Hay, por tanto, otra asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntotas oblicuas: Si existen asíntotas oblicuas, tienen la forma

$$y = mx + b$$

y se pueden calcular así:

Si $x \rightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^4-16}{x^4-x^2}} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}} - x} =$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4 - 16 - x^4 + x^2}{x^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x^2(x^2 - \frac{16}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}} - x} = \frac{1}{\infty - (-\infty)} = 0.$$

En consecuencia, existe una primera asíntota oblicua que es

$$y = -x.$$

Si $x \rightarrow \infty$, el cálculo es similar al anterior, y se tiene que

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^4 - x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^4 - 16}{x^2 - 1}} + x} =$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4 - 16 - x^4 + x^2}{x^2 - 1}}{\sqrt{\frac{x^2(x^2 - \frac{16}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}} + x} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0.$$

Existe, entonces, una segunda asíntota oblicua que es

$$y = x$$

Se puede acceder a los gráficos que corresponden a los cálculos anteriores, si se utiliza el enlace siguiente desde el formato digital de este informe.

<https://youtu.be/chMvvvaCjZs>

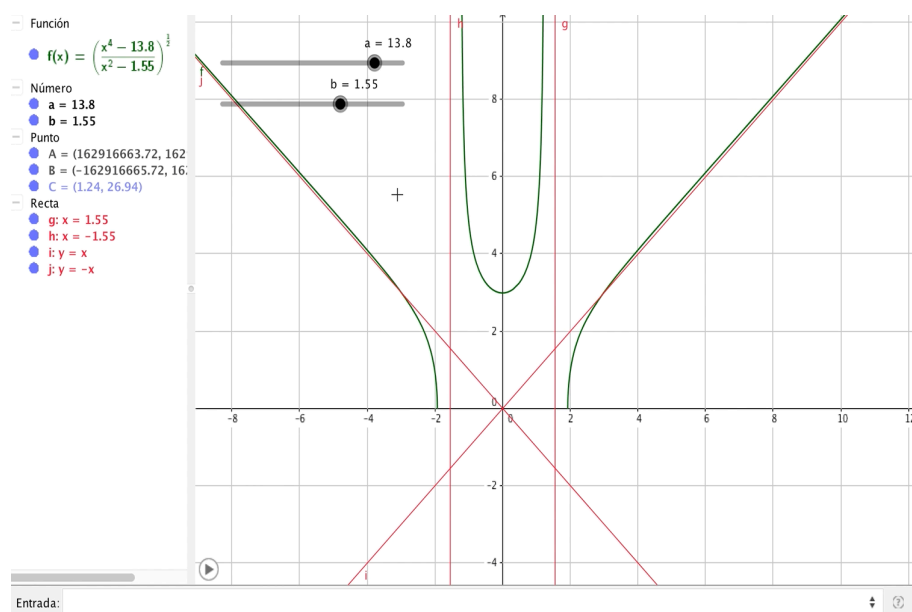


Figura 38: Función irracional con asíntotas verticales y oblicuas.

A partir de la gráfica elaborada, se puede concluir que el rango de la función es:

$$Rng(f) = (0, \infty)$$

Si se quisiera interactuar dinámicamente con los diferentes elementos de la gráfica de la función que se está estudiando, se puede usar, desde el formato digital del informe, el enlace siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/QrDCBhTq>

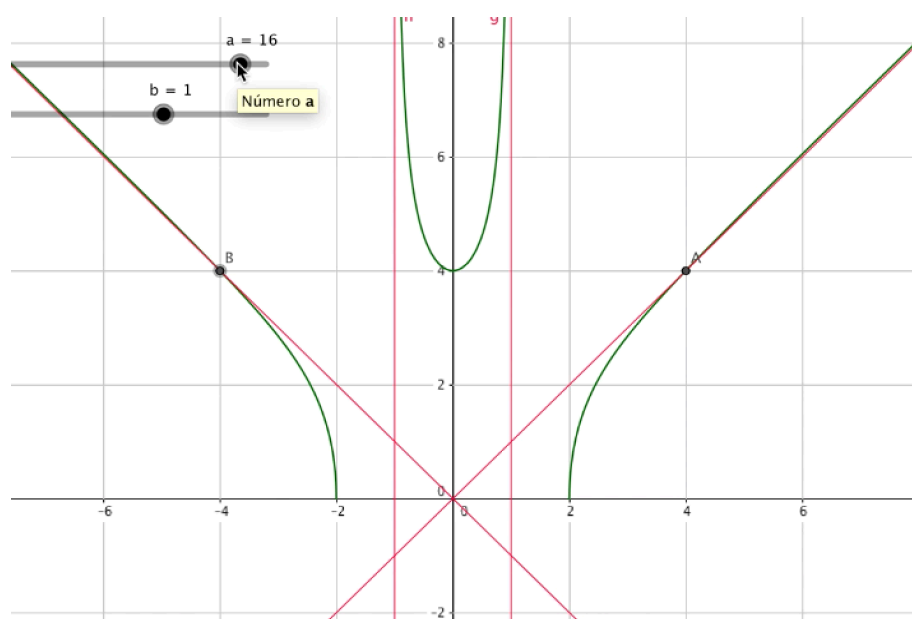


Figura 39: Función irracional con asíntotas verticales y oblicuas.

4.6 Funciones trascendentes

Un número trascendente es un número que no es algebraico, es decir, no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales.

Una clasificación más precisa de la que se estudia en bachillerato de los números reales, es ésta:

$$\text{Reales} \begin{cases} \text{Racionales} & \frac{1}{4}, -5, \frac{-21}{7}, \dots \\ \text{Irracionales} & \begin{cases} \text{Algebraicos} & \sqrt{2}, \sqrt[5]{-33}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \dots \\ \text{Trascendentes} & \pi, e, 2^{\sqrt{2}}, \dots \end{cases} \end{cases}$$

La demostración de si un número es trascendente o no, no es nada trivial.

Así como un número trascendente "no es algebraico", una función trascendente también es "no algebraica". Más formalmente, una función trascendente es una función que no se puede construir con un número finito de pasos a partir de las funciones algebraicas y sus inversas, por ejemplo la función $f(x) = \text{sen}(x)$ ¹⁰.

4.6.1 Función exponencial

Como ya se expuso en 3.7.15, la función exponencial, en su forma más general se define así:

$$f(x) = ka^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad k \in \mathbb{R}$$

Las restricciones $a > 0$ y $a \neq 1$ tienen una clara razón de ser¹¹:

Si $a = 1$ estaríamos ante el caso, en realidad, de una función constante. Si $a < 0$, el conjunto de puntos en el plano a los que podríamos llamar «huecos» o puntos de discontinuidad, sería infinito. Carecería de sentido y de interés. Por ejemplo, si $a = -2$, no existiría la función en $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \text{etc.}$

La función exponencial «natural» es aquella en la que $k = 1$ y $a = e$:

$$f(x) = e^x,$$

en donde

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}, \quad n \rightarrow \infty$$

Las funciones exponenciales describen fenómenos de crecimiento y decrecimiento como, por ejemplo, el crecimiento de las poblaciones, el de la masa arbórea de un bosque, la desintegración radiactiva, etc.

¹⁰Para precisar la noción de número y función trascendentes se puede consultar <http://www.matmor.unam.mx/~euba/irra.pdf>.

¹¹Se puede encontrar un estudio muy detallado de la función exponencial en: [6, 10, 7, 12, 13, 4].

En la gráfica siguiente se muestran los diferentes tipos de funciones exponenciales que se pueden presentar. Si se quisiera una explicación dinámica de estos diferentes tipos de funciones, se debería acudir al enlace siguiente, desde el formato digital de este informe:

<https://youtu.be/Gfjj2yipCnk>

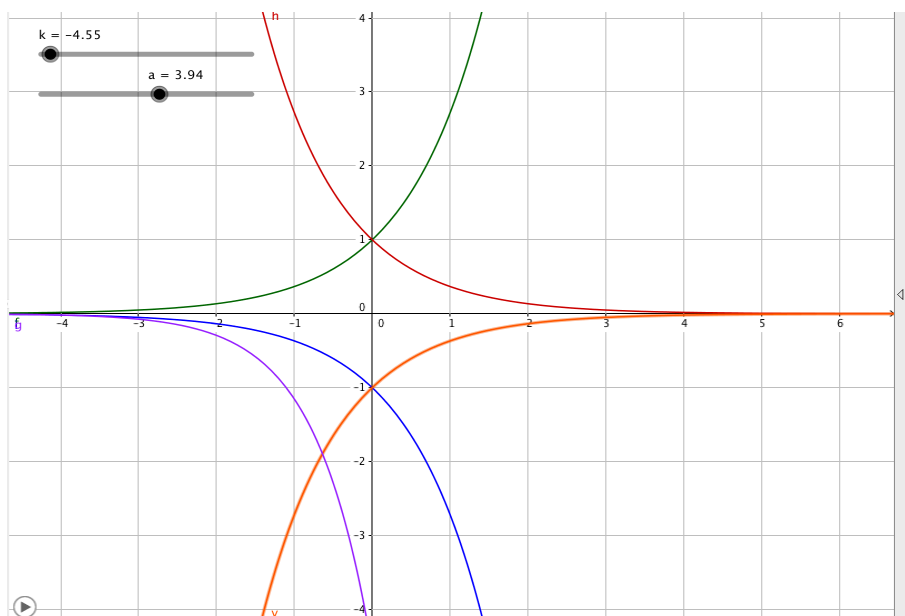


Figura 40: Función exponencial.

Se podría interactuar dinámicamente con los diferentes tipos de función exponencial expuestos en la figura anterior y en la siguiente, utilizando este enlace:

<https://www.geogebra.org/m/GR3reKCC>

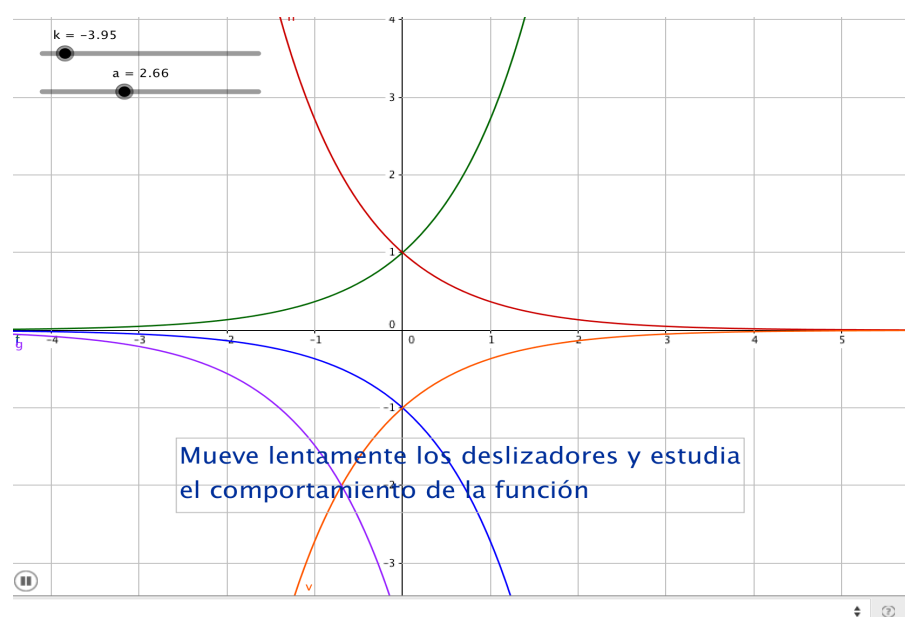


Figura 41: Tipos de función exponencial.

4.6.2 Función logarítmica

Como ya se expuso en 3.7.18, la función logarítmica se define así:

Se dice que $\lg_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, en donde $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$, es decir, que no existe el logaritmo de cero ni de números negativos. El Dominio de la función logarítmica es el conjunto $\mathbb{R}^+$, y se escribe

$$f(x) = \lg_a x$$

Ejemplos:

Si $a = 2$, $f(8) = 3$, o lo que es lo mismo, $\lg_2 8 = 3$, ya que $2^3 = 8$.

Si $a = \frac{1}{3}$, $f(9) = -2$, o lo que equivale a escribir que $\lg_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, porque $(\frac{1}{3})^{-2} = 3^2 = 9$.

Se puede acceder a una explicación animada de la representación gráfica de esta función utilizando el enlace siguiente (formato digital):

https://youtu.be/BAu_qZe3pbc

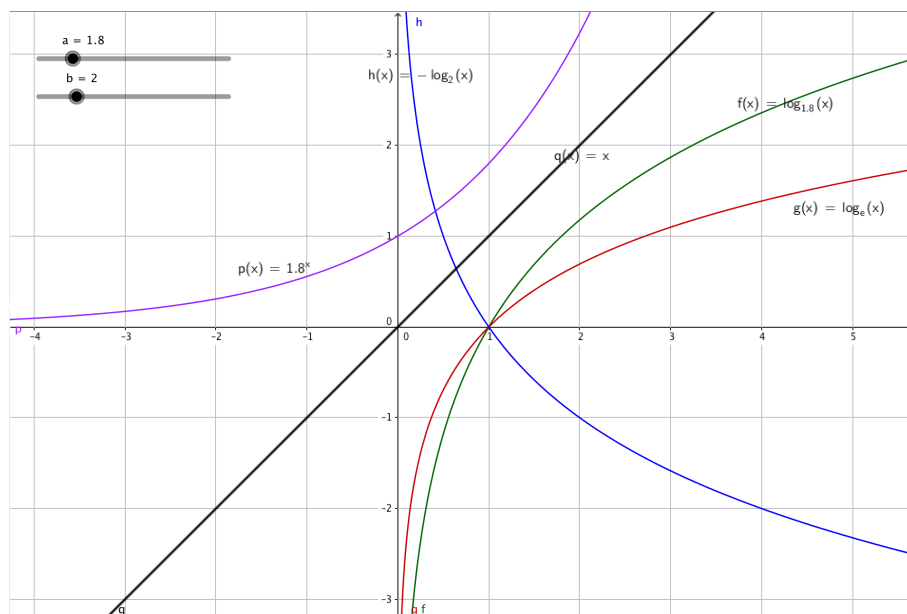


Figura 42: Diferentes formas de la función logarítmica.

Si se quisiera interactuar con la figura siguiente, que corresponde a la función logarítmica, se debería utilizar este enlace (formato digital):

<https://www.geogebra.org/m/rWcAbptD>

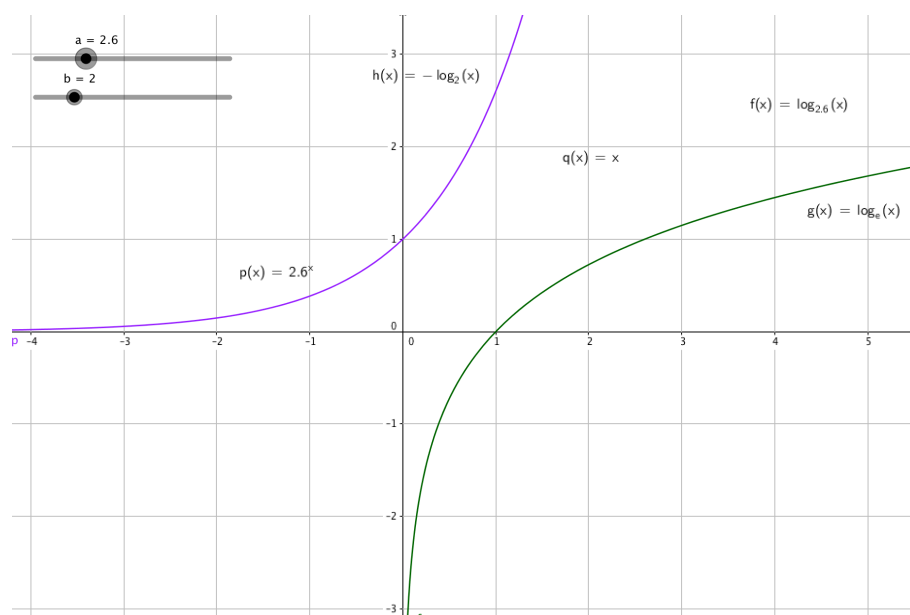


Figura 43: Gráfica de la función logarítmica.

A partir de las gráficas estudiadas, es fácil determinar el dominio y el rango de la función logarítmica:

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

$$Rang(f) = (-\infty, \infty)$$

4.6.3 Funciones trigonométricas

Razones trigonométricas y funciones trigonométricas. Las razones trigonométricas se definen como la relación que existe entre los tres segmentos que forman un triángulo rectángulo. Pero más precisamente, dependen de las coordenadas de un punto del plano, según lo que se detalla en el siguiente gráfico¹²:

¹²Para más detalles, consultar [2], pág. 429-434.

Es decir que

$$\left(\frac{h}{j}\right)^2 + \left(\frac{i}{j}\right)^2 = 1$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

Las funciones trigonométricas no se refieren a un ángulo. Son un conjunto de pares ordenados, en donde la primera componente del par es un número real, o si se quiere, el ángulo en radianes que corresponden a ese número real; la segunda componente es la razón o relación establecida en algunas de las definiciones anteriores (ecuaciones 4.6.1 a 4.6.6).

4.6.3.1 Función seno

Para conseguir una animación de la figura siguiente, se puede acceder a la construcción detallada de la gráfica de la función mediante el correspondiente enlace (formato digital del informe):

<https://youtu.be/u5FFwe83QsY>

$$f(x) = \text{sen}x$$

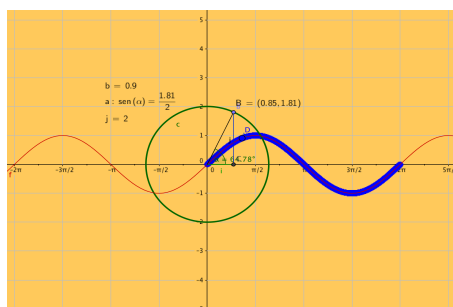


Figura 45: Gráfica de la función seno.

Si se quisiera interactuar con la gráfica de la función seno, se pueden seguir las indicaciones de la figura siguiente y usar el enlace correspondiente (formato digital de este informe):

<https://www.geogebra.org/m/hjPzbbfS>

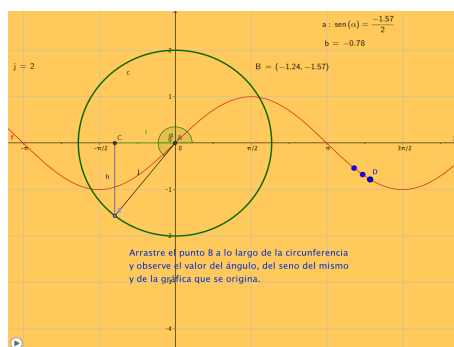


Figura 46: Gráfica de la razón y función seno.

En la función $f(x) = \text{sen}x$ se cumple que¹³ $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)[8]^{14}$, ya que

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)\cos(2\pi) + \cos(x)\text{sen}(2\pi) = \text{sen}(x).1 + \cos(x).0 = \text{sen}(x).$$

Por tanto, es una función periódica, de período $T = 2\pi$, y basta representarla en el período $[0, 2\pi)$, e ir luego copiando ese trozo de gráfica a ambos lados de dicho intervalo.

Su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, y es continua en él. Su recorrido o rango es el intervalo $[-1, 1]$ del conjunto $\mathbb{R}$.

Al ser periódica de período $T = 2\pi$, no existe

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{sen}(x)$$

Es una función impar, ya que

$$\text{sen}(-x) = \text{sen}(0 - x) = \text{sen}(0)\cos(x) - \text{sen}(x)\cos(0)$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)(1) = -\text{sen}(x)$$

4.6.3.2 Función coseno

$$f(x) = \cos(x)$$

Si se quieren detalles, en forma dinámica, de cómo se construye la gráfica de la función coseno, se puede acceder al video correspondiente, desde el formato digital de este informe, y usando el siguiente enlace:

<https://youtu.be/TxWfnyu0YI4>

¹³Se utilizan aquí, y en las siguientes secciones, algunas identidades trigonométricas de la suma de ángulos que conviene tener siempre en cuenta. Por ejemplo: $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \text{sen}(b)\cos(a)$, y también $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \text{sen}(a)\text{sen}(b)$.

¹⁴Ver pág. 226

Y si se quisiera interactuar dinámicamente con la gráfica de dicha función, se podría usar el correspondiente enlace (formato digital):

<https://www.geogebra.org/m/xR5qhRve>

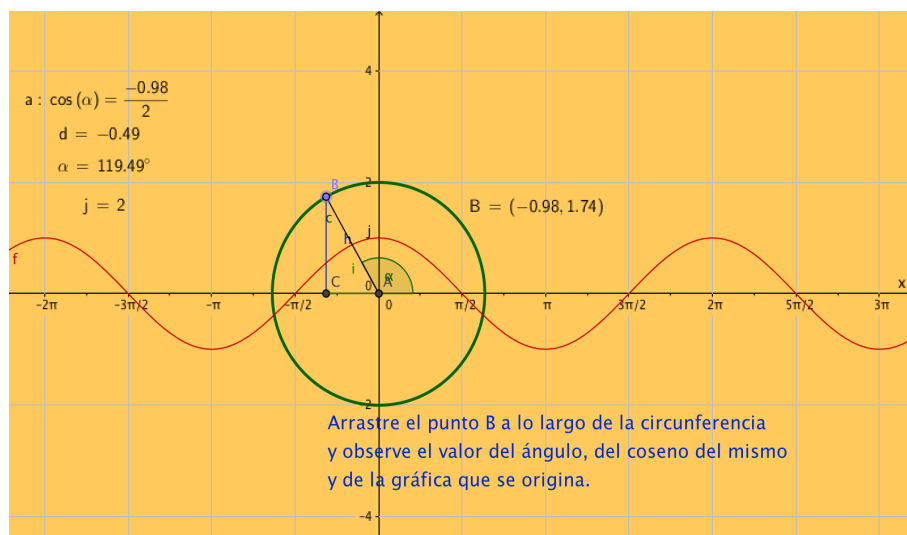


Figura 47: Gráfica de la función coseno.

Como

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 \cdot \cos(x)$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x),$$

su gráfica es como la de la función seno, pero desplazada $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia su izquierda.

Es continua en todo su dominio, es decir, en $\mathbb{R}$. Su rango es, como el de la función seno, el conjunto $[-1, 1]$.

Es periódica de período $T = 2\pi$ y, por tanto, no existe

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x)$$

Como

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0)\cos(x) + \text{sen}(0)\text{sen}(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x),$$

la función coseno es una función par.

4.6.3.3 Función tangente

La función tangente se escribe

$$f(x) = \operatorname{tag}(x),$$

que es equivalente a

$$f(x) = \operatorname{tag}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$$

Si se quieren detalles, en forma dinámica, de cómo se construye la gráfica de la función tangente, se puede acceder al video correspondiente, desde el formato digital de este informe, y usando el siguiente enlace:

<https://youtu.be/yIAKOej2zeo>

Y si se quisiera interactuar dinámicamente con la gráfica de dicha función, se podría usar el correspondiente enlace (formato digital):

<https://www.geogebra.org/m/UGAFnGAq>

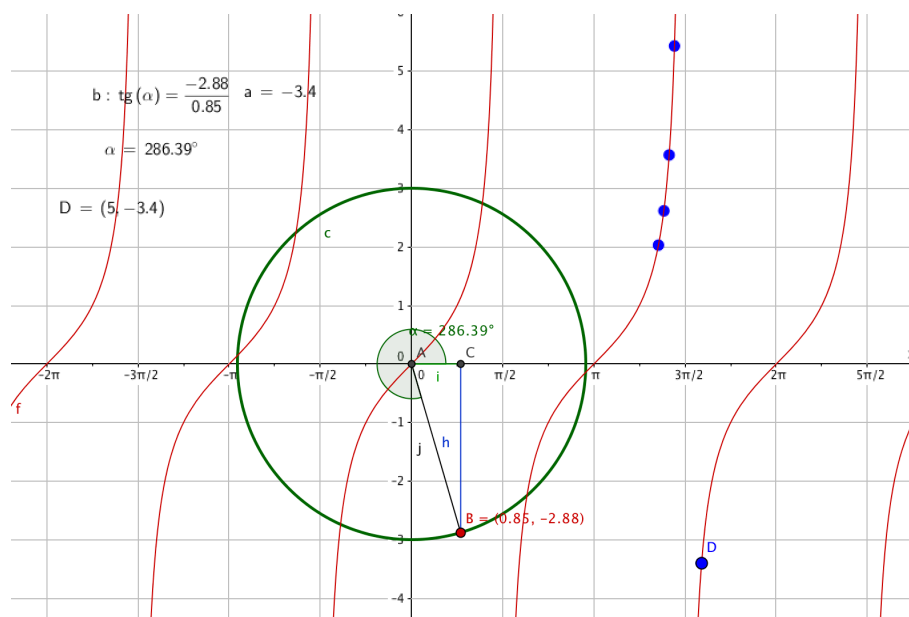


Figura 48: Gráfica de la función tangente..

Al ser $\operatorname{tag}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)}$, no está definida en $\operatorname{cos}(x) = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, siendo k cualquier entero, $k \in \mathbb{Z}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$, y es continua en él.

El recorrido de la función tangente es el conjunto $\mathbb{R}$.

Las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales.

Su período es $T = \pi$, ya que

$$\operatorname{tag}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{cos}(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{cos}(x)\operatorname{cos}(\pi) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\operatorname{cos}(x)} = \operatorname{tag}(x).$$

Es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan(x)$ ¹⁵.

4.6.3.4 Las funciones secante y cosecante

La función secante se escribe

$$f(x) = \sec(x)$$

que se define como recíproca de la función coseno

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Se muestra a continuación su gráfica. Se puede acceder a una animación de la misma mediante el siguiente enlace (formato digital).

<https://youtu.be/eRrf0wkbqKc>

Y se puede interactuar con ella (formato digital):

<https://www.geogebra.org/m/pGDeFS3f>

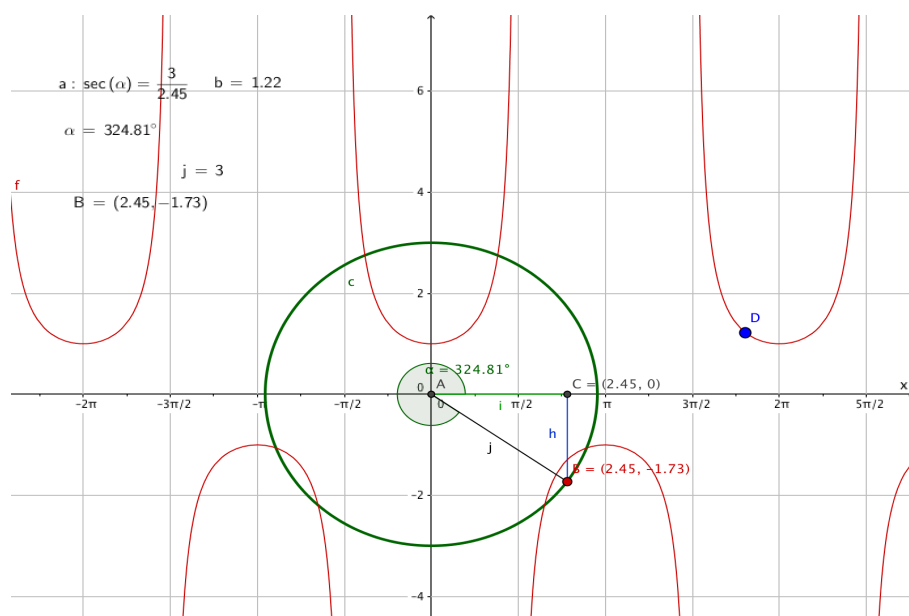


Figura 49: Gráfica de la función secante.

La función cosecante se escribe

$$f(x) = \csc(x)$$

¹⁵Ver pág 226.

que se define como recíproca de la función seno

$$f(x) = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

Se muestra a continuación su gráfica. Se puede acceder a una animación de la misma mediante el siguiente enlace (formato digital).

https://youtu.be/6_v51uN7ZLI

Y se puede interactuar con ella, desde el formato digital de este informe:

<https://www.geogebra.org/m/rk2FWMbm>

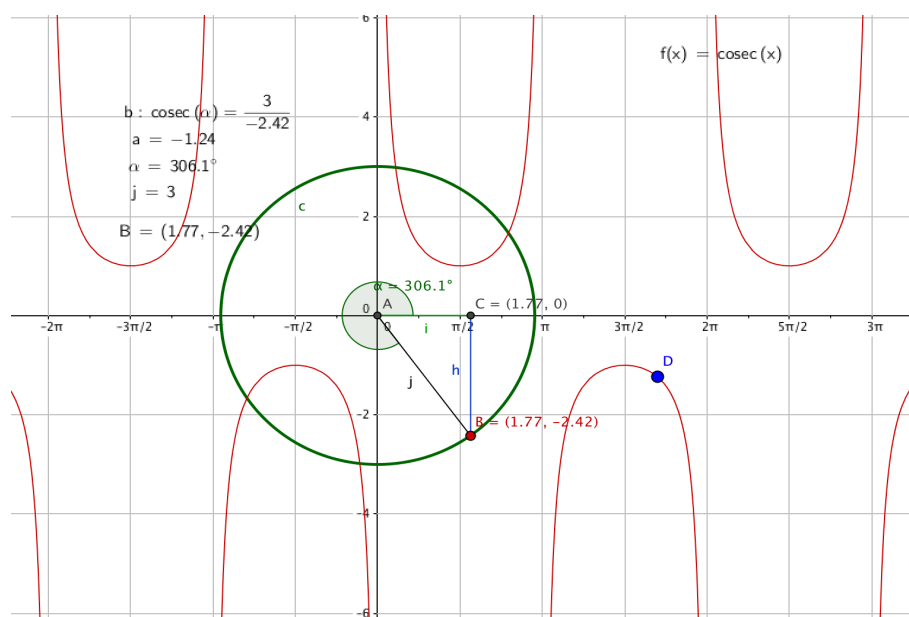


Figura 50: Gráfica de la función cosecante.

Las propiedades de las funciones secante y cosecante se pueden deducir a partir de las funciones coseno y seno, puesto que

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$$

La función secante no está definida cuando $\cos(x) = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, siendo k cualquier número entero, $k \in \mathbb{Z}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$ y es continua en él.

De forma análoga, la función cosecante no está definida cuando $\operatorname{sen}(x) = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier número entero, $k \in \mathbb{Z}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{x_k\}$ y es continua en él.

El recorrido o rango de ambas funciones es $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Su período es $T = 2\pi$.

La cosecante presenta asíntotas verticales en las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. La secante presenta asíntotas verticales en las rectas de la forma $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$. La función cosecante es impar, es decir, $\text{cosec}(-x) = -\text{cosec}(x)$, como la función seno, y la secante, par, es decir, $\text{sec}(x) = \text{sec}(-x)$, como la función coseno [8]¹⁶.

4.6.3.5 Función cotangente

La función cotangente se escribe

$$f(x) = \cotg(x)$$

equivalente a

$$f(x) = \cotg(x) = \frac{1}{\text{tag}(x)} = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$$

Se muestra a continuación su gráfica. Se puede acceder a una animación de la misma mediante el siguiente enlace (formato digital).

<https://youtu.be/PSR6Iw9-1rQ>

Y se puede interactuar con ella, desde el formato digital de este informe:

<https://www.geogebra.org/m/DRxGD6sB>

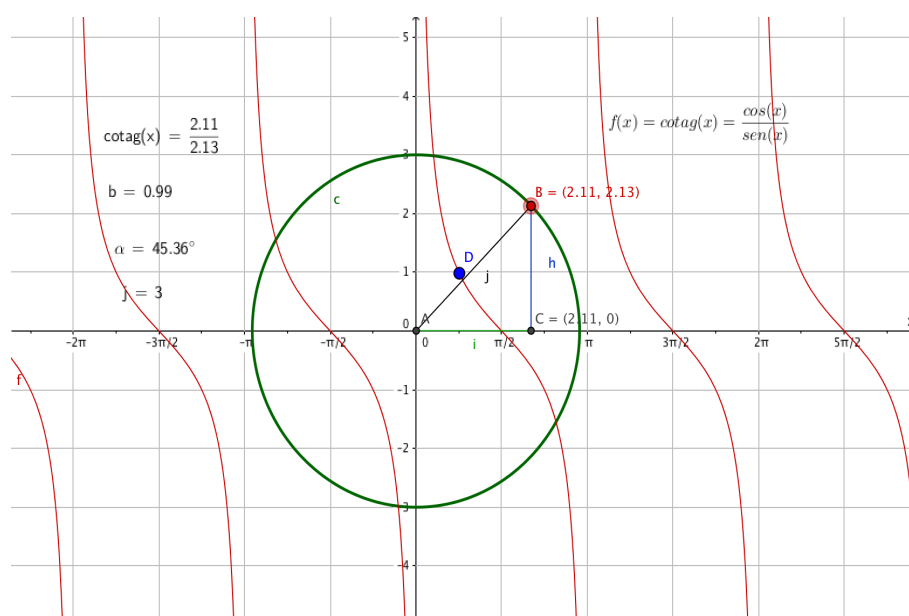


Figura 51: Gráfica de la función cotangente.

Las propiedades de la función cotangente se deducen de las de la función tangente, ya que $\cotg(x) = \frac{1}{\text{tag}(x)} = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

¹⁶Ver pág. 227.

No está definida cuando $\text{tag}(x) = 0$, es decir, en los valores de la forma $x_k = k\pi$, siendo k cualquier número entero. Su dominio es, por tanto, $\mathbb{R} - \{x_k\}$ y es continua en él[8]¹⁷.

El recorrido de la función cotangente es $\mathbb{R}$.

Su período es $T = \pi$.

Las rectas $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

Es una función impar igual que la tangente, es decir,

$$\cot g(-x) = \frac{1}{\text{tag}(-x)} = \frac{\cos(-x)}{\text{sen}(-x)} = \frac{\cos(x)}{-\text{sen}(x)} = -\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = -\cot g(x).$$

4.7 Derivada de una función

El área de las matemáticas que se llama cálculo diferencial, nace del interés por encontrar la tangente a la curva o gráfica que representa a una función f .

El cálculo integral, sin embargo, se ocupa de calcular el área bajo la gráfica de una función.

En la figura que sigue se presenta el problema principal del cálculo diferencial. Se trata de encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $g(x)$ en un punto cualquiera. En el punto $A = (-1, 5)$ existe una recta tangente a la curva g , que tiene por ecuación $y = 2x + 7$.

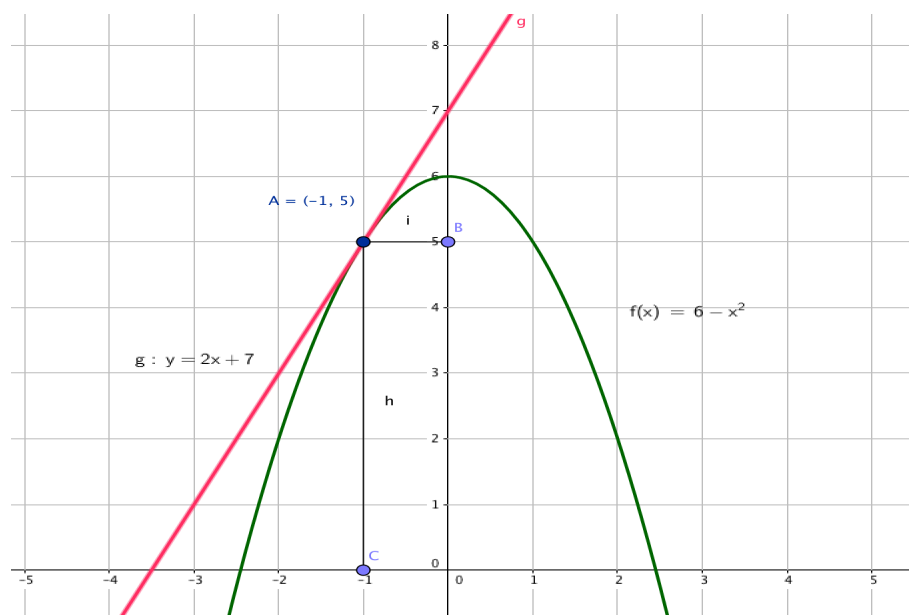


Figura 52: Recta tangente a una curva.

El problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $g(x)$ en el punto A , o en cualquier otro punto, se reduce al cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de la recta tangente en A es la pendiente de la curva en el mismo punto. El problema original y fundamental, pues, del cálculo diferencial consiste en calcular la pendiente de una curva en cada uno de sus puntos. ¿Cómo hacerlo?

¹⁷Ver pág. 227.

4.7.1 Razón de cambio y pendientes de rectas secantes

La variación, el cambio o incremento que experimenta la variable independiente x se suele representar por Δx . Si el punto B de la curva tiene por coordenadas $B(a, f(a))$, y el punto A tiene por coordenadas $A(a + h, f(a + h))$, se tiene que (ver figura 5.1.1):

$$\Delta x = x(A) - x(B) = (a + h) - a = h \quad (4.7.1)$$

$$\Delta y = y(A) - y(B) = f(a + h) - f(a). \quad (4.7.2)$$

La razón de cambio que experimenta la función f , cuando pasa del punto B al punto A, se define así:

Si la variable independiente toma cualquier valor x y el cambio que experimenta es $\Delta x = h$, la razón de cambio entre dos puntos cualesquiera es:

o lo que es lo mismo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.7.3)$$

Esta razón es en realidad la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos A y B, o la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por dos puntos de coordenadas $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Se puede acceder a una animación de este concepto, si se usa el enlace siguiente (formato digital del informe):

<https://youtu.be/GIVAnf0CI6g>

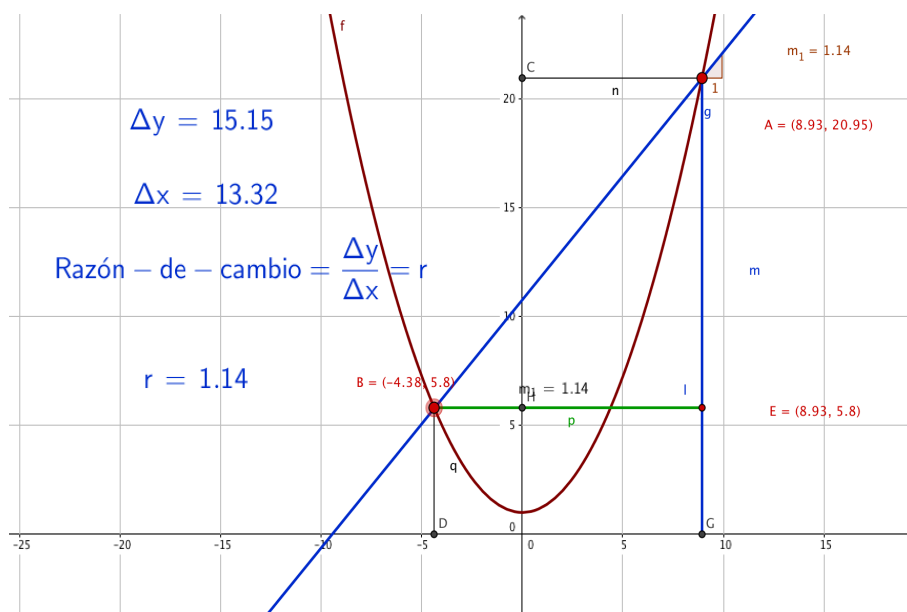


Figura 53: Razón de cambio.

Y se puede interactuar con la gráfica y comprobar las modificaciones de la razón de cambio de una función, si se hace uso del enlace siguiente:

<https://www.geogebra.org/m/du5X6frj>

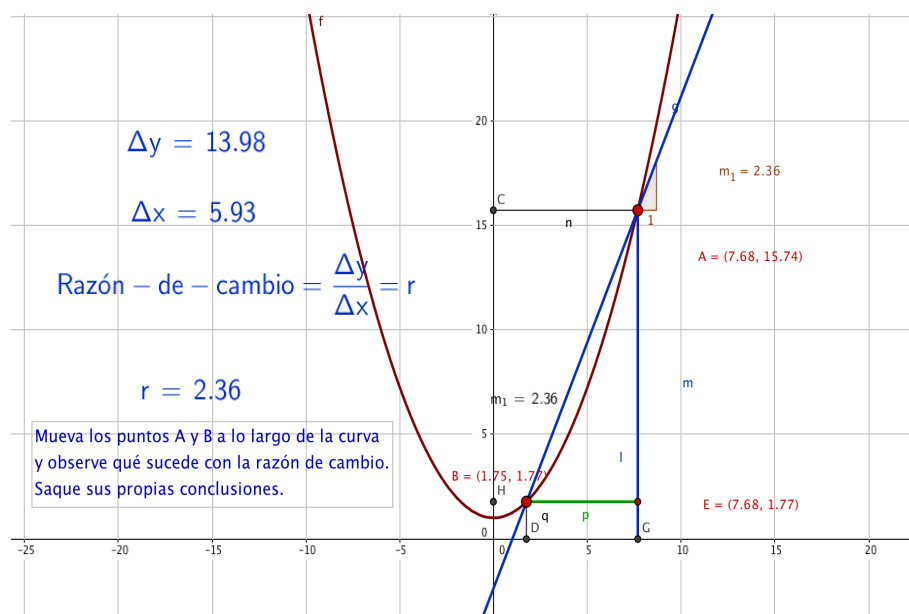


Figura 54: Razón de cambio y secante a una curva.

4.7.2 Derivada de una función en un punto

A partir de cualquiera de las expresiones (4.7.1), (4.7.2) o (4.7.3), se puede deducir el concepto de derivada de la función en un punto. La derivada de una función se consigue cuando en dichas expresiones se hace tender a cero el incremento de x ($\Delta x \rightarrow 0$), o lo que es lo mismo $h \rightarrow 0$. Una vez que se encuentran establecidos claramente los significados de las expresiones anteriores mencionadas, se dan las condiciones para enunciar el concepto de derivada, que es, en realidad, un límite especial, con una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

La derivada de una función f en un punto de coordenadas $(a, f(a))$, cuando el incremento de x tiende a cero, es decir, $\Delta x \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, $h \rightarrow 0$, se define así:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

o también

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Cuando $h \rightarrow 0$, entonces $f(a+h) \rightarrow f(a)$. Si esto sucede, la expresión (4.7.3), que permitía calcular la pendiente de la recta secante, permite calcular ahora, cuando $h \rightarrow 0$, la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$, en el punto de coordenadas $(a, f(a))$. Si la pendiente de la tangente a la curva en ese punto se representa por m_{tag} , se puede escribir

que

$$m_{tag} = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (4.7.4)$$

Si en la expresión(4.7.4),cambiamos a por x , se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4.7.5)$$

Esta nueva función, $f'(x)$, se llama función derivada; y permite calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto.

Ejemplo 1: Si se considera la función $f(x) = x^2 - 2$, y se pide la derivada de esa función en $x = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((1+h)^2 - 2) - (1^2 - 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 2 + 1}{h} \\ f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \end{aligned}$$

Así que la derivada de f en $x = 1$ es 2, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto es $m = 2$. Por lo tanto, la ecuación de la tangente en ese punto es

$$y - f(1) = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 3$$

Se puede ver este resultado en la figura siguiente:

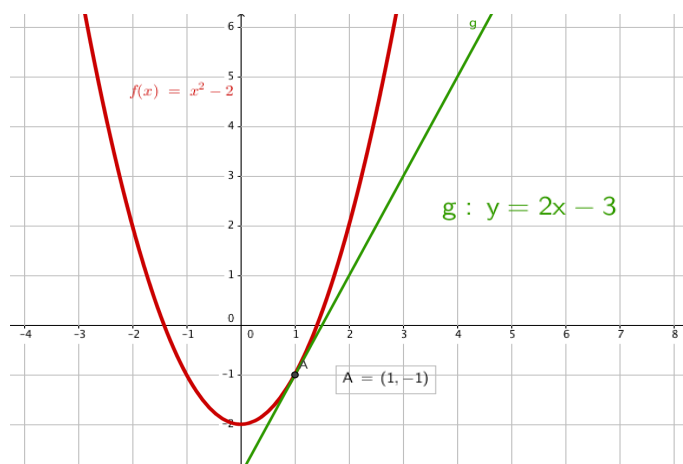


Figura 55: La derivada en un punto es la pendiente de la tangente en ese punto.

Ejemplo 2: Se quiere calcular la derivada de la función $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^3 - (x+h)^2 + 2(x+h) - 4) - (x^3 - x^2 + 2x - 4)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 + 2x + 2h - 4 - x^3 + x^2 - 2x + 4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h + 2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h + 2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2.$$

En este ejemplo se ha calculado la función derivada de $f(x)$. Este resultado permite calcular la pendiente en cualquier punto de la curva y la ecuación de la recta tangente. Si, por ejemplo, se pidiera la recta tangente en $x = 0$, se tendría que

$$m_{tag} = f'(0) = 2$$

y la recta tangente en ese punto sería

$$y - f(0) = 2(x - 0)$$

es decir

$$y = 2x - 4$$

Estos resultados, de forma animada, se pueden comprobar haciendo uso del siguiente enlace (formato digital del informe):

<https://youtu.be/eScctwd5APQ>

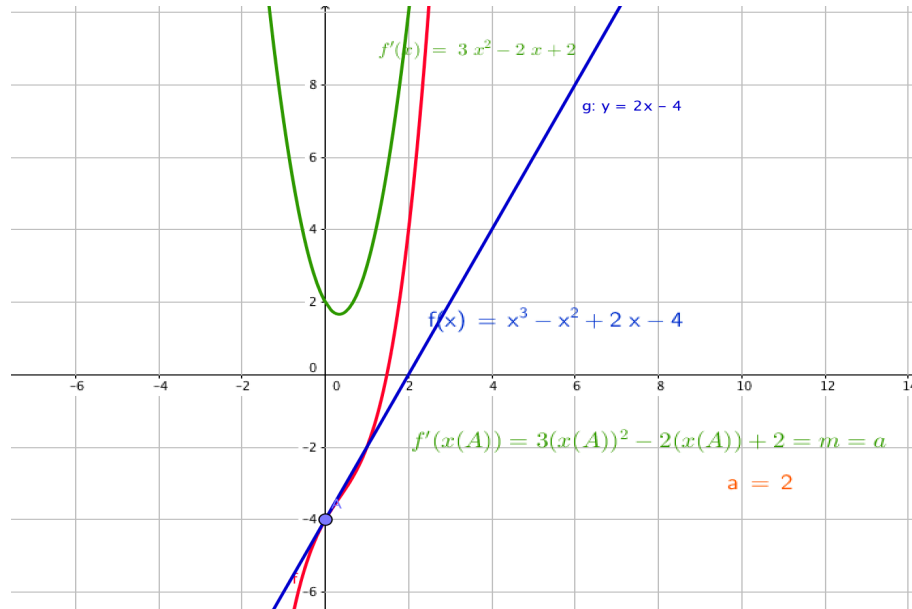


Figura 56: Función derivada y recta tangente.

4.7.3 Interpretación geométrica de la derivada

Se dice que la función f es derivable en a si existe el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, es decir, si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es un número real. Este número se denomina derivada de f en a y se designa por $f'(a)$. Se dice que f es derivable, si f es derivable en a para todo a del dominio de f .

Una forma diferente de expresar el mismo concepto es la siguiente¹⁸:

Si se llama a

$$a + h = x$$

entonces

$$h = x - a$$

y si $h \rightarrow 0$ entonces $x \rightarrow a$

Por tanto, otra forma de escribir la derivada de f en a , es decir, $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

¹⁸Ver pág. 244.

Rectas secantes a una curva:

Si se considera la siguiente figura, desde el punto de vista geométrico, para cada valor de $h \neq 0$, el número $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mide la pendiente de la recta secante que une los puntos $P(a, f(a))$ y $H(a+h, f(a+h))$.

Cuando $h \rightarrow 0$, H se acerca a P . De tal manera que la secante se convierte en tangente al llegar al límite.

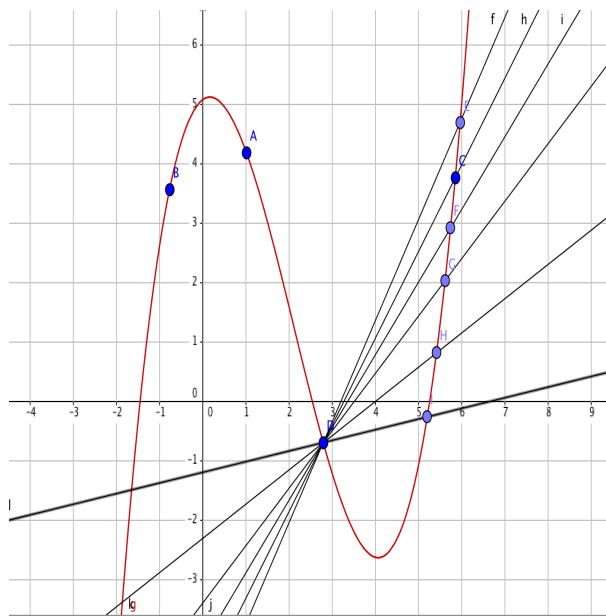


Figura 57: Secantes a una curva.

En el video al cual se puede acceder desde el enlace que consta en el formato digital de este informe, se presenta una interpretación geométrica clásica de la derivada de una función, con algunas precisiones hechas de forma dinámica. El video pretende explicar por qué la tangente a una curva en un punto es precisamente la derivada en ese punto y, además, cómo la tangente se puede interpretar como una secante cuyos dos puntos de corte se acercan tanto que, en el límite, coinciden.

<https://youtu.be/D1mFyWxrdyg>

Se puede, así mismo, interactuar con la gráfica que se presenta a continuación, mediante el enlace siguiente (formato digital del informe), y observar qué sucede al poner en movimiento los diversos elementos de la misma.

<https://www.geogebra.org/m/dN3QsDVz>

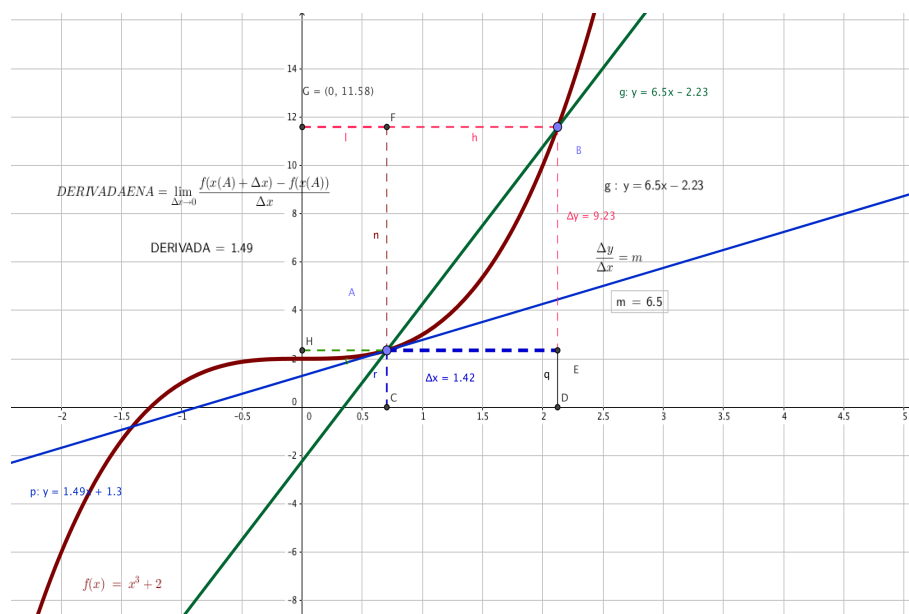


Figura 58: Interpretación geométrica de la derivada.

4.8 Implementación

El libro electrónico denominado Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de funciones Matemáticas Elementales, que se presenta como «producto final» de este trabajo de investigación y desarrollo, y sobre el cual trata el presente informe, se ha entregado, obviamente en formato digital, a todos los docentes encuestados. Esto ha permitido que sea analizado con el detenimiento y la dedicación convenientes.

Dicho libro electrónico contiene más de 50 enlaces a diferentes sitios de internet. Mediante dichos enlaces, se pueden conseguir más de 7 horas de videos explicativos con gráficas animadas, las cuales, en la mayoría de los casos, han sido realizadas gracias al software de «Geogebra», y grabadas con la aplicación Screenflow, en la mayoría de los casos, y con Quicktime, en otros.

Los docentes pueden libremente utilizar para sí, para su propio aprendizaje o para las explicaciones que dirigen a sus estudiantes, el libro electrónico que se ha puesto a su disposición. Disponen así de una ayuda didáctica adicional a las que seguramente ya utilizan.

Capítulo 5

Evaluación y resultados

La situación ideal para poder establecer la validez del libro electrónico, como ayuda o herramienta didáctica en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en la temática relativa a las gráficas de las funciones matemáticas elementales, sería la siguiente:

1. Establecer dos aulas que sigan cursos paralelos durante todo un año lectivo y que en su programa de estudios consideren esta temática de graficar funciones matemáticas elementales.
2. En una de ella, a la cual se la podría denominar «grupo de control», durante el desarrollo de esta temática, nunca se utilizarían aplicaciones de software especializado en el desarrollo de los contenidos que nos ocupan.
3. En la otra, sin embargo, se podría utilizar, como herramienta didáctica, el libro electrónico del que se está presentando este informe y estudiar los mismos contenidos que los estudiantes de la otra aula.
4. Finalmente, al terminar el año lectivo, o al finalizar el estudio de este bloque temático, que exigiría al menos seis meses de dedicación, se podrían aplicar evaluaciones similares a ambos grupos, y comparar los resultados de las mismas.

Evidentemente esto no es posible. Nadie va a prescindir, si dispone de los equipos necesarios, del uso cada vez más generalizado de las TIC, y nadie, ningún docente, ningún centro educativo, pueden permitir esa especie de experimento pedagógico, solamente para verificar la validez de esta sencilla ayuda didáctica que se quiere evaluar. Los estudiantes con los que no se permitieran usar aplicaciones informáticas para el estudio de estos temas, estarían sometidos a un agravio comparativo inaceptable.

Así pues, se debe buscar y encontrar una forma menos complicada, aunque no sea tan confiable, para establecer la validez del recurso didáctico del que se está informando. Se trata simplemente de requerir y tener en cuenta la experiencia y el buen criterio de los docentes que llevan años tratando de desarrollar estos conceptos, en los cursos de bachillerato y de Educación Básica Superior. Y eso es precisamente lo que se ha hecho.

5.1 Evaluación después de la revisión del libro electrónico

Supuesto ya el hecho de que los docentes conocen el libro electrónico, suponiendo además que lo han estudiado con dedicación, al menos alguno de sus capítulos, se les ha

solicitado responder a la encuesta que consta en el cuadro del Apéndice B, con seis preguntas sobre la validez y utilidad de esta ayuda didáctica.

5.2 Resultados que predicen los docentes después de usar el libro electrónico

Los resultados de esta segunda encuesta, después de la revisión y estudio del libro electrónico, constan en el cuadro siguiente:

Encuesta aplicada a profesores de matemáticas de bachillerato.				
Resultados de la encuesta aplicada a docentes de matemáticas, después de la utilización del libro electrónico, según la ficha que consta en el Apéndice B.				
Téngase en cuenta que cada pregunta puede ser respondida con cuatro opciones: 1 (equivalente a nada); 2, en alguna medida; 3, bastante y 4, mucho.				
Preguntas	1	2	3	4
1. ¿Los videos e interacciones con gráficas animadas relativas a las funciones polinómicas hasta de cuarto grado, mejoran los gráficos de los libros de texto o los gráficos que se elaboran sobre el papel o el pizarrón?	0	0	0	19
2. ¿Cree usted que los videos en los que se explican los diferentes tipos de asíntotas de funciones racionales, ayudarán a entender el concepto de asíntota y de rama asíntótica?	0	0	16	3
3. ¿Están suficientemente claras las explicaciones animadas de las funciones trigonométricas, a las que se puede acceder desde el libro electrónico?	0	0	15	4
4. ¿Cree usted que las animaciones con las que se explica el concepto de límite de una función, pueden contribuir a un mejor entendimiento, por parte de los estudiantes, de ese importante concepto?	0	0	15	4
5. ¿Le parece a usted clara y precisa la animación que se presenta en el libro electrónico, sobre la clásica interpretación geométrica de la derivada?	0	0	16	3
6. ¿Globalmente considerado, le parece a usted que el libro electrónico «Gráficas Animadas e Interactivas de las Funciones Matemáticas Elementales» puede ser útil, eficaz y recomendable como material didáctico de apoyo en el estudio de funciones matemáticas elementales?	0	0	14	5

Tabla 3: Resultados de la encuesta después de la utilización del libro electrónico.

5.2.1 Resumen de los resultados que predicen los docentes después de evaluar el libro electrónico

A partir de la observación del cuadro anterior, se pueden predecir, según los docentes consultados, bastantes resultados positivos.

Éstos se exponen porcentualmente en el cuadro que sigue.

Nº de pregunta	Valoración de la utilidad y rigor científico del libro	Porcentaje
1	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	0%
	Mucho	100%
2	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	84,21%
	Mucho	15,78%
3	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	78,94
	Mucho	21,05%
4	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	78,94%
	Mucho	21,05%
5	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	84,21%
	Mucho	15,78%
6	Nada	0%
	En alguna medida	0%
	Bastante	73,68%
	Mucho	26,31%

Tabla 4: Resumen de los resultados después de evaluar el libro electrónico

De los porcentajes obtenidos en el cuadro anterior, se pueden destacar los resultados siguientes. Se hacen constar también algunas observaciones y recomendaciones que los docentes de matemáticas hacen al libro electrónico y a su autor:

1. Todos los docentes consultados, (100%), consideran que las gráficas animadas que se proponen en el libro electrónico, mejoran mucho las que se pueden estudiar y «visualizar» en los libros de texto de uso común en los centros educativos de los niveles de educación básica superior y de bachillerato.
2. Consideran los docentes que la comprensión de los conceptos de asíntota y de rama asíntótica de una función puede mejorar bastante (84,21%) o mucho (15,78%), si se

utilizara, durante el desarrollo y la explicación de esta temática, el libro electrónico que se propone como ayuda didáctica.

3. La gran mayoría de los docentes consultados, (78,94%), considera que las funciones trigonométricas se presentan, en forma animada, con claridad suficiente como para mejorar de forma considerable la comprensión y el significado de las mismas.
4. Sobre el concepto más importante explicado en el libro, el de límite de una función en un punto, el 78,94% de los docentes afirma que la forma animada de presentarlo, con seguridad mejoraría bastante la comprensión del mismo. Incluso, una parte de los docentes, el 21,05%, estima que la mejora sería muy significativa.
5. El segundo concepto más importante que se presenta de forma animada y que es el concepto de derivada de una función en un punto, merece de parte de los docentes parecidas apreciaciones: el 84,21% considera que mejoraría bastante la comprensión de dicho concepto; el 15,78%, incluso, predice que la comprensión del mismo, sería mejorada sustancialmente.
6. La última apreciación de los docentes es sobre la validez y utilidad didáctica del conjunto de esta ayuda didáctica que se presenta con el libro electrónico sobre el que trata este informe. Todos predicen como bastante o muy útil (73,68% y 26,31% respectivamente) la utilización de este libro, especialmente dedicado a presentar de forma animada las clásicas gráficas de las funciones matemáticas elementales.
7. Varios docentes recomiendan al autor del libro electrónico, la elaboración de nuevos materiales didácticos de este estilo, para mejorar la didáctica de las matemáticas. Específicamente, uno de ellos solicita que se presente de forma animada también el concepto de integral definida y la relación de este concepto con el cálculo de áreas contenidas entre los ejes coordenados y las gráficas de las funciones que se estudian.
8. Según el decir de algunos docentes, la duración de los videos, en los cuales se presentan animaciones de las gráficas de las funciones estudiadas, es excesiva; y pueden resultar, por ello, relativamente inconvenientes desde el punto de vista pedagógico, aunque los contenidos de los mismos estén bien estructurados y elaborados.
9. Una de las unidades temáticas importantes en el pénsum de estudio de bachillerato es la de la Secciones Cónicas. Varios docentes recomiendan también que se presenten también los contenidos correspondientes a esa temática, de forma animada e interactiva.
10. Según los encuestados, todavía hay maestros que se resisten al uso de las nuevas tecnologías, y de una manera especial, los profesores de matemáticas. Otra de las recomendaciones que los docentes encuestados hacen es la de incentivar a todos los docentes, especialmente a los de matemáticas, para que utilice software especialmente diseñado para el aprendizaje de esta ciencia.

11. Se debería procurar que el software que se utilice, permita al estudiante la interacción y la animación de las gráficas que representan funciones.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Conclusiones

1. En todos los ámbitos de la actividad humana se impone, cada vez más, el uso de las nuevas tecnologías. De una manera especial, es importante el uso de estos recursos tecnológicos en la actividad educativa. No se puede pretender que los niños y jóvenes de las escuelas y colegios se eduquen según métodos y esquemas de un mundo que ya no existe. No se puede predecir cómo va a ser exactamente ese mundo en el que van a vivir los actuales estudiantes. Pero al menos se puede afirmar que ese mundo de un futuro inmediato, va a tener un protagonista fundamental: las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación.
2. Se debe exigir insistentemente un cambio de mentalidad dentro del magisterio, dentro del colectivo de los docentes: el uso de las nuevas tecnologías no puede ni debe ser considerado como una moda, ni siquiera como una simple innovación curricular; es una cuestión de importancia radical. Quien no utilice las nuevas tecnologías en toda la actividad educativa quedará desacreditado, obsoleto, inútil, sin posibilidad de acceder a la información que se encuentra a la distancia de un «clic».
3. Si el uso de las nuevas tecnologías es importante en todas las áreas del sistema educativo, en el área de las ciencias positivas y en las matemáticas de manera especial, lo es aun más. Se hace imprescindible, pues, conseguir que los docentes tengan una capacitación permanente en el uso de las nuevas tecnologías.
4. Es frecuente escuchar a docentes, a estudiantes y a padres de familia, que lo importante en el aprendizaje de las matemáticas es la realización de muchos ejercicios, lo importante es la práctica. El libro electrónico, sin embargo, se ocupa principalmente de explicar conceptos. La afirmación sobre la importancia de realizar muchos ejercicios y de que se aprende con la práctica, no es muy acertada.
5. Las matemáticas son una ciencia eminentemente teórica. Lo más importante es entender los conceptos. En el entendimiento de los mismos se debería centrar la labor del docente. Los ejercicios sirven para entender los conceptos. Por esa razón, el libro electrónico del que se habla en este informe, se ocupa principalmente de explicar conceptos, algunos de ellos, por cierto, los más importantes de todo el currículo

de bachillerato. Se debe pues recomendar insistentemente que los docentes se dediquen, en primer lugar, a que los estudiantes entiendan las definiciones, los teoremas, los conceptos. De otra forma, la didáctica de la matemática se puede convertir en la enseñanza de un conjunto de «trucos» que algunos se atreven a llamar «destrezas», sin serlo verdaderamente.

6. Finalmente, se debe afirmar que es recomendable utilizar el libro electrónico, producto final de este trabajo de investigación y desarrollo, en las clases de matemáticas de bachillerato, destinadas al estudio de las funciones y sus gráficas.

Apéndice A

Ficha de observación previa al uso de recursos digitales

Ficha de observación, previa al uso de recursos digitales, en el estudio y análisis de gráficas de las funciones matemáticas elementales.				
Encuesta aplicada a profesores de matemáticas de bachillerato.				
Nombre del docente:				
Curso y centro educativo en el que explica matemáticas:				
Téngase en cuenta que cada pregunta puede ser respondida con cuatro opciones: 1 (equivalente a nunca); 2, con frecuencia; 3, casi siempre y 4, siempre.				
Preguntas	1	2	3	4
1. ¿Con qué frecuencia utiliza las TIC en la enseñanza de las matemáticas?				
2. ¿Utiliza aplicaciones informáticas para la representación gráfica de funciones elementales?				
3. ¿Suele utilizar el software «Geogebra» en la representación de funciones polinómicas, racionales, radicales o trascendentes?				
4. Con el software que usted usa en la representación de funciones, ¿consigue animación de las gráficas que se visualizan?				
5. ¿Pueden sus estudiantes interactuar con las gráficas que usted presenta haciendo uso de software matemático especializado?				
6. ¿Cómo juzga usted el grado de comprensión que los estudiantes consiguen en la graficación y cálculo de las asíntotas de las funciones elementales?				
7. ¿Explica usted el concepto de límite de una función en un punto utilizando gráficas animadas, mediante algún tipo de software especializado?				
8. ¿Utiliza usted software especializado en el estudio del concepto de derivada de una función y consigue animación en la representación gráfica de dicho concepto?				

Tabla 5.: Encuesta aplicada antes de la utilización del libro electrónico.

Apéndice B

Ficha de observación después de haber examinado el libro electrónico

Ficha de observación, después de haber utilizado el libro electrónico «Gráficas animadas e interactivas para el estudio de funciones matemáticas elementales»				
Encuesta aplicada a profesores de matemáticas de bachillerato.				
Nombre del docente:				
Curso y centro educativo en el que explica matemáticas:				
Téngase en cuenta que cada pregunta puede ser respondida con cuatro opciones: 1 (equivalente a nada); 2, en alguna medida; 3, bastante y 4, mucho.				
Preguntas	1	2	3	4
1. ¿Los videos e interacciones con gráficas animadas relativas a las funciones polinómicas hasta de cuarto grado, mejoran los gráficos de los libros de texto o los gráficos que se elaboran sobre el papel o el pizarrón?				
2. ¿Cree usted que los videos en los que se explican los diferentes tipos de asíntotas de funciones racionales, ayudarán a entender el concepto de asíntota y de rama asíntótica?				
3. ¿Están suficientemente claras las explicaciones animadas de las funciones trigonométricas, a las que se puede acceder desde el libro electrónico?				
4. ¿Cree usted que las animaciones con las que se explica el concepto de límite de una función, pueden contribuir a un mejor entendimiento, por parte de los estudiantes, de ese importante concepto?				
5. ¿Le parece a usted clara y precisa la animación que se presenta en el libro electrónico, sobre la clásica interpretación geométrica de la derivada?				
6. ¿Globalmente considerado, le parece a usted que el libro electrónico «Gráficas Animadas e Interactivas de las Funciones Matemáticas Elementales» puede ser útil, eficaz y recomendable como material didáctico de apoyo en el estudio de funciones matemáticas elementales?				

Tabla 6.: Encuesta aplicada después de la utilización del libro electrónico.

Referencias

- [1] T. Apóstol. *Calculus, Volumen 1, Segunda Edición*. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España, 1982. 12
- [2] C.Sowkowski. *Algebra y trigonomètria con Geometria Analítica*. Thomson Learning, Colombia, 2002. 67
- [3] R. Godement. *Álgebra*. Editorial Tecnos, Madrid, 1978. 9, 10, 12
- [4] R. Larson. *Precálculo*. The Pennsylvania State University, Pennsylvania, octava edition, 2012. 64
- [5] L. Leithold. *El Cálculo*. Oxford University Press, México, 2009. 22
- [6] Louis Leithold. *Álgebra*. Oxford University Press, Oxford, 1992. 48, 59, 64
- [7] W. Sowkowski. *Álgebra*. Thomson, Colombia, 2006. 64
- [8] J. Vizmanos y otros. *Matemáticas 1- Ciencia y Tecnología- Bachillerato*. Santillana S.L., Madrid, 2014. 14, 20, 45, 59, 70, 73, 75, 76
- [9] A. Martínez y varios. *Matemáticas COU-78*. Editorial Bruño, Madrid, 1982. 54
- [10] E. Hernández y varios. *Algebra Lineal y Geometría*. Pearson Educación de México S.L., España, 2012. 64
- [11] J. Vizmanos y varios. *Matemáticas 2-Bachillerato*. Ediciones SM, Madrid, 2014. 51, 81
- [12] M. Antonio y varios. *Matemáticas 1-Aplicadas a las Ciencias Socilaes, Guía y Recursos*. Santillana, Torrelaguna, 60. 28043 Madrid, 2008. 64
- [13] R. Barnett y varios. *Precálculo: Funciones y Gráficas*. McGraw-Hill, México D.F., 1999. 64
- [14] D. Zill y W. Wright. *Cálculo, Trascendentes Tempranas*. McGraw-Hill, México, cuarta edition, 2011. 21, 23, 47

Índice alfabético

A

Análisis., 25
Asíntotas oblicuas, 51
Asíntotas verticales y horizontales., 47

C

Codominio,11
Concepto de función:,11
Cosecante,73

D

Definición formal de función, 12
Definición formal de límite, 22
Definición intuitiva de límite, 21
Derivada de una función., 76
Derivada de una función en un punto., 78
Desarrollo.,30
Diagrama de Venn,,10
Diseño.,32
Dominio,11,14

E

El número «e», 19
Evaluación, 84

F

Función,9
Función constante, 17
Función coseno, 70
Función cotangente, 75
Función cuadrática, 18
Función definida a trozos, 18
Función exponencial, 64
Función exponencial:, 19
Función logarítmica, 19, 66
Función polinómica de cuarto grado, 41

Función polinómica de primer grado, 33
Función polinómica de quinto grado., 43
Función polinómica de tercer grado., 39
Función real de variable real, 11
Función seno, 69
Función tangente, 72
Funciones algebraicas, 16, 32
Funciones explícitas, 16
Funciones implícitas, 17
Funciones lineal , afín e identidad, 17
Funciones polinómicas, 17, 32
Funciones polinómicas de grado superior,
39
Funciones racionales, 45
Funciones radicales., 59
Funciones trascendentes, 18, 64
Funciones trigonométricas, 19, 67
Funciones valor absoluto, parte entera y
función signo, 18

G

Grafo,12
Gráfico de la función,13

I

Imagen,12
Implementación., 83
Interpretación geométrica de la derivada,
81

L

La función cuadrática y la parábola., 35
Límite de una función en un punto ,20
Ley de asignación,12

M

Metodología., 25

P

Pares ordenados,10
Producto cartesiano,9

R

Rango,12,14
Razón de cambio,77
Recorrido,12
Relación,11
Relaciones,11
Resultados.,27

S

Secante,73

T

Ternas,11

V

Valor absoluto:,18
Variable dependiente,12
variable independiente,12

Resumen final

Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales

Miguel Ángel González Antolín

96 páginas

Proyecto dirigido por Pilar Urrutia Urrutia, Mg.

El producto final de este trabajo de investigación y desarrollo, que se titula Desarrollo de Gráficas Animadas y Animaciones Interactivas para el Estudio de Funciones Matemáticas Elementales, se propone presentar las gráficas que representan funciones, con movimiento y animaciones interactivas que permitan una mejor comprensión de sus variaciones y características.

El pènsum de estudios de bachillerato incluye una importante introducción al cálculo: concepto de función, teoría de límites de funciones reales de variable real, el concepto de derivada y sus aplicaciones en las ciencias físicas, en la economía y en las ciencias sociales. Generalmente, estos conceptos, especialmente aquellos que exigen una representación gráfica, no son fáciles de entender y suelen presentarse de forma estática, como si las variaciones que se estudian no fueran tales. Las funciones son modelos matemáticos de una realidad siempre cambiante. La quietud no existe.

El uso adecuado de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) permiten otorgar movimiento a las gráficas que representan funciones, mejorar el grado de comprensión que el estudiante de bachillerato adquiere de las mismas y su capacidad para interpretarlas y analizarlas. Sin duda alguna, las TIC, si se utilizan convenientemente, pueden constituirse en una ayuda didáctica fundamental en el estudio de las variaciones de las funciones matemáticas elementales.