

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR**  
**FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y CONTABLES**

**TRES ENSAYOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL MERCADO**  
**ACCIONARIO ECUATORIANO: EFICIENCIA DEL MERCADO Y**  
**CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN**

**TRABAJO DE TITULACIÓN DE GRADO PREVIA LA OBTENCIÓN**  
**DEL TÍTULO DE INGENIERÍA COMERCIAL**

**BORIS XAVIER BERMÚDEZ CÁRDENAS**  
**DIRECTORA: ING. IRINA VERKOVITCH M.SC.**

**QUITO, MAYO 2014**



**Directora e informantes**

**Directora: Ing. Irina Verkovitch M.sc.**

**Informantes:**

**Ing. Edmundo Maldonado MBA.**

**Ing. German Luna MBA**

## **DEDICATORIA**

A mi señor Dios todo poderoso.

A mis amados padres, Ximena y Luis.

A mi amado hermano, Luis Fernando.

A mis amados Abuelitos, Jaimito y Olguita.

A la memoria de mi amado primo, John Bermúdez Gernert.

Por ser mi más profunda motivación

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por guiar el destino de mi familia y el mío propio.

A mis amados padres, Ximena y Luis, y a mi amado hermano Luis Fernando, por su amor y apoyo incondicional, por creer en mí y por enseñarme que el trabajo y la perseverancia son las herramientas para convertir los sueños en realidad.

A mis amados abuelitos, Jaimito y Olguita, por todo su apoyo desde mi infancia, por darme todo lo mejor de sí mismos.

A toda mi familia por ser estar a mi lado en cada momento, por ser un ejemplo de vida para mí.

Al profesor y gran amigo, Nelson Subia PhD. por su apoyo y fundamental aporte en el componente matemático de esta investigación, por transmitirme la pasión por las matemáticas.

A la profesora, Ing. Irina Verkovitch, mi maestra de estadística y mi amiga, por dirigir esta investigación y brindarme su incondicional ayuda en todo momento.

Al profesor, Ing. Edmundo Maldonado, mi maestro de finanzas y mi amigo, por esas innumerables lecciones de vida y su inmejorable guía durante todos estos años en la PUCE.

Al profesor, Ing. German Luna, por el tiempo dedicado a la revisión de esta investigación.

A mis amigos por los geniales momentos vividos.

A mi gran amigo, Reinaldo Endara, por colaborar con la recopilación de literatura necesaria para llevar a cabo este trabajo.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

DEDICATORIA,	iv
AGRADECIMIENTO,	v
ÍNDICE DE CONTENIDO,	vi
ÍNDICE DE TABLAS,	xii
ÍNDICE DE GRÁFICOS,	xiii
RESUMEN EJECUTIVO,	xiv
ABSTRACT,	xv

### INTRODUCCIÓN, 1

### ENSAYO I, 4

### REPASO DE MATEMÁTICAS AVANZADAS EN FINANZAS, 4

#### 1.1 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD, 5

##### 1.1.1 Conceptos básicos, 5

1.1.1.1 Experimento aleatorio, 5

1.1.1.2  $\sigma$ -álgebra, 5

1.1.1.3  $\sigma$ -álgebra de Borel, 6

1.1.1.4 Espacio de probabilidad, 7

##### 1.1.2 Funciones medibles y variables aleatorias, 7

1.1.2.1 Funciones medibles, 7

1.1.2.2 Variables aleatorias, 7

1.1.2.3 Caso particular, 8

##### 1.1.3 Funciones de distribución, 8

1.1.3.1 Funciones de distribución y densidad para variables aleatorias continuas, 8

1.1.3.2 Medida de probabilidad discreta, 9

##### 1.1.4 Esperanza matemática, 9

##### 1.1.5 Esperanza condicionada, 10

#### 1.2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS, 12

##### 1.2.1 Motivación, 12

1.2.2	Definición,	12
1.2.3	Procesos estocásticos estacionarios,	13
1.2.3.1	Procesos estacionarios de segundo orden,	13
1.2.4	Filtración,	14
1.2.4.1	Proceso estocástico adaptado a una filtración,	15
1.2.5	Martingalas,	15
1.2.6	Movimiento Browniano,	16
1.2.6.1	Definición,	16
1.2.6.2	Simulación de un Movimiento Browniano,	16
1.2.6.3	Movimiento Browniano y la propiedad de martingala,	18
1.2.7	Caminata aleatoria,	18
1.2.7.1	Caminata Aleatoria,	18
1.2.7.2	Variación cuadrática media de la caminata aleatoria,	19
1.2.7.3	Caminata aleatoria continua y movimiento browniano,	20
1.2.7.4	Variación cuadrática media del Movimiento Browniano,	20
1.2.8	Movimiento Browniano Geométrico,	21
1.2.8.1	Definición,	21
1.2.8.2	Simulación de un Movimiento Browniano Geométrico,	22
1.2.9	Proceso de Poisson,	23
1.2.9.1	Definición,	23
1.2.9.2	Propiedades del proceso de Poisson,	23
1.2.9.3	Simulación de un proceso de Poisson,	24
1.2.9.4	Proceso de Poisson no homogéneo,	25
1.3	INTEGRAL DE LEBESGUE Y ESPACIOS $\mathcal{L}^p$ ,	26
1.3.1	Motivación,	26
1.3.2	Integral de Lebesgue,	26
1.3.3	Espacios $\mathcal{L}^p$ y $\mathcal{L}^2$ ,	28
1.4	CÁLCULO ESTOCÁSTICO Y ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS,	29
1.4.1	Integrales estocásticas,	29
1.4.1.1	Integrales estocásticas de procesos simples,	29

1.4.1.2	Integrales estocásticas para procesos generales,	30
1.4.2	Formula de Ito,	30
1.4.3	Ecuaciones diferenciales estocásticas,	32
1.4.3.1	Definición,	32
1.4.3.2	Existencia y Unicidad,	32
1.4.3.3	Ejemplos,	33
1.4.3.4	Estimación de parámetros,	36
1.5	ANÁLISIS DE FOURIER,	36
1.5.1	Motivación,	36
1.5.2	Conceptos fundamentales,	37
1.5.3	Series de Fourier,	38
1.5.3.1	Primer concepto,	38
1.5.3.2	Series de Fourier de senos y cosenos,	39
1.5.3.3	Series complejas de Fourier,	40
1.5.4	Integral de Fourier y transformadas de Fourier,	41
1.5.4.1	Introducción,	41
1.5.4.2	Integral de Fourier,	41
1.5.4.3	Transformadas de Fourier,	43
1.5.4.4	Transformada discreta de Fourier,	44
1.5.4.5	Transformada rápida de Fourier,	45
1.6	TEORÍA DE WAVELETS,	46
1.6.1	Motivación,	46
1.6.2	Definición,	46
1.6.3	Trasformada Wavelet continua,	47
1.6.4	Trasformada discreta Wavelet,	47
1.6.5	Análisis Multiresolución,	48
1.6.5.1	Una definición intuitiva,	48
1.6.5.2	Definición Formal,	49
1.6.5.3	Trasformada discreta Wavelet y el Análisis Multiresolución,	49
1.6.6	Tipos Wavelets,	50
1.6.7	Wavelets en estadística y finanzas,	54

## **ENSAYO II, 55**

### **EFICIENCIA Y NATURALEZA DEL MERCADO ACCIONARIO, 55**

#### 2.1 DATOS, 55

#### 2.2 HIPÓTESIS DE LOS MERCADOS EFICIENTES, 58

##### 2.2.1 Implicaciones estadísticas de la Hipótesis de Mercados Eficientes, 60

#### 2.3 Análisis gráfico y pruebas de bondad de ajuste, 61

##### 2.3.1 Gráfica de las series de precios y retornos, 62

##### 2.3.2 Pruebas de bondad de ajuste y resumen estadístico para los rendimientos, 67

#### 2.4 ANÁLISIS DE AUTOCORRELACIÓN PARA LOS RENDIMIENTOS, 71

##### 2.4.1 Definiciones básicas del análisis de autocorrelación, 71

##### 2.4.2 Aplicación a los rendimientos, 72

#### 2.5 PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA, 75

##### 2.5.1 Definición básica, 75

##### 2.5.2 Test de raíz unitaria de Phillips Perron, 76

##### 2.5.3 Aplicación a los rendimientos, 76

#### 2.6 ANÁLISIS ECONÓMETRICO DE LA VOLATILIDAD: MODELOS ARCH Y GARCH, 78

##### 2.6.1 Agrupamiento de la Volatilidad, 79

##### 2.6.2 Prueba de Heteroscedasticidad, 81

##### 2.6.3 Modelos tipo ARCH-GARCH, 85

##### 2.6.4 Estimación de modelos tipo ARCH-GARCH para los rendimientos, 87

#### 2.7 VALOR EN RIESGO, 90

##### 2.7.1 Definición de Valor en Riesgo, 91

##### 2.7.2 Valor en riesgo: enfoque econométrico, 91

##### 2.7.3 Valor en riesgo: enfoque de simulación de Montecarlo, 92

##### 2.7.4 Análisis del Valor en Riesgo estimado, 94

#### 2.8 ANÁLISIS ESPECTRAL, 95

##### 2.8.1 Fundamentos del Análisis Espectral, 96

##### 2.8.2 Ejemplo ilustrativo, 97

##### 2.8.3 Estimación de Periodogramas para los rendimientos, 99

- 2.9 ANÁLISIS DE RETORNOS FINANCIEROS MEDIANTE WAVELETS, 101
  - 2.9.1 Análisis Multiresolución y estadística descriptiva, 101
  - 2.9.2 Comovimiento de rendimientos accionarios: enfoque de Wavelets, 106
    - 2.9.2.1 Correlación Wavelet, 106
    - 2.9.2.2 Aplicación a los rendimientos, 107
- 2.10 ARBITRAJE EN EL MERCADO ACCIONARIO, 109
- 2.11 CONCLUSIONES FINALES SOBRE LA NATURALEZA Y EFICIENCIA DEL MERCADO ACCIONARIO ECUATORIANO, 109

### **ENSAYO III, 114**

### **MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA DE PRECIOS Y CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS, 114**

- 3.1 DINÁMICA DE LOS PRECIOS Y RENDIMIENTOS, 114
  - 3.1.1 Perspectiva desde la literatura especializada, 114
  - 3.1.2 Modelamiento de la dinámica de los precios y rendimientos en Ecuador, 117
    - 3.1.2.1 Ecuación diferencial estocástica no paramétrica, 118
    - 3.1.2.2 Simulación del modelo no paramétrico de dinámica de precios, 119
    - 3.1.2.3 Rendimientos simulados, 121
    - 3.1.2.4 Validación empírica del modelo, 123
- 3.2 CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN, 124
  - 3.2.1 Simulación de un portafolio de inversiones, 125
    - 3.2.1.1 Simulación de estrategia neutral al riesgo, 128
    - 3.2.1.2 Simulación suponiendo portafolio óptimo: estrategia de aversión al riesgo, 130
  - 3.2.3 Perspectiva histórica de un portafolio, 135
    - 3.2.3.1 Resultados, 136
    - 3.2.3.2 Análisis econométrico del portafolio histórico, 138
  - 3.2.4 Análisis de resultados, 140

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES, 143**

- 4.1 CONCLUSIONES, 143

4.2 RECOMENDACIONES, 144

**BIBLIOGRAFÍA, 146**

**ANEXOS, 148**

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla N° 1: Resúmenes estadísticos.....	68
Tabla N° 2: Resúmenes estadísticos.....	69
Tabla N° 3: Correlograma Industrias Ales .....	73
Tabla N° 4: Prueba de raíz unitaria .....	77
Tabla N° 5: Test de Phillips Perron para rendimientos del Ecuindex .....	77
Tabla N° 6: Correlograma de rendimientos cuadrados Banco de Guayaquil.....	80
Tabla N° 7: Resumen Estructura ARMA .....	82
Tabla N° 8: Resumen de Pruebas de Heteroscedasticidad .....	84
Tabla N° 9: Test de efectos ARCH para Holcin (3 rezagos).....	84
Tabla N° 10: Volatilidad para San Carlos .....	88
Tabla N° 11: Resumen general de la volatilidad.....	89
Tabla N° 12: Valor en riesgo: enfoque econométrico .....	92
Tabla N° 13: Valor en riesgo: enfoque de simulación de Montecarlo .....	93
Tabla N° 14: Horizontes de tiempo .....	102
Tabla N° 15: Resultados para el índice IRECU .....	104
Tabla N° 16: Resumen de correlación entre los rendimientos de Ecuindex y el IRECU .....	107
Tabla N° 17: Resumen de la prueba de Mann Whitney .....	108
Tabla N° 18: Resumen de validación mediante prueba Mann Whitney .....	123
Tabla N° 19: Valor en Riesgo .....	129
Tabla N° 20: Rendimiento promedio y volatilidad del portafolio.....	130
Tabla N° 21: Optimización del portafolio teórico .....	132
Tabla N° 22: Matriz de varianza covarianza del portafolio .....	132
Tabla N° 23: Valor en Riesgo .....	134
Tabla N° 24: Rendimiento promedio y volatilidad del portafolio.....	134
Tabla N° 25: Valor en riesgo portafolio no óptimo.....	136
Tabla N° 26: Valor en riesgo portafolio óptimo.....	136

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico N° 1: Simulación de un movimiento browniano .....	17
Gráfico N° 2: Crecimientos del movimiento browniano.....	17
Gráfico N° 3: Simulación de un Movimiento Browniano Geométrico .....	22
Gráfico N° 4: Simulación de un proceso Poisson .....	24
Gráfico N° 5: Funciones en Matlab de Wavelet Haar .....	51
Gráfico N° 6: Análisis Multiresolución a 7 niveles Wavelet Haar .....	51
Gráfico N° 7: Función de escala y la función Wavelet generatriz de Daubechies.....	53
Gráfico N° 8: Análisis Multiresolución a 5 niveles Wavelet de Daubechies.....	53
Gráfico N° 9: Serie de precios y retornos La Favorita .....	62
Gráfico N° 10: Serie de precios y retornos Inversancarlos .....	63
Gráfico N° 11: Serie de precios y retornos Ecuindex.....	64
Gráfico N° 12: Serie de precios y retornos IRECU.....	65
Gráfico N° 13: Resumen estadístico de Ecuindex.....	67
Gráfico N° 14: Resumen estadístico de Invesancarlos.....	68
Gráfico N° 15: Rendimientos cuadrados de Banco de Guayaquil .....	79
Gráfico N° 16: Volatilidad para San Carlos .....	88
Gráfico N° 17: Simulación rendimientos del Ecuindex .....	94
Gráfico N° 18: Serie temporal simulada .....	98
Gráfico N° 19: Variación serie temporal simulada .....	98
Gráfico N° 20: Patrones estacionales .....	99
Gráfico N° 21: Periodograma ECUINDEX .....	100
Gráfico N° 22: Periodograma La Favorita .....	100
Gráfico N° 23: Descomposición para índice bursátil IRECU .....	103
Gráfico N° 24: Rendimientos históricos de La Favorita .....	115
Gráfico N° 25: Simulación de 30 días Cervecería Nacional .....	120
Gráfico N° 26: Simulación de 100 días Banco de Guayaquil .....	120
Gráfico N° 27: Simulación de 500 días Corporación La Favorita .....	121
Gráfico N° 28: Rendimientos simulados de San Carlos.....	122
Gráfico N° 29: Distribución probabilística de San Carlos .....	122
Gráfico N° 30: Evolución del valor del portafolio .....	128
Gráfico N° 31: Distribución probabilística de rendimientos .....	129
Gráfico N° 32: Evolución del valor del portafolio .....	132
Gráfico N° 33: Distribución probabilística de rendimientos .....	133
Gráfico N° 34: Evolución de los portafolios teóricos .....	136
Gráfico N° 35: Resumen estadístico del portafolio óptimo.....	137
Gráfico N° 36: Resumen estadístico del portafolio no óptimo.....	137
Gráfico N° 37: Volatilidad del portafolio.....	139

## RESUMEN EJECUTIVO

En esta investigación se analizó las características estadísticas del mercado accionario ecuatoriano mediante el uso de información histórica de los precios de las acciones e índices de mercado. El primer objetivo fue entender el comportamiento del mercado, su nivel de eficiencia bajo la hipótesis de mercados eficientes del profesor Eugene Fama, y las implicaciones de estas características en la aplicación de la teoría financiera clásica en la toma de decisiones del inversionista. El segundo objetivo fue proponer un modelo matemático para simular de manera razonable la evolución en el tiempo del precio de las acciones, siempre teniendo en cuenta su comportamiento empírico en el mundo real, para analizar diferentes estrategias de construcción de portafolios y sus posibles rendimientos y riesgo. A lo largo de esta investigación fueron utilizadas diferentes teorías matemáticas y herramientas estadísticas para alcanzar los objetivos propuestos, por ese motivo, la investigación inició con una breve exposición de la teoría matemática usada en este trabajo, en el Ensayo I. En la segunda parte, denominada Ensayo II, el análisis estadístico de la información fue realizado para alcanzar el primer objetivo antes mencionado. Finalmente, en el Ensayo III, el modelo matemático para simular la evolución en el tiempo del precio de las acciones fue realizado como una herramienta para analizar el riesgo y el retorno de diferentes estrategias de construcción de portafolios. En cuanto a los resultados obtenidos en esta investigación, se encontró que el mercado accionario ecuatoriano no posee las características estadísticas que son los supuestos de la teoría financiera clásica, en consecuencia, el mercado es ineficiente basados en la hipótesis de mercados eficientes del profesor Eugene Fama. Por otra parte, cuando diferentes estrategias de construcción de portafolios fueron analizadas, se encontró que la teoría clásica del portafolio produce mejores rendimientos y menor riesgo que otras estrategias de inversión, aun cuando los supuestos del modelo son quebrantados; sin embargo, esto no significa que la teoría clásica del portafolio sea la mejor estrategia de inversión, pero es una buena estrategia cuando es difícil aplicar estrategias más complejas.

## **ABSTRACT**

This research analyzed the statistical characteristics of Ecuadorian stock market using its historical information of stock prices and market indexes. The first goal was to understand market's behavior, its level of efficiency based in the efficient market hypothesis of Professor Eugene Fama, and the implications of these characteristics in the application of classic finance theory in investor's decision making. The second goal was to propose a mathematical model to simulate reasonably the evolution in time of stock prices, always considering its empirical behavior in the real world, to analyze different strategies of portfolio choice and their possible returns and risks. Along all this research were used different mathematical theories and statistical tools to achieve the goals proposed, for that reason, the research started with a short exposition of the mathematical theory applied in this work, in the Essay I. In the second part of the research, called Essay II, the statistical analysis of the information is made to achieve the first goal before mentioned. Finally, in the Essay III, the mathematical model to simulate the evolution in time of stock prices was made as a tool to analyze the risk and return of different strategies of portfolio choice. About the results obtained in this research, it was found that the Ecuadorian stock market does not have the statistical characteristics that are the assumptions of classic finance theory; in consequence the market is not efficient based in the efficient market hypothesis of Professor Eugene Fama. By other hand, when different strategies of portfolio choice were analyzed, it was found that the classic portfolio theory produces better returns and less risk than other portfolio choice strategies, even when the assumptions of the model are breaking; however, it does not mean that classic portfolio theory is the best investment strategy, but is a good strategy when is difficult to apply more complex strategies.

## **INTRODUCCIÓN**

Históricamente los mercados de valores han jugado un papel fundamental en el desarrollo económico de las naciones. Las bolsas de valores en todo el mundo, mediante las operaciones que en ellas se realizan, han facilitado a las empresas y gobiernos obtener nuevas fuentes de financiamiento a través de la inversión y la interacción entre los diferentes participantes del mercado. Así mismo, los mercados de valores han sido la cuna de grandes crisis financieras y desequilibrios económicos, ocasionados por muy variados motivos según la situación que cada nación ha afrontado.

Esta realidad no ha pasado desapercibida en el ámbito académico, siendo ya desde hace muchos años atrás, uno de los temas de investigación dentro universidades y centros de investigación de todo el mundo. Los académicos a través de los años han ido proponiendo soluciones a los más diversos problemas que acontecen diariamente en los mercados de valores, tales como: la valoración justa de instrumentos financieros, estrategias de inversión y gestión del riesgo financiero, determinación de costo de capital, etc.

En la ardua labor que los académicos han realizado por brindar un marco científico y técnico a las actividades cotidianas de los mercados de valores, se ha hecho un importante uso de la matemática y la estadística que ha dado como resultado importantes teorías, que, hoy por hoy, nos brindan una explicación lógica de las actividades bursátiles.

Sin embargo, en los últimos años, muchas de estas teorías han sido cuestionadas por no mostrar cierta coherencia con la evidencia empírica y por no brindar explicaciones eficaces a las diferentes situaciones que los mercados de valores han experimentado en medio de las crisis financieras. Esto ha impulsado a una nueva generación de investigadores a reformular la teoría financiera y retomar la lucha por encontrar explicaciones y respuestas claras a las diferentes problemáticas de los mercados de valores.

En el caso ecuatoriano, el mercado de valores, representado por la Bolsa de Valores de Quito y la Bolsa de Valores de Guayaquil, no ha tenido una notoria participación en el desarrollo económico del país. Sin embargo, para estimular su desarrollo es necesario establecer un marco científico y técnico que brinde sustento a las operaciones que se realizan. En este ámbito, no hay gran cantidad de investigaciones científicas actualizadas que exploren la naturaleza del mercado de valores ecuatoriano, la implicación del uso de teorías financieras clásicas en el Ecuador y el modelamiento matemático y estadístico de este mercado en cuestión. Ante esta necesidad, y como primer tópico a investigar, este trabajo plantea el análisis matemático del mercado accionario del Ecuador, a través de tres ensayos.

Ensayo I: Breve repaso de las herramientas matemáticas usadas en las Finanzas Modernas.

Ensayo II: Análisis de la naturaleza y eficiencia del mercado accionario a través del análisis estadístico y econométrico.

Ensayo III: Modelamiento matemático y construcción de portafolios de inversión

A lo largo de los tres ensayos se analizarán problemáticas fundamentales que dado el pequeño tamaño y bajo grado de liquidez del mercado accionario ecuatoriano, se han generado alrededor de actividades bursátiles cotidianas como:

- Análisis de la volatilidad y riesgo.
- Construcción y manejo eficiente de portafolios de inversión.

Sin embargo, antes de abordar una discusión rigurosa de estos problemas, es necesario determinar y analizar las características naturales del mercado accionario, como son:

- Distribución probabilística que siguen los retornos de las acciones y sus implicaciones.
- Nivel de eficiencia del mercado. (grado de predictibilidad en los retornos)
- Existencia de eventos extremos. (alzas y bajas bruscas en los retornos)
- Poca variabilidad teórica de precios de las acciones a causa del bajo volumen de negociaciones.
- Arbitraje en el mercado accionario nacional.

Para el desarrollo de los tres ensayos, se hará uso riguroso de las técnicas matemáticas, econométricas y computacionales a fin de obtener resultados y conclusiones respaldados por la evidencia empírica científicamente analizada.

## ENSAYO I

### REPASO DE MATEMÁTICAS AVANZADAS EN FINANZAS

El objetivo principal de este ensayo es hacer un breve repaso de las teorías matemáticas que le han brindado rigor científico a las finanzas modernas. Es importante realizar esta labor, ya que mediante el uso de estas herramientas cuantitativas, se desarrolla en esencia esta investigación.

Se inicia con una breve exposición de la teoría de la probabilidad dado que, en su lenguaje y principales axiomas, se fundamentan las diversas herramientas estadísticas usadas en el Ensayo II. Así mismo, la teoría de la probabilidad brinda los principales fundamentos para el análisis de procesos estocásticos, que hoy por hoy, son importantes herramientas matemáticas que ayudan a comprender la naturaleza de eventos aleatorios, como la evolución del precio de las acciones en el transcurso del tiempo por citar un ejemplo.

Una vez finalizada la exposición de los temas antes mencionados, se da una rápida revisión a los conceptos de Integral de Lebesgue y espacios  $\mathcal{L}^p$ , como un preámbulo al tratamiento del cálculo estocástico, el análisis de Fourier y la teoría de Wavelets. Hecho esto, se presentan importantes axiomas y resultados del cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales estocásticas, ya que en el Ensayo III, se usan estos criterios matemáticos para modelar la dinámica de los precios de las acciones en el Ecuador. Este ensayo concluye con una breve revisión del análisis de Fourier y la teoría de Wavelets, que posteriormente en el Ensayo II, se

utilizan en el análisis espectral y en el análisis multiresolución de las series temporales, estudiadas en esta investigación.

## **1.1 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD**

### **1.1.1 Conceptos básicos**

#### **1.1.1.1 Experimento aleatorio**

Según (Vanegas, 2008, pág. 18), Un experimento aleatorio es aquel que cumple las siguientes condiciones:

- No es posible predecir su resultado con exactitud.
- Se conocen los posibles resultados antes de realizar el experimento.
- Como mínimo, existen dos posibles resultados.
- El experimento puede repetirse varias veces bajo las mismas condiciones.

Cada posible resultado  $\omega$  del evento aleatorio se conoce como punto muestral, mientras que al conjunto de posibles resultados  $\Omega$  se lo denomina espacio muestral.

#### **1.1.1.2 $\sigma$ -álgebra**

Una  $\sigma$ -álgebra, es el conjunto de todos los eventos significativos que se pueden dar en el experimento aleatorio, es decir, aquellos para los cuales es posible calcular probabilidades.

Por lo expuesto en (Garcia, 2008, pág. 11) y (Vanegas, 2008, pág. 19), una  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$  es una familia de subconjuntos de  $\Omega$  denotada por  $\mathcal{F}$ . La  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  cumple las siguientes condiciones:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Sea  $A_1, A_2, A_3 \dots \infty$  una sucesión de elementos de  $\mathcal{F}$ , se afirma que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- Dado que  $A \in \mathcal{F}$ , el complemento  $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$ , es decir, es la sigma algebra es un conjunto cerrado por complementación.

La combinación  $(\Omega, \mathcal{F})$  se denomina espacio medible, mientras que a los elementos de  $\mathcal{F}$  se los llama conjuntos  $\mathcal{F}$ -medibles.

### 1.1.1.3 $\sigma$ -álgebra de Borel

Sea un espacio muestral definido como  $\Omega = \mathbb{R}$  y sean dos constantes  $a, b \in \mathbb{R}$ , se podría hablar de un evento para el cual su punto muestral  $\omega$  se encuentra dentro del intervalo de la forma  $(a, b]$ . De esta manera se define a la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$  como la  $\sigma$ -álgebra generada por los intervalos  $(a, b]$ , lo cual se denota como  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . (Krinckeborg, 1965, pág. 8)

De manera más formal, (Garcia, 2008, pág. 13) dice que “La  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$  se define como la  $\sigma$ -álgebra engendrada por los conjuntos de la forma  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i < a\}$  con  $a \in \mathbb{R}$ ”.

#### 1.1.1.4 Espacio de probabilidad

Como lo muestra (Vanegas, 2008, pág. 20), se llama medida de probabilidad a la función  $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$  sobre un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Esta función cumple las siguientes condiciones:

- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Sea una sucesión de eventos  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  sobre  $\mathcal{F}$  con  $A_m \cap A_n = \emptyset$  para todo  $m \neq n$  se sabe que  $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

De esta manera se define a la combinación  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  como un espacio de probabilidad compuesto por el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  y una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  en el dominio de  $\mathcal{F}$ .

### 1.1.2 Funciones medibles y variables aleatorias

#### 1.1.2.1 Funciones medibles

Por lo expuesto en (Garcia, 2008, pág. 19), si se tiene que, sean dos espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(E, \mathcal{E})$  y sea una función  $x: \Omega \rightarrow E$  se afirma que  $x$  es una función medible si la inversa  $x^{-1}(A) \in \mathcal{F}$  para todo evento  $A \in \mathcal{E}$ .

#### 1.1.2.2 Variables aleatorias

En general, se dice, que una función  $x$  definida sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{F})$  que toma valores de otro espacio medible  $(E, \mathcal{E})$ , es una variable aleatoria si es medible.

### 1.1.2.3 Caso particular

En muchas aplicaciones prácticas es común trabajar bajo los siguientes axiomas. Sean dos espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , y sea una función  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  medible si  $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$  para toda  $x \in \mathbb{R}$  (Vanegas, 2008, pág. 22).

### 1.1.3 Funciones de distribución

#### 1.1.3.1 Funciones de distribución y densidad para variables aleatorias continuas.

Como lo muestra (Vanegas, 2008, pág. 23), sea un espacio fijo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y sea una variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (la cual es  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible), se define la distribución de probabilidad de la variable aleatoria  $X$  como:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} = \mathbb{P}\{X^{-1}((-\infty, x])\}$$

Donde se cumple que:

- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(\infty) = 1$

Si  $X$  es una variable aleatoria continua, existe una función de densidad  $f_X(x)$  de manera que  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$

### 1.1.3.2 Medida de probabilidad discreta

Sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F})$  numerable, y sea  $\mathbb{P}$  una función no negativa definida como  $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$ , de esa forma se redefine la medida de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

### 1.1.4 Esperanza matemática

La esperanza matemática de una variable aleatoria, dicho de manera intuitiva, es el promedio de la variable analizada. Como ya se definió anteriormente, una variable aleatoria toma valores determinados en cada observación realizada, si bien se puede obtener un valor promedio de los eventos observados, a medida que crece el número de eventos, el valor promedio tiende progresivamente hacia un valor que se define como valor esperado de la variable o esperanza matemática de la variable aleatoria.

Bajo lo expuesto en (Mendenhall, Scheaffer, & Wackerly, 1986), sea una variable aleatoria continua  $X$  y sea  $f_X(x)$  su función de distribución, la esperanza matemática de una variable aleatoria continua se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

De manera análoga, sea una variable aleatoria discreta  $X$  y sea  $f_X(x)$  su función de distribución, la esperanza matemática de una variable aleatoria discreta se define como:

$$E(X) = \sum_x x f_X$$

Así mismo se puede definir al varianza de una variable aleatoria, tomando en cuenta las siguientes definiciones:

Sea  $X$  una variable aleatoria continua, y sea  $g(X)$  una función de  $X$ , la esperanza matemática de la función  $g(X)$  se define como

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(X)f_X(x)dx$$

Que en caso de ser una variable aleatoria discreta seria

$$E[g(X)] = \sum_X g(X)f_X(x)$$

Si se define a la varianza como una función  $g(X) = (X - E(X))^2$ , se podría definir la varianza de una variable continua como

$$\text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f_X(x) dx$$

Y definir la varianza de una variable discreta como

$$\text{VAR}(X) = \sum_X (X - E(X))^2 f_X(x) dx$$

### 1.1.5 Esperanza condicionada

Como se muestra en (Krinckeberg, 1965, pág. 133) , sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , si se considera una partición en  $\Omega$  , compuesta por sucesos  $A_1, A_2, A_3 \dots$ , y un evento en particular  $B$ , se podría pensar en la esperanza matemática del evento  $B$  condicionado a la probabilidad de ocurrencia de algún evento  $A_i$  con  $P(A_i) > 0$ , lo cual se denota como  $P(B|A_i)$ . Extendiendo este criterio, se puede establecer la  $\sigma$ -

álgebra  $\mathcal{G}$  generada por los sucesos  $A_i$  y hablar de la esperanza matemática del evento  $B$  condicionada a  $\mathcal{G}$ , lo cual se denota por  $P(B|\mathcal{G})$  y que cumple que:

$$P(B|\mathcal{G}) = \sum_i P(B|A_i) c_{A_i}$$

Donde  $P(B|\mathcal{G})$  no es un valor numérico específico sino que es, obviamente, una variable aleatoria  $\mathcal{G}$  – medible la cual cumple la siguiente condición:

$$P(BG) = \int_G P(B|\mathcal{G}) dP \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

De forma que, si la partición  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  la variable aleatoria  $P(B|\mathcal{G})$  es una constante  $P(B)$ , mientras que si la partición es  $\mathcal{G} = A$  con  $\Omega - A$  y  $P(A) > 0$ , la variable aleatoria  $P(B|\mathcal{G})$  va tomando valores  $P(B|A_i)$ .

Por lo antes expuesto, sea una variable aleatoria  $x$ , su esperanza matemática condicionada a una hipótesis  $A$  se define como el número o valor dado por:

$$E(x|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A x dP \quad \text{con } P(A) > 0$$

De manera que, como lo dice (Krinckeborg, 1965), “Bajo la interpretación frecuencial, ello se obtiene realizando una larga serie de experimentos aleatorios y calculando la media de los valores de  $x$  para aquellos experimentos en que tiene lugar  $A$ ”. De forma que, si se considera la partición  $(A_i)$  en  $\Omega$  la esperanza condicionada vendría dada por:

$$E(x) = \sum_i E(x|A_i) P(A_i)$$

Más formalmente, si se toma la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}$  generada por los sucesos  $A_i$ , la esperanza matemática condicionada de la variable  $x$  con respecto a  $\mathcal{G}$  viene dada por:

$$E(x|\mathcal{G}) = \sum_i E(x|A_i)C_{A_i}$$

De manera tal que se cumple que  $E(x|\mathcal{G}) = 0$  cuando  $P(A_i) = 0$  y que  $E(x|\mathcal{G})$  es una variable aleatoria  $\mathcal{G}$ -medible.

## 1.2 PROCESOS ESTOCÁSTICOS

### 1.2.1 Motivación

Los procesos estocásticos, definidos intuitivamente, son una herramienta matemática que nos permite caracterizar y estudiar el comportamiento de fenómenos aleatorios a través del tiempo. Es por este motivo, que históricamente los procesos estocásticos han sido utilizados, entre muchas otras cosas, en el análisis del comportamiento aleatorio de los mercados bursátiles. Para esta investigación, los procesos estocásticos juegan un papel fundamental, ya que bajo el contexto de estos, se definirá el comportamiento del mercado accionario ecuatoriano en los dos siguientes ensayos.

### 1.2.2 Definición

Se define como proceso estocástico a una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in T\}$  que está definida sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , que se encuentra parametrizada por un conjunto finito o infinito  $T$  (tiempo), y que va tomando valores de otro espacio  $(E, \mathcal{E})$  llamado espacio de estados. En otras palabras, un proceso estocástico se puede definir como un mapeo  $X(t): \Omega \rightarrow E$  (Rincón, 2012, pág. 1).

Sabiendo que el conjunto  $\{X_t : t \in T\}$  está definido sobre un espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , si se toma al espacio de estados  $(E, \mathcal{E})$  como el espacio  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , se puede redefinir al proceso estocástico como el mapeo  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de forma que para cada  $t \in T$  la función  $X_t(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es medible dado que cumple  $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Así mismo, se define a la función  $t \rightarrow X_t(\omega)$  como la trayectoria del proceso (Vanegas, 2008, pág. 33).

### 1.2.3 Procesos estocásticos estacionarios

Se dice que un proceso estocástico  $\{X_t: t \geq 0\}$  es estacionario, sí para cualquier instante de tiempo, el vector  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  tiene la misma distribución conjunta que el vector  $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$  con  $h > 0$ . Así mismo, se dice que un proceso estocástico  $\{X_t: t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios, si para cada instante de tiempo, los incrementos  $X_t - X_s$  (con  $s < t$ ) tienen la misma distribución que los incrementos  $X_{t+h} - X_{s+h}$  (con  $h \neq 0$ ).

#### 1.2.3.1 Procesos estacionarios de segundo orden

Otro tipo de procesos estacionarios, son los llamados procesos de segundo orden débilmente estacionarios. Sea un proceso  $\{X_t: t \geq 0\}$ , equivalentemente denotado por  $X(t)$ , se dice que es de segundo orden si  $EX^2(t) < \infty$  para cada  $t \in T$ .

La función promedio, varianza y autocovarianza del proceso de segundo orden se define como se muestra respectivamente:

- $\mu_x(t) = E[X(t)]$  con  $t \in T$
- $\text{Var } X(t) = E[X_t - \mu_x]^2$  con  $t \in T$
- $\text{Cov}(X(t), X(t+k)) = E[(X_t - \mu_x)(X_{t+k} - \mu_x)]$  con  $t \in T$   $k > 0$

En el proceso de segundo orden débilmente estacionario, por definición, el promedio y la varianza son constantes en el tiempo, mientras que la covarianza no depende del instante en que se calcule sino del rezago  $k$  que se evalúe.

#### 1.2.4 Filtración

Sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , donde  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra generada por la información relevante para el experimento, se define a una filtración como el conjunto de sub  $\sigma$ -álgebras  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  que componen  $\mathcal{F}$ , de forma tal que  $\mathbb{F}$  no es otra cosa más que una sucesión creciente de sub  $\sigma$ -álgebras tales que  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ , es decir,  $\mathcal{F}_t$  muestra toda la información disponible sobre el evento aleatorio hasta el momento  $t$ . Es de esta manera que mediante una filtración se puede analizar la evolución del proceso estocástico a través del tiempo (Bass, 2011, pág. 2).

Se denota a un espacio de probabilidad equipado con una filtración como  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$

### 1.2.4.1 Proceso estocástico adaptado a una filtración

Un proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  está adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  si  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible en cada  $t \geq 0$ . La idea básica de esto radica en que la variable aleatoria  $X_t$  depende exclusivamente de la información disponible hasta el momento  $t$ .

### 1.2.5 Martingalas

Por lo expuesto en (Bass, 2011, pág. 13), se dice que un proceso estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  es una martingala adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  si cumple las siguientes condiciones:

- $(X_t)_{t \in T}$  es integrable, es decir,  $E[X_t] \leq \infty$
- $(X_t)_{t \in T}$  está adaptado a la filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$
- la esperanza condicionada  $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t$ . Otra manera equivalente de expresar esta condición de martingala, es decir que la esperanza del proceso  $X_{t+1}$  condicionada respecto a todas sus realizaciones pasadas, es su valor actual.

$$E[X_{t+1} | X_0, X_1 \dots X_t] = X_t$$

En caso de que la igualdad  $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] = X_t$  no se cumpla, bajo los siguientes casos se dice que:

- Si  $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq X_t$  es una súper martingala
- Si  $E[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \geq X_t$  es una sub martingala

## 1.2.6 Movimiento Browniano

### 1.2.6.1 Definición

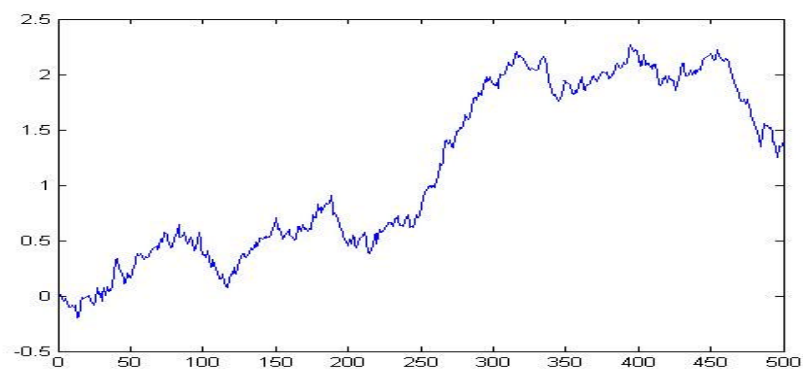
Como lo muestra (Bass, 2011, pág. 6) , sea un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  equipado con una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  , se define al proceso estocástico  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  como un movimiento browniano estándar unidimensional si cumple las siguientes condiciones:

- El proceso inicia con  $W_0 = 0$  con probabilidad 1.
- Para cada instante de tiempo  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \cdots t_n$ , del proceso  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  , los incrementos  $W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  son estocásticamente independientes.
- Sean instantes de tiempo  $0 \leq s < t$ , del proceso  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  , los incrementos se distribuyen normalmente, es decir,  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

Otra manera equivalente de definir al movimiento browniano es mediante la función  $W: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sujeta a las condiciones antes mencionadas.

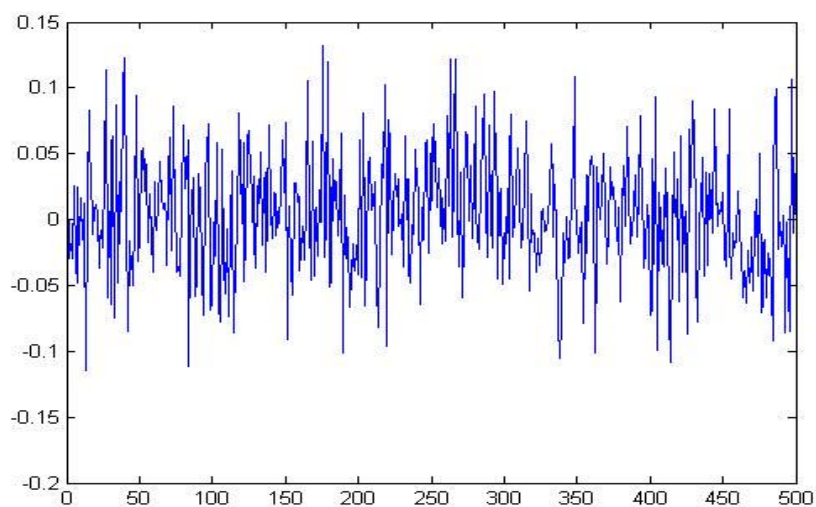
### 1.2.6.2 Simulación de un Movimiento Browniano

Con el uso de Matlab, se realizó una simulación de un movimiento browniano correspondiente a 500 instantes de tiempo.

**Gráfico N° 1: Simulación de un movimiento browniano**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bass, Richard, 2011pág.12

Así mismo, se presenta la gráfica de los crecimientos del movimiento browniano

**Gráfico N° 2: Crecimientos del movimiento browniano**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bass, Richard, 2011pág.13

### 1.2.6.3 Movimiento Browniano y la propiedad de martingala

Como lo muestra (Bass, 2011, pág. 13), si el movimiento browniano estándar  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , se dice que es una martingala ya que cumple que:

- Es integrable  $E[W_t] < \infty$
- $\{W_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso adaptado a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , es decir que cada  $W_t \in \mathcal{F}_t$
- $E[W_{t+1} | \mathcal{F}_t] = W_t$

El tercer principio de martingala tiene plena coherencia con la característica de crecimientos estocásticamente independientes del movimiento browniano. Dado que los crecimientos son no correlacionados, las realizaciones pasadas del proceso no influyen en su valor futuro, por ello es coherente que el valor esperado del movimiento browniano, condicionado a sus realizaciones pasadas, sea igual al valor actual del proceso.

## 1.2.7 Caminata aleatoria

### 1.2.7.1 Caminata Aleatoria

Una caminata aleatoria es un proceso estocástico  $\{X_n: n = 1, 2, \dots\}$  que evoluciona a través del tiempo de conformidad con la expresión:

$$X_n = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

En donde  $\varepsilon_n$  son shocks puramente aleatorios que se distribuyen normalmente con media cero y varianza uno y son independientes entre sí.

De manera análoga, (Vanegas, 2008, pág. 46) muestra que si la caminata aleatoria está definida sobre el intervalo de tiempo  $[0, t]$ , se sabe que cada evento o shock aleatorio sucede cada  $\Delta t = \frac{t}{n}$  unidades de tiempo, de modo que el modelo de caminata se podría definir como:

$$\begin{aligned} X_n\left(\frac{t}{n}\right) &= \varepsilon_1 \\ X_n\left(\frac{2t}{n}\right) &= X_n\left(\frac{t}{n}\right) + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ X_n(t) &= X_n\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Cabe notar que la caminata aleatoria cumple con la propiedad de martingala y presenta crecimientos no correlacionados.

### 1.2.7.2 Variación cuadrática media de la caminata aleatoria

(Vanegas, 2008, pág. 48) muestra que la variación cuadrática de la caminata aleatoria  $\{X_n\}$  se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n^2(t) &= \sum_{i=1}^n \left[ X_n\left(\frac{it}{n}\right) - X_n\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \right]^2 \\ \mathcal{V}_n^2(t) &= \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i-1})^2 \end{aligned}$$

Por tanto, tomando la esperanza del proceso, se sabe que la variación cuadrática de la caminata aleatoria corresponde al tiempo total del proceso

$$\mathcal{V}_t^2 = E[\mathcal{V}_n^2(t)] = n \frac{t}{n} = t$$

### 1.2.7.3 Caminata aleatoria continua y movimiento browniano

Si se define la caminata aleatoria como  $W_{n\Delta t} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$  y sabiendo que su variación cuadrática media es  $t$ , mediante el teorema del límite central, es posible obtener su versión continua y demostrar que el movimiento browniano es el límite de una caminata aleatoria discreta (Vanegas, 2008, pág. 48).

$$W_n(t) = \sqrt{t} \frac{W_n - E[W_n]}{\sqrt{\text{VAR}[W_n]}} \xrightarrow{D} W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \text{ Cuando } n \rightarrow \infty$$

### 1.2.7.4 Variación cuadrática media del Movimiento Browniano

En base a la definición anterior y lo expuesto en (Rincón, 2012, pág. 244), se puede observar que la variación cuadrática media del proceso se definiría como

$$\mathcal{V}_t^2 = E \sum_{i=1}^n [(\Delta W_{t_i})^2]$$

$$\mathcal{V}_t^2 = \sum_{i=1}^n E[(\Delta W_{t_i})^2]$$

$$\mathcal{V}_t^2 = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = t$$

## 1.2.8 Movimiento Browniano Geométrico

### 1.2.8.1 Definición

Como lo afirma (Vanegas, 2008, pág. 39), El movimiento browniano estándar no es conceptualmente suficiente para describir la dinámica del comportamiento de las diversas variables financieras por motivos tales como:

- Los precios no inician en cero
- El retorno promedio podría ser diferente de cero
- La varianza no es estrictamente proporcional al tiempo

Ante esta situación, y conservando el principio de distribución normal de los retornos, se define como un buen modelo para describir la dinámica de los precios a la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

En donde  $dS_t$  es la variación del precio de un activo en el momento  $t$ , que se distribuye normalmente con  $(\mu, \sigma)$ . La fórmula, que se denomina como movimiento browniano geométrico, y que describe la trayectoria de los precios, se obtiene resolviendo la ecuación diferencial antes escrita con el uso del lema de Ito. El resultado se muestra a continuación:

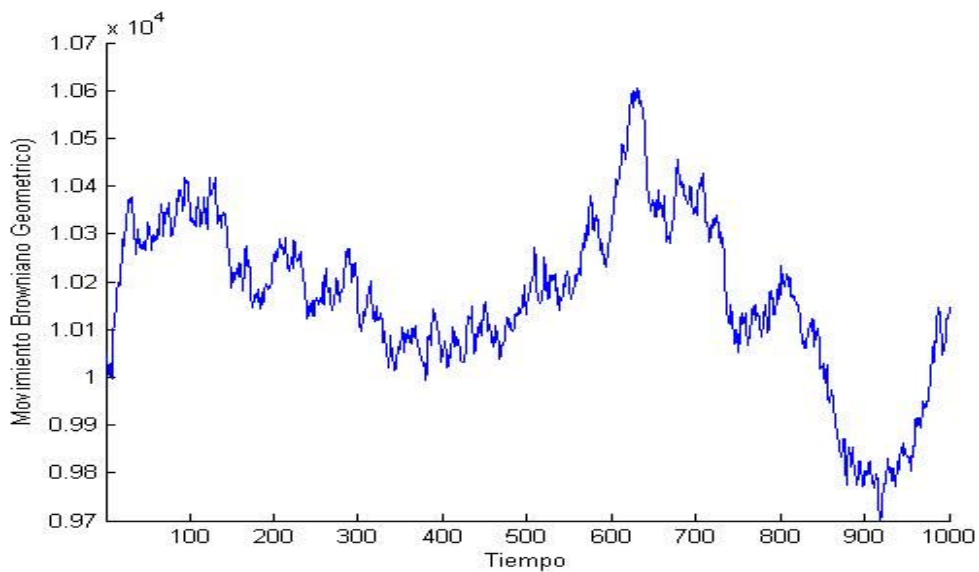
$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

Un breve repaso de cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales estocásticas se desarrolla en las siguientes secciones, por este motivo, se omitió el desarrollo de la solución de esta ecuación diferencial estocástica.

### 1.2.8.2 Simulación de un Movimiento Browniano Geométrico

En esta sección se simula la trayectoria del precio de un portafolio teórico con valor inicial  $S_0 = \$10.000$  en donde el rendimiento del activo  $S_0 \sim \mathcal{N}(0.05, 0.05)$  para 1000 instantes de tiempo (días). La simulación se realiza con el paquete Matlab.

**Gráfico N° 3:** Simulación de un Movimiento Browniano Geométrico



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bass, Richard, 2011 pág.15

## 1.2.9 Proceso de Poisson

### 1.2.9.1 Definición

Dicho de forma intuitiva, el proceso de Poisson es un proceso estocástico de conteo del número de eventos que se dan a través del tiempo, es decir, el proceso cambia de valores solo en ciertos instantes de tiempo y no manera continua como un Movimiento Browniano. Es por este motivo que el proceso de Poisson es denominado como un proceso de saltos.

Como lo muestra (Rincón, 2012, pág. 116) Sean los tiempos  $T_1, T_2, T_3, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con  $\exp(\lambda)$ , se define el proceso de Poisson  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  con intensidad  $\lambda$  como  $N_t = \max(n: T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t)$ . Las variables aleatorias  $T_n$  son los intervalos de tiempo entre los cuales se dio un salto u ocurrió un evento, de tal manera que  $N_t$  es el número de eventos que se dieron hasta el instante  $t$ .

### 1.2.9.2 Propiedades del proceso de Poisson

Según lo expuesto en (Rincón, 2012, pág. 119), el proceso de Poisson tiene las siguientes propiedades

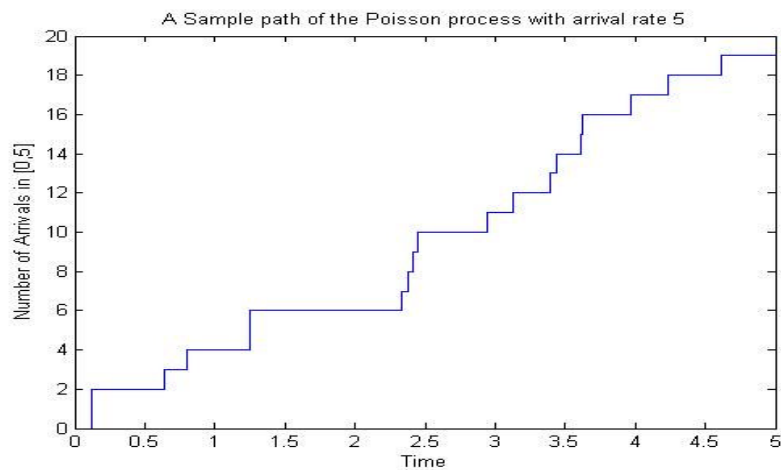
- $N_t$  sigue una distribución de Poisson  $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

- Sean dos instantes de tiempo  $s < t$ , se afirma que  $N_t - N_s$  son estocásticamente independientes (crecimientos independientes).
- El proceso de Poisson cumple la propiedad de Markov ya que
 
$$E(N_{t+1} | N_1, N_2 \dots N_t) = N_t$$
- $E(N_t) = \lambda t$
- $VAR(N_t) = \lambda t$

### 1.2.9.3 Simulación de un proceso de Poisson

En esta sección, en Matlab se simulo un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda = 5$

**Gráfico N° 4:** Simulación de un proceso Poisson



**Elaborado por:** A Boris Bermúdez

**Fuente:** Luis Rincón, 2012 pág.127

#### 1.2.9.4 Proceso de Poisson no homogéneo

En el proceso de Poisson convencional se utiliza el parámetro de intensidad  $\lambda > 0$  como una constante, por lo cual, el proceso evoluciona en el tiempo de con un parámetro homogéneo para cada instante de tiempo. A pesar de esto, bajo ciertas circunstancias, esto puede resultar una condición restrictiva, por lo cual el proceso de Poisson no homogéneo plantea  $\lambda$ , no como una constante, sino como una función del tiempo  $\lambda(t)$ .

Como lo muestra (Rincón, 2012, pág. 129) El proceso de Poisson no homogéneo  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  con intensidad  $\lambda(t)$  cumple las siguientes condiciones:

- $N_t$  sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\Lambda(t)$  de manera que 
$$P(N_t = n) = e^{-\Lambda(t)} \frac{\Lambda(t)^n}{n!}$$
 donde  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$
- Sean dos instantes de tiempo  $s < t$ , se afirma que  $N_t - N_s$  son estocásticamente independientes (crecimientos independientes).
- Sean dos instantes de tiempo  $s < t$ , se afirma que los crecimientos  $N_t - N_s$  siguen una distribución de Poisson con  $(\Lambda(t) - \Lambda(s)) = \int_s^t \lambda(u) du$

## 1.3 INTEGRAL DE LEBESGUE Y ESPACIOS $\mathcal{L}^p$

### 1.3.1 Motivación

En esta sección se aborda de forma muy breve concepto de integral de Lebesgue para así dar paso al concepto de espacios de Lebesgue. Es importante abordar estos criterios ya que brindan soporte teórico en el tratamiento de cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales estocásticas, análisis de Fourier y teoría de Wavelets.

Por cuanto el objetivo fundamental de este trabajo es hacer uso de estas herramientas cuantitativas en el análisis bursátil, se deja por cuenta de la literatura especializada en análisis real y funcional el desarrollo de tópicos más profundos y formales.

### 1.3.2. Integral de Lebesgue

Por lo expuesto en (Al-Gwaiz, 2007, pág. 394:396), sea una  $\mathcal{M}$  una  $\sigma$ -álgebra sobre un conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}$  y sea una medida positiva  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  se define el espacio medible  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Si ahora se considera una función simple medible y no negativa  $s: X \rightarrow [0, \infty)$  tal que pueda escribir como

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$$

En donde  $a_i \geq 0$  representan los diferentes valores de  $s$ , y donde  $\mathcal{X}_{A_i}$  es una función característica para  $A_i \in \mathcal{M}$  (también se cumple que  $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$ ). Se define la integral de  $s$  sobre el conjunto  $X$  y respecto a  $\mu$  como

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$$

Ahora, si se considera un conjunto  $E \in \mathcal{M}$ , la integral sobre  $E$  respecto a  $\mu$  se define como

$$\int_E s d\mu = \int_X s \mathcal{X}_E d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i \cap E)$$

Bajo los hechos antes citados, y de manera más general como lo se muestra en (Al-Gwaiz, 2007, pág. 396), si se considera cualquier función medible  $f: X \rightarrow [0, \infty]$ , se define la integral de  $f$  sobre  $E$  con respecto a la medida  $\mu$  como

$$\int_E f d\mu = \sup. \left\{ \int_E s d\mu : 0 \leq s \leq f \text{ y } s \text{ es siempre medible} \right\}$$

A esto se le denomina como la integral de Lebesgue de la función  $f$  sobre  $E$  con respecto a una medida  $\mu$ .

Otra manera análoga, de representar esta integral es mediante la siguiente definición: sea un espacio medible  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , en el cual hay una función medible  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  y una sucesión creciente de funciones simples positivas  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que cumplen que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , entonces se define la integral de

Lebesgue de  $f$  sobre  $X$  con respecto a una medida  $\mu$  como  $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$ . (Chamorro, 2010, pág. 146)

### 1.3.3. Espacios $\mathcal{L}^p$ y $\mathcal{L}^2$

Por lo expuesto en (Chamorro, 2010, pág. 218), se define el espacio  $\mathcal{L}^p$ , donde  $p \geq 1$ , como el espacio de las funciones medibles  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  para las cuales su norma  $\|f\|_p < \infty$ . La norma de una función  $f$  se define como  $\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$ .

El espacio  $\mathcal{L}^2$  o espacio de las funciones de cuadrado Lebesgue integrables, se define como el conjunto de funciones medibles  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  para las cuales  $\|f\|_2 < \infty$ . Se llama espacio de las funciones cuadrado integrables ya que la norma se define como  $\|f\|_2 = \left( \int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$ .

## 1.4 CÁLCULO ESTOCÁSTICO Y ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

### 1.4.1 Integrales estocásticas

#### 1.4.1.1 Integrales estocásticas de procesos simples

Bajo lo tratado en (Bass, 2011, pág. 64) y (Rincón, 2012, pág. 273), sea un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ , se desea definir la integral de un proceso  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  con respecto a un movimiento browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  como

$$\int_0^t X_t dW_t$$

Considerado que  $X_t$  es un proceso simple definido como  $X_t = \sum_{i=1}^N x_i 1_{t_i, t_{i+1}}(t)$  que es cuadrado integrable, es decir, pertenece al espacio  $\mathcal{L}^2$ , ya que  $\|X\|_2 = (E|X|^2)^{1/2} < \infty$ . Y sí de la misma forma se considera que el proceso  $W_t$  es cuadrado integrable ya que  $\|W\|_2 = (E|W|^2)^{1/2} = t < \infty$ , es posible definir la integral estocástica de un proceso simple  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  con respecto a un movimiento browniano  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  como

$$\int_0^t X_t dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

Si ahora se considera la integral  $v = \int_0^t X_t dW_t$ , la cual posee componentes definidos sobre el espacio  $\mathcal{L}^2$ , es posible afirmar que la integral estocástica es un proceso que cumple con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - v \right]^2 = 0$$

#### 1.4.1.2 Integrales estocásticas para procesos generales

Bajo lo expuesto en (Oksendal, 2000, pág. 29) y (Rincón, 2012, pág. 277) Si ahora se considera una proceso  $X(t) \in \mathcal{L}^2$  para la cual existe una sucesión de procesos simples  $X_n(t)$  que cumple que  $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \int_0^t |X(t) - X_n(t)|^2 dt \right] = 0$ , se define la integral estocástica de  $X(t)$  con respecto a un movimiento browniano como

$$\int_0^t X(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X_n(t) dW_t$$

#### 1.4.2 Formula de Ito

Bajo la teoría tratada en (Oksendal, 2000, pág. 43) y (Rincón, 2012, pág. 286) la fórmula de Ito establece básicamente el concepto de diferenciación estocástica, siendo en pocas palabras, una versión estocástica de la regla de la cadena del cálculo convencional. La fórmula de Ito nace fundamentalmente a partir de una serie de Taylor de segundo de orden y viene dada por

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dW_t$$

Se presenta a continuación un breve detalle de esta fórmula. Sea un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, \mathbb{P})$ , el proceso de Ito se define como

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

El cual puede ser escrito en forma diferencial como  $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$

Es el proceso que posee las siguientes características:

- El proceso inicia con un valor  $X_0 = x_0$ .
- Está compuesto por dos funciones  $\mu_s = \mu(X_s, s)$  y  $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$  que claramente son  $[0, t] \times \mathbb{R}$ , por tal motivo son  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  medibles.
- $\int_0^t |\mu_s| ds$  es una integral de Riemann.
- $\int_0^t \sigma_s dW_s$  es una integral estocástica respecto a un movimiento browniano.
- $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$  es una función cuadrado integrable ya que  $\int_0^t E[\sigma_s^2] ds < \infty$  y por tanto la varianza es finita.
- $\mu_s = \mu(X_s, s)$  es el componente determinístico de tendencia.
- $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$  es el componente de difusión.

Si se considera una función dos veces diferenciable  $Y = f(X_t, t)$ , la cual depende del tiempo y del proceso de Ito, el trabajo consiste en analizar el diferencial  $df(X_t, t)$  de

la función  $f(X_t, t)$ , para lo cual se puede definir la variación como  $f(X_t, t) - f(x_0, 0) = \sum_{i=1}^n f(X_i, t_i) - f(X_{i-1}, t_{i-1})$ . Si se aplica una expansión de Taylor de segundo orden a la expresión anterior, se obtiene la fórmula de Ito dada por

$$f(X_t, t) = f(x_0, 0) + \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_s^2} \sigma_s^2 \right) dt + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s dW_s$$

Que puede ser escrita en su forma diferencial como

$$df(X_t, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma_t dW_t$$

### 1.4.3 Ecuaciones diferenciales estocásticas

#### 1.4.3.1 Definición

Se define a la ecuación diferencial estocástica como

$$\frac{dX_t}{dt} = b_t(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \quad \text{con } b_t(X_t, t) \in \mathbb{R} \quad \sigma(X_t, t) \in \mathbb{R}$$

Que simplemente es una notación más general del proceso de Ito con las características mencionadas anteriormente. Como es lo lógico, el resultado de una ecuación diferencial estocásticas es un proceso estocástico.

#### 1.4.3.2 Existencia y Unicidad

Como se muestra en (Oksendal, 2000, pág. 66), si los coeficientes  $b_t(X_t, t)$  y  $\sigma(X_t, t)$  de la ecuación diferencial estocástica satisfacen las dos siguientes condiciones:

Condición de Lipschitz en la variable  $X$  : los coeficientes  $b_t(X_t, t)$  y  $\sigma(X_t, t)$  satisfacen

$$|b_t(x, t) - b_t(y, t)|^2 + |\sigma_t(x, t) - \sigma_t(y, t)|^2 \leq k|x - y|^2 \text{ constante } k > 0$$

Condición de crecimiento en la variable  $X$  : los coeficientes  $b_t(X_t, t)$  y  $\sigma(X_t, t)$  satisfacen

$$|b_t(x, t)|^2 + |\sigma_t(x, t)|^2 \leq k(1 + |x|^2) \text{ constante } k > 0$$

Se afirma que existe un proceso estocástico solución a la ecuación diferencial, el cual está adaptado a una filtración, es continuo y está acotado en  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

### 1.4.3.3 Ejemplos

En esta sección se desarrollan dos ejemplos sencillos de solución a ecuaciones diferenciales estocásticas.

#### Ejemplo 1: Movimiento browniano geométrico

Si se considera que la ecuación diferencial estocástica que describe las trayectorias del precio un activo  $S$  en cada instante de tiempo  $t$  está definida como

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Si ahora se considera una función  $f = \ln S_t$  por el lema de Ito se puede ver fácilmente que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Tomando en cuenta esos resultados, si se aplica el lema de Ito en la ecuación (1) se podrá ver que

$$\begin{aligned} d\ln S_t &= \left( 0 + \frac{1}{S_t} \mu_t S_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} S_t \sigma_t dW_t \\ d\ln S_t &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (2) \end{aligned}$$

La ecuación (2) define los rendimientos logaritmos de los precios de un activo, ahora, si se desea conocer la ecuación que describe la trayectoria de los precios, es necesario integrar la ecuación (2) de forma que:

$$\begin{aligned} \int_0^t d \ln S_s &= \int_0^t \left( \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_0^t \sigma dW_s \\ \ln S_t - \ln S_0 &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \ln \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \\ S_t &= S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Ejercicio adicional

Este ejercicio fue obtenido de (Vanegas, 2008, pág. 83) y resuelto por el autor de esta investigación. Se muestra la solución a la ecuación diferencial estocástica  $dS_t = \left(\frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t}\right) dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t$  considerando el cambio de variable  $f(S_t, t) = 2\sqrt{S_t}$

Por el lema de Ito se calculan las derivadas parciales de  $f(S_t, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{S_t}} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{2S_t^{3/2}}$$

Aplicando el lema de Ito sobre la ecuación diferencial estocástica se obtiene que

$$df_t = \left( \frac{1}{\sqrt{S_t}} \left( \frac{1}{4}\sigma^2 - a\sqrt{S_t} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t \left( -\frac{1}{2S_t^{3/2}} \right) \right) dt + \left( \sigma\sqrt{S_t} \left( \frac{1}{\sqrt{S_t}} \right) \right) dW_t$$

$$df_t = -ad_t + \sigma dW_t \quad (1)$$

Para determinar la forma del proceso  $f_t$ , se calcula la integral de (1)

$$\begin{aligned} \int_0^t df_s &= \int_0^t -ad_s + \int_0^t \sigma dW_s \\ \int_0^t d(2\sqrt{S_t}) &= -a \int_0^t d_s + \sigma \int_0^t dW_s \\ 2\sqrt{S_t} - 2\sqrt{S_0} &= -at + \sigma W_t \\ S_t &= \left( \frac{2\sqrt{S_0} - at + \sigma W_t}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

#### **1.4.3.4 Estimación de parámetros**

En la práctica, estimar los diferentes parámetros para una ecuación diferencial estocástica, de forma eficiente, no siempre es sencillo. El objetivo es obtener parámetros estadísticamente eficientes y próximos a los posibles parámetros poblacionales del proceso estocástico analizado, para lo cual, es muy cotidiano el uso de herramientas estadísticas como el Método de Máximo Verosimilitud o el Método Generalizado de Momentos dependiendo del comportamiento de los datos analizados. A pesar de esto, existen ecuaciones diferenciales estocásticas, para las cuales resulta muy difícil estimar sus parámetros eficientes y que además tiene un costo computacional y matemático bastante alto.

### **1.5 ANÁLISIS DE FOURIER**

#### **1.5.1 Motivación**

El análisis de Fourier, llamado así por su desarrollo inicial en los trabajos del matemático francés Joseph Fourier, radica en la demostración de que cualquier función continua podría ser producida por una suma infinita de ondas seno y coseno, dando lugar al concepto de Serie de Fourier y posteriormente a la Transformada de Fourier. El análisis de Fourier ha tenido un impacto significativo en el desarrollo de la ciencia e ingeniería, entre sus aplicaciones más importantes se pueden destacar la solución de ecuaciones en derivadas parciales, el procesamiento de señales e

imágenes, aplicaciones estadísticas, etc. Para esta investigación, en particular, se analizará su utilidad como una herramienta estadística que permite analizar las series de tiempo financieras en el dominio de frecuencia.

### 1.5.2 Conceptos fundamentales

Funciones Periódicas: Se dice que una función  $f(x)$  es periódica, si existe algún número positivo  $p$  para el cual  $f(x + p) = f(x)$ . Las funciones trigonométricas seno y coseno son ejemplos de funciones periódicas ya que cumplen un ciclo o periodo de  $2\pi$ . (Kreyszig, 2003, pág. 24)

Funciones Pares e impares: Se dice que una función  $f(x)$  es par si  $f(-x) = f(x)$ , y se dice que una función es impar si  $f(-x) = -f(x)$ . (Kreyszig, 2003, pág. 38)

Funciones Ortogonales: como se muestra en (Zill & Cullen, 2006, pág. 273), sean dos funciones  $f_1$  y  $f_2$ , definidas en el intervalo  $[a, b]$ , se dice que son ortogonales si su producto interno es igual cero. Matemáticamente expresado como

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$$

Conjunto ortogonal: como se muestra en (Zill & Cullen, 2006, pág. 274), sea un conjunto de funciones con valores reales  $\{\phi_1(x), \phi_2(x) \cdots \phi_n(x)\}$  se dice que es

ortogonal, si son ortogonales dos a dos, es decir si su producto interno es igual a cero.

Matemáticamente expresado como

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \quad \text{con } m \neq n$$

Norma de una función: como se muestra en (Zill & Cullen, 2006, pág. 274), la norma

o longitud de una función  $\phi_n(x)$  se define como  $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2}$

Conjuntos ortonormales: Se dice que un conjunto de funciones  $\{\phi_n(x)\}$  es ortonormal

si su norma es igual a uno  $\|\phi_n(x)\| = 1$ . Profundizando este concepto, si se considera

un conjunto de funciones ortogonales  $\{f_n(x)\}$  en el intervalo  $[a, b]$ , tales que  $f_n(x) \in$

$\mathcal{L}^2$ , se sabe que  $\int_a^b [f_n(x)]^2 = A_n < \infty$  es finito, por cuanto, si ahora se considera un

conjunto de funciones definidas por  $\phi_n(x) = \frac{f_n(x)}{\sqrt{A_n}}$  se tendrá que  $\|\phi_n(x)\| =$

$\sqrt{\int_a^b \phi_n^2} = 1$ . De esta forma se dice que el conjunto  $\{\phi_n(x)\}$  es ortogonal y

normalizado en el intervalo  $[a, b]$ . (Spiegel, 1976, pág. 134)

### 1.5.3 Series de Fourier

#### 1.5.3.1 Primer concepto

Bajo la teoría tratada en (Spiegel, 1976, pág. 132) y (Zill & Cullen, 2006, pág.

278), sea una función  $f(x)$ , la cual tiene algún periodo  $P = 2L$  y también es

integrable según Lebesgue en el intervalo  $[-L, L]$ . Se define la serie de Fourier de la función  $f(x)$  como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Donde los coeficientes de la serie se definen por

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

### 1.5.3.2 Series de Fourier de senos y cosenos

Como se expone en (Zill & Cullen, 2006, pág. 283), cuando se analiza la serie de Fourier para funciones pares o impares, es posible simplificar el desarrollo de la serie de la siguiente manera:

Serie de Fourier de coseno: sea una función par  $f(x)$ , la cual tiene algún periodo  $P = 2L$  y está definida sobre un intervalo  $[-L, L]$ , la serie de Fourier para la función  $f(x)$  se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

Serie de Fourier de seno: sea una función impar  $f(x)$ , la cual tiene algún periodo  $P = 2L$  y está definida sobre un intervalo  $[-L, L]$ , la serie de Fourier para la función  $f(x)$  se define como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

### 1.5.3.3 Series complejas de Fourier

Como se expone en (Haberman, 2003, pág. 136), es posible definir la serie de Fourier para una función  $f(x)$  en su forma compleja mediante el uso de la fórmula de Euler. Sea  $i$  la unidad imaginaria definida como  $i = \sqrt{-1}$ , la fórmula de Euler establece que para un número real  $x$ , que representa un ángulo en el plano complejo, se cumple que  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$  y  $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$ . Mediante estas fórmulas, después de un sencillo manejo algebraico, es posible ver que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Teniendo en cuenta este resultado, y continuando con las operaciones algebraicas sobre la fórmula original de una serie de Fourier, es posible definir la serie compleja de Fourier como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L}$$

## 1.5.4 Integral de Fourier y transformadas de Fourier

### 1.5.4.1 Introducción

En esta sección se extiende de forma muy breve el criterio de series de Fourier para funciones no periódicas. Se inicia con el concepto de integral de Fourier para posteriormente abordar las transformadas de Fourier.

### 1.5.4.2 Integral de Fourier

Bajo lo expuesto en (Zill & Cullen, 2006, pág. 375), sea una función  $f(x)$  definida sobre un intervalo  $[-L, L]$ , si se escribe su serie de Fourier incluyendo las definiciones de los parámetros dentro de la fórmula se puede ver la serie como

$$f(x) = \frac{1}{2l} \left( \int_{-L}^L f(t) dt \right) \Delta\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \int_{-L}^L f(t) \cos \alpha_n t dt \right) \cos \alpha_n x + \left( \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \alpha_n t dt \right) \operatorname{sen} \alpha_n x \right] \Delta\alpha$$

Donde  $\alpha_n = n\pi/L$  y  $\Delta\alpha = \pi/L$

Si se pone en consideración que  $L \rightarrow \infty$ , después de cierto trabajo algebraico, es posible desarrollar el concepto de Integral de Fourier, donde claramente  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  van tomando valores de forma continua y dejan de estar restringidos a múltiplos enteros  $\alpha_n = n\pi/L$ . La integral de Fourier se define como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x] d\alpha$$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x \, dx$$

De forma equivalente, también se desarrolla el concepto de integral de Fourier para funciones pares e impares.

Se define la integral de Fourier para funciones pares en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  como la integral coseno de Fourier dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x \, dx$$

Se define la integral de Fourier para funciones impares en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  como la integral seno de Fourier dada por:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x \, d\alpha$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx$$

Así mismo, es posible considerar la fórmula de Euler para definir la integral compleja de Fourier como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{-i\alpha x} \, d\alpha$$

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} \, dx$$

#### 1.5.4.3 Transformadas de Fourier

La transformada de Fourier nace fundamentalmente a partir del criterio de la integral Fourier, y es, en términos sencillos, la herramienta fundamental que nos permite tomar una función  $f(x)$  y transformarla en una nueva expresión  $\hat{f}(\alpha)$ . En términos prácticos, en muchas aplicaciones de estadística e ingeniería, se utiliza este criterio tomar una señal  $f(t)$  dependiente del tiempo y transformarla en una nueva expresión  $\hat{f}(\omega)$  en el dominio de frecuencia (Zill & Cullen, 2006, pág. 380).

A continuación se muestran las principales transformadas de Fourier:

- Transformada de Fourier  $\mathfrak{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = F(\alpha)$
- Transformada inversa de Fourier  $\mathfrak{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha = f(x)$
- Transformada seno de Fourier  $\mathfrak{F}_s\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\text{sen } \alpha x dx = F(\alpha)$
- Transformada seno inversa de Fourier  $\mathfrak{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha)\text{sen } \alpha x d\alpha = f(x)$
- Transformada coseno de Fourier  $\mathfrak{F}_c\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\text{cos } \alpha x dx = F(\alpha)$
- Transformada inversa coseno de Fourier  $\mathfrak{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha)\text{cos } \alpha x d\alpha = f(x)$

#### 1.5.4.4 Transformada discreta de Fourier

En muchas situaciones prácticas, la información sobre el evento a estudiar se presenta de forma discreta a ciertos intervalos de tiempo, ante esta situación, el análisis de Fourier debe extender sus criterios a funciones discretas y por ello se desarrolla la transformada discreta de Fourier. De forma práctica, se utiliza la transformada discreta de Fourier para trasladar información discreta en el dominio del tiempo al dominio de frecuencia.

Según (Proakis & Manolakis, 2007, pág. 403), sea una sucesión  $x_n = \{x_n \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ , definida sobre el intervalo  $0 \leq n \leq N - 1$ , su transformada de Fourier se define como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad \text{con } n, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Este resultado se conoce como la Transformada Discreta de Fourier. Así mismo, su inversa está definida como

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad \text{con } n, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

#### 1.5.4.5 Transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier es básicamente una serie de algoritmos que permite calcular de forma eficiente la transformada discreta de Fourier. Su desarrollo fundamental surge el procesamiento de señales, donde existe una amplia literatura sobre dichos algoritmos, mientras que su aplicación en análisis estadístico respeta los mismos criterios del análisis de Fourier tratados en esta sección.

## 1.6 TEORÍA DE WAVELETS

### 1.6.1 Motivación

La Teoría de Wavelets nace como un refinamiento de las herramientas del análisis de Fourier, bajo la premisa de que las funciones seno y coseno no siempre son modelos eficientes para estudiar los fenómenos naturales que se presentan en ciencias e ingeniería. El estudio básico de la Teoría de Wavelets radica en descomponer una función en pequeñas ondas y recabar información más precisa y detallada sobre el fenómeno estudiado (Walker, 2008).

### 1.6.2 Definición

Por lo expuesto en (Pathak, 2009, pág. 12), sea una función  $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  y sean dos constantes  $a, b \in \mathbb{R}$   $a \neq 0$ , se define la función de traslación de  $\psi$  en  $b$  como  $\psi(x - b)$ , y se define la función de dilatación de  $\psi$  por  $a$  por  $\psi\left(\frac{x}{a}\right)$ . Ahora, se dice que  $\psi(x)$  es una función Wavelet o Wavelet generatriz si cumple la condición de admisibilidad que afirma que  $C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty$  donde  $\Psi(w)$  es la transformada de Fourier de  $\psi(x)$ .

Bajo los principios antes mencionados, si  $\psi(x)$  es una Wavelet madre o generatriz, las ondas Wavelets generadas por  $\psi(x)$  son una familia funciones trasladadas y dilatadas mediante la función

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

### 1.6.3 Transformada Wavelet continua

Por lo expuesto en (Pathak, 2009, pág. 12), si se considera ahora una función  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , se puede definir la transformada Wavelet continua de  $f(x)$  como

$$W_{a,b} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

### 1.6.4 Transformada discreta Wavelet

Como se muestra en (Pathak, 2009, pág. 15), sea una Wavelet madre  $\psi(x)$ , si se consideran los parámetros  $a, b$  como valores fijos enteros  $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$  con  $a_0 > 1$  y  $b_0 > 0$ , y si de la misma forma se consideran  $m, n \in \mathbb{Z}$ , se define a las ondas Wavelets generadas por  $\psi(x)$  como la familia funciones trasladadas y dilatadas mediante la función

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{\frac{-m}{2}} \psi\left(\frac{x - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) = a_0^{\frac{-m}{2}} \psi(a_0^{-m} x - nb_0)$$

ahora se toma una función  $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , la transformada discreta Wavelet se define como

$$W_{m,n} = \int_{\mathbb{R}} a_0^{-\frac{m}{2}} f(x) \psi\left(\frac{x - nb_0 a_0^m}{a_0^m}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} a_0^{-\frac{m}{2}} f(x) \psi(a_0^{-m}x - nb_0) dx$$

## 1.6.5 Análisis Multiresolución

### 1.6.5.1 Una definición intuitiva

El Análisis Multiresolución consiste básicamente en algoritmos que permiten estimar eficientemente los coeficientes wavelets en el computador. La idea básica es descomponer la señal o serie en tiempo discreto mediante diversas frecuencias de corte para analizar la serie a diferentes escalas. Dicho de forma poco rigurosa, el Análisis Multiresolución busca aproximar una función  $f(x)$  a través distintos niveles de resolución  $(f_1, f_2, f_3 \dots)$  (Walker, 2008, pág. 16).

El proceso del análisis Multiresolución, explicado de forma intuitiva, es el siguiente: una función  $f(x)$ , en un nivel de resolución  $j$ , es aproximada mediante  $f_j(x)$ ; para un nivel de resolución  $j + 1$ , es aproximada mediante  $f_{j+1}(x) = f_j(x) + d_j(x)$ , es decir, cada nivel  $j + 1$  va incorporando los detalles del nivel anterior  $j$ , de forma que es posible resumir el Análisis Multiresolución como  $f(x) = f_j(x) + \sum_{k=j}^{\infty} d_k(x)$

### 1.6.5.2 Definición Formal

El Análisis Multiresolución es, como se muestra en (Krantz, 2005, pág. 432) y (Oppenheim, 2007, pág. 42), una sucesión creciente de subespacios cerrados  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  dentro del espacio  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  que cumple las siguientes condiciones:

- $\{V_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una sucesión creciente, es decir,  $V_j \subset V_{j+1} \forall j \in \mathbb{Z}$
- $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$
- $f(x) \in V_0$  siempre que  $f_j(2^j x) \in V_j$
- Existe una función de escalonamiento  $\phi(x - k)_{k \in \mathbb{Z}}$  que genera el espacio  $V_0$ , es decir  $V_0 = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) | f(x) = \sum_k c_k \Phi(x - k)\}$

### 1.6.5.3 Transformada discreta Wavelet considerando el Análisis Multiresolución

Retomando el primer criterio de transformada discreta Wavelet y lo expuesto en (Burrus, Gopinath, & Guo, 1998, pág. 17) ,si se considera ahora una Wavelet madre  $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  que genera una familia Wavelet mediante  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$   $j, k \in \mathbb{Z}$  , tomando en cuenta la definición del Análisis Multiresolución, se puede representar la transformada discreta de Wavelet mediante la expresión

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \Phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

En donde  $c_{j,k}$  son los coeficientes de escala,  $d_{j,k}$  son los coeficientes Wavelet y  $j_0$  denotan los componentes que genera el espacio  $V_0$ .

### 1.6.6 Tipos Wavelets

Hasta el momento se ha hablado de Wavelets de manera general, sin definir la función  $\psi(x)$  que brinda sentido a la transformada wavelet y al análisis Multiresolución. Pues bien, esta función ha sido definida de muchas maneras por diversos investigadores de esta disciplina, dando lugar así, a una gran variedad de tipos y familias de Wavelets, como por ejemplo: la wavelet de Haar, de Morlet, de Daubechies, etc.

La variedad de tipos y familias de Wavelets es grande, y cada una es aplicable según la información que se analice, en virtud de ello, solo se mencionarán dos de las más famosas Wavelets, de Haar y de Daubechies.

#### Wavelet de Haar

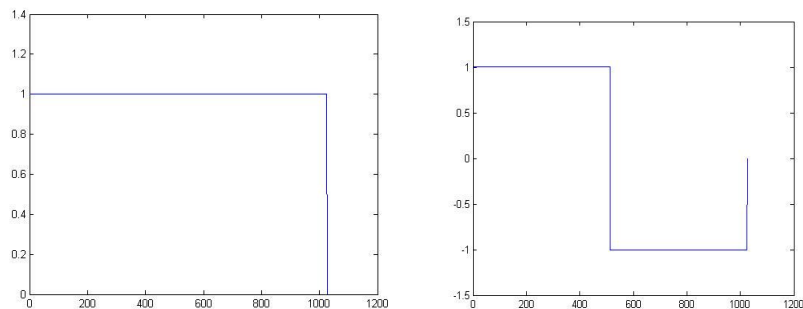
Esta es quizás la más sencilla y fundamental Wavelet. Por lo tratado en (Krantz, 2005, pág. 426), se define la Wavelet de Haar mediante una función de escalonamiento y una función Wavelet generatriz, expresadas respectivamente como

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1) \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2[ \\ -1 & \text{si } x \notin [1/2, 0[ \end{cases}$$

Produciendo estas funciones en Matlab, se verá respectivamente la gráfica de las funciones.

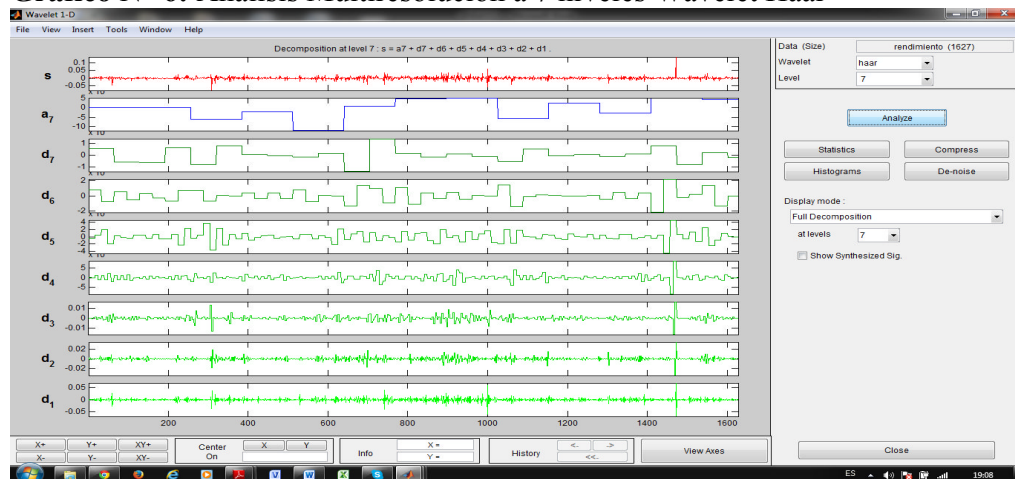
**Gráfico N° 5: Funciones en Matlab de Wavelet Haar**



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Krantz, Steven. 2005 pág.425

De forma que, realizando un Análisis Multiresolución a 7 niveles, de una serie de ruido aleatoria simulada, se tendrá la siguiente descomposición:

**Gráfico N° 6: Análisis Multiresolución a 7 niveles Wavelet Haar**



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Krantz, Steven. 2005 pág.425

### Wavelet de Daubechies

Esta es una de las Wavelets más utilizadas por su versatilidad, sin embargo, esta Wavelet no tiene funciones  $\Phi(x)$  y  $\psi(x)$  específicamente definidas, sino que varían según el orden de la Wavelet utilizada, dando lugar así a familias de Wavelet de Daubechies que comporten características similares para el orden utilizado en el análisis. Un ejemplo claro de la versatilidad de las funciones  $\Phi(x)$  y  $\psi(x)$  para la Wavelet de Daubechies, es la demostración de que la Wavelet de Haar no es más que una Wavelet de Daubechies de orden uno.

De forma general, como se muestra en (Vries, 2006, pág. 2) se puede definir a la Wavelet de Daubechies de orden  $N$  de la siguiente forma. Para  $N \in \mathbb{N}$ , la Wavelet de Daubechies de orden  $N$  es una función  $\psi = \psi_N \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  definida por

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} -1^k h_{2N-1-k} \Phi(2x - k)$$

En donde  $h_0, h_1 \dots h_{2N-1} \in \mathbb{R}$  son los coeficientes de filtración que cumplen las siguientes condiciones

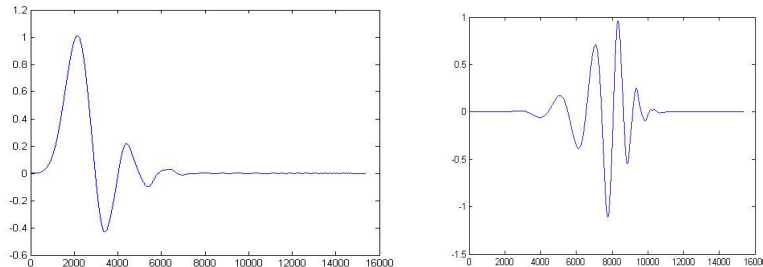
- $\sum_{k=0}^{2N-1} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Si se considera  $l = 0, 1 \dots N - 1$  la condición  $\sum_{k=2l}^{2N-1+2l} h_k h_{k-2l} =$ 

$$\begin{cases} 1 & \text{si } l = 0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases}$$

De manera que se define la forma de la función de escala  $\Phi(x)$  de la Wavelet de Daubechies como  $\Phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \Phi(2x - k)$ .

Mediante Matlab se produjo las gráficas de la función de escala y la función Wavelet generatriz, respectivamente, para una Wavelet de Daubechies de orden ocho.

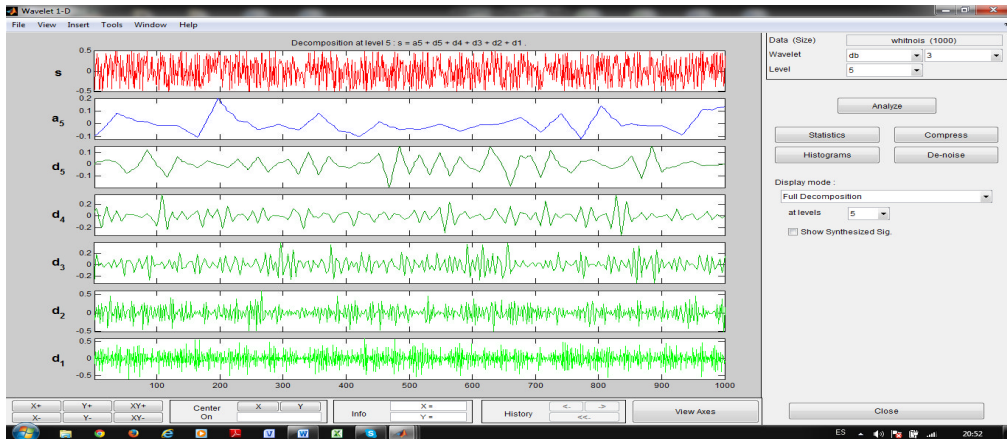
**Gráfico N° 7:** Función de escala y la función Wavelet generatriz de Daubechies



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Vries, Andreas. 2006 pág.2

De forma que, realizando un Análisis Multiresolución a 5 niveles, mediante la Wavelet de Daubechies de orden 3 para una serie de ruido aleatoria simulada, se tendrá la siguiente descomposición:

**Gráfico N° 8:** Análisis Multiresolución a 5 niveles Wavelet de Daubechies



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Vries, Andreas. 2006 pág.2

### **1.6.7 Wavelets en estadística y finanzas**

En las últimas décadas el uso de wavelets en la estadística y finanzas computacionales ha crecido fuertemente, pues su poder para determinar componentes estacionales y recabar información sobre eventos aleatorios, los ha integrado dentro las nuevas herramientas del modelamiento estocástico en finanzas. Algunas aplicaciones importantes de esta teoría se pueden observar en los trabajos de Ramsey y Lampart (1999), Lee (2004), Fernández (2005) en los cuales se abordan temas como:

- Comportamiento entre los mercados accionarios
- Modelo CAPM para mercados emergentes
- Relaciones entre variables macroeconómicas

## **ENSAYO II**

### **EFICIENCIA Y NATURALEZA DEL MERCADO ACCIONARIO**

En este ensayo, mediante el análisis estadístico y econométrico se analizara el comportamiento y las características del mercado accionario, para posteriormente concluir sobre su nivel de eficiencia bajo el contexto de la Hipótesis de Mercados Eficiencias de Eugene Fama.

#### **2.1 DATOS**

La información para realizar el análisis econométrico fue generada por la Bolsa de Valores de Quito y la Bolsa de Valores de Guayaquil. La información proporcionada por estas organizaciones fue la siguiente:

- Índice bursátil Ecuindex (BVQ): es un indicador, ajustado a los movimientos de capital y dividendos, que muestra la evolución del mercado total en función de las cotizaciones de las acciones más representativas en la Bolsa de Valores de Quito. (periodo enero 2005—noviembre 2013)
- Índice bursátil IRECU (BVG): Es un indicador, ajustado a los movimientos de capital y dividendos, que muestra la evolución del mercado total en función de las cotizaciones de las acciones más representativas en la Bolsa de Valores de Guayaquil. (periodo enero 2004—diciembre 2013).

- Índice bursátil IPECU (BVG): Es un indicador exclusivamente de precios que no considera los movimientos de capital y dividendos. Muestra la evolución de los precios del mercado. (periodo enero 2004—diciembre 2013)
- Dividendos y movimientos de capital: información proporcionada tanto por BVQ como por BVG.
- Serie Histórica de precios de las acciones que componen los índices bursátiles Ecuindex e IRECU (periodos enero 2005—noviembre 2013 y enero 2004—diciembre 2013 respectivamente).
- Así mismo, de la página web de la bolsa de valores de Quito, se obtuvo la serie histórica de precios de otras acciones que participan en el mercado. (periodo enero 2005—noviembre 2013)
- Toda esta información se encuentra en términos de días.

Dado que las series históricas de precios de acciones individuales, proporcionadas por las dos organizaciones, sólo muestran los precios observados en el mercado, fue necesario ajustar los precios por los movimientos de capital y pagos de dividendos. Esta labor fue realizada utilizando la siguiente formula:

$$P_r = \frac{(P_o \times N_a) - D}{N_B}$$

Donde  $P_r$  es el precio real,  $P_o$  es el precio observado en el mercado,  $N_a$  es el número de acciones antes de la emisión de nuevas acciones y pago de dividendos,  $N_B$  es el número de acciones después del evento y  $D$  es el dividendo efectivo pagado por la empresa emisora de las acciones.

De la misma forma, no existía un registro continuo de precios de algunas de las acciones participantes en BVQ, esto se debía a que en ciertos días dichas acciones no se negociaron o su monto negociado no superó la base establecida para marcar precio. Por ello, se completó aquellos días faltantes de registro con el último precio marcado de dichas acciones (precio de referencia). Esta labor es muy cotidiana en la literatura especializada y ampliamente utilizada en instituciones financieras (Araujo, 2008).

Finalmente, después de realizar todos estos ajustes, dada la gran cantidad de información, se seleccionó como muestra a las siguientes empresas e índices para realizar el análisis:

- Índice bursátil Ecuindex: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Índice bursátil IRECU: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Corporación La Favorita: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Inversancarlos: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Banco de Guayaquil: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Holcin: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- San Carlos: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Cervecería Nacional: serie histórica de cotizaciones y rendimientos
- Industrias Ales: serie histórica de cotizaciones y rendimientos

Se seleccionaron estas empresas ya que sus registros históricos muestran que sus acciones son negociadas con una frecuencia razonable, a comparación de otras empresas participantes en el mercado que en muy pocas ocasiones registran transacciones. Así

mismo, cuando se hable de rendimientos o retornos, se refiere a los rendimientos logarítmicos calculados mediante  $\text{Ln} \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$  que son equivalentes a las variaciones de las series temporales originales.

## 2.2 HIPÓTESIS DE LOS MERCADOS EFICIENTES

En 1970, el profesor Eugene Fama publicó su investigación titulada “Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work” en el Journal of Finance. En este trabajo el profesor Fama define a un mercado eficiente como aquel en el que el precio de las acciones refleja la información disponible en el mercado y se ajusta rápidamente a la nueva información; de esa manera la posibilidad de arbitraje se eliminaría rápidamente, los inversionistas pagarían un precio justo por esas acciones y el mercado sería perfectamente competitivo.

En teoría, la llegada de nueva información al mercado es totalmente impredecible, y por tanto los precios futuros de las acciones y sus rendimientos son impredecibles y aleatorios. Esto implica que, en un mercado eficiente, los inversionistas no pueden tomar ventaja del mercado a menos de que posean información privilegiada.

Bajo este principio el profesor Fama definió los siguientes tipos de eficiencia:

- Eficiente en forma fuerte: los precios de las acciones reflejan la información disponible en el mercado y se ajustan rápidamente a la llegada de nueva información. Así mismo, no existe información privilegiada.
- Eficiente en forma Semi-Fuerte: los precios de las acciones reflejan la información pública (información conocida por todos los participantes del mercado). Es decir, los inversionistas no pueden obtener beneficios extraordinarios a partir del análisis fundamental (análisis de información pública de las empresas, noticias de conocimiento público, etc.).
- Eficiencia en forma débil: Los precios de las acciones reflejan toda su información pasada. En otras palabras, los inversionistas no pueden obtener beneficios analizando las series históricas de precios de las acciones, pues ya están reflejadas en el precio actual y es imposible predecir precios y retornos futuros.

Así mismo, el profesor Fama también definió los siguientes supuestos:

- I. Inexistencia de costos de transacción.
- II. Los inversionistas pueden obtener la información disponible en el mercado sin costo alguno.
- III. Todos los inversionistas están de acuerdo con el efecto de la información sobre el precio de las acciones.

### 2.2.1 Implicaciones estadísticas de la Hipótesis de Mercados Eficientes

Retomando los criterios tratados en el Ensayo I, matemática y estadísticamente la hipótesis de mercados eficientes afirma que los precios de las acciones siguen una caminata aleatoria, es decir

$$X_t = X_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$$

En donde:

- $X_t$  es la realización del proceso estocástico en el momento  $t$ , en este caso, el precio de la acción en dicho instante de tiempo
- $X_0$  es el valor de la acción en el momento 0.
- $\varepsilon_t$  es un shock puramente aleatorio
- Usualmente, en finanzas se asume que  $\varepsilon_t \sim \text{IDD } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

En consecuencia, si los precios siguen una caminata aleatoria, sería coherente pensar que los rendimientos  $\varepsilon_t$  cumplen las siguientes características:

- Los rendimientos  $\varepsilon_t \sim \text{IDD } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- En teoría, la caminata aleatoria en primeras diferencias  $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$ , es un proceso estacionario tanto en media como en varianza.
- Los rendimientos cumplen la propiedad de Markov, es decir,  $E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_0] = \varepsilon_{t-1}$

- Los incrementos de los precios de las acciones, los retornos, están serialmente no correlacionados, es decir, son estocásticamente independientes.
- No existen eventos o ciclos estacionales predecibles.

Otra forma de analizar matemática la predictibilidad de los precios de las acciones y sus retornos, es mirar su comportamiento como un proceso de martingala y un proceso de martingala en diferencia respectivamente. Bajo el principio de martingala, que afirma que la esperanza matemática de un proceso  $Y$ , condicionado a sus realizaciones pasadas, es su valor actual, expresado matemáticamente como  $E(Y_{T+1}|Y_0, Y_1, \dots, Y_t) = Y_t$ , es una forma alterna para definir la incapacidad de predecir de los precios futuros. Mientras que mediante un proceso de martingala en diferencia, definido matemáticamente como  $E(Y_{t+u} - Y_t) = E(Y_{t+u}) - E(Y_t) = Y_t - Y_t = 0$ , es posible definir la incapacidad de predecir los retornos futuros de las acciones. Este un enfoque menos restrictivo que el modelo de caminata aleatoria, pues flexibiliza ciertas condiciones estadísticas para el mercado, sin embargo, en este investigación no se hará uso de este enfoque, sino que no limitará a la comprobación de los supuestos estadísticos clásicos de la Hipótesis de Mercados Eficientes antes mencionados.

### **2.3 Análisis gráfico y pruebas de bondad de ajuste**

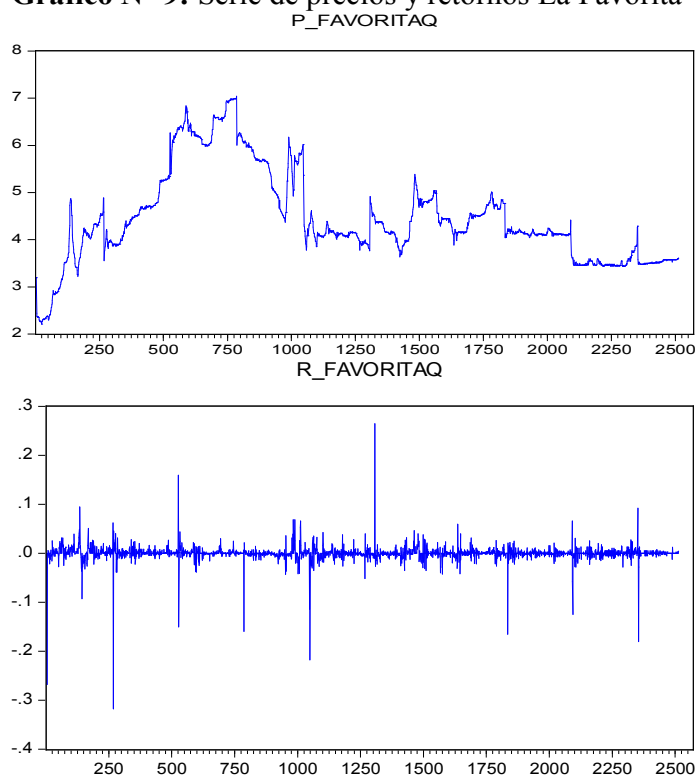
En esta sección se obtendrán las gráficas de series historias de precios y rendimientos de las acciones e índices bursátiles que componen la muestra que se va a analizar. Así mismo,

mediante la prueba de normalidad de Jarque Vera, se comprobará si los rendimientos siguen o no una distribución normal. Para el desarrollo de esta sección se hará uso de los paquetes estadísticos Minitab16 y Eviews8.

### 2.3.1 Grafica de las series de precios y retornos

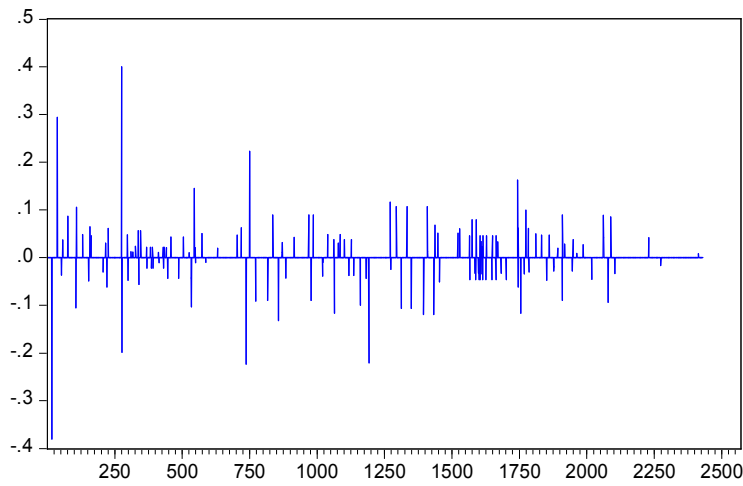
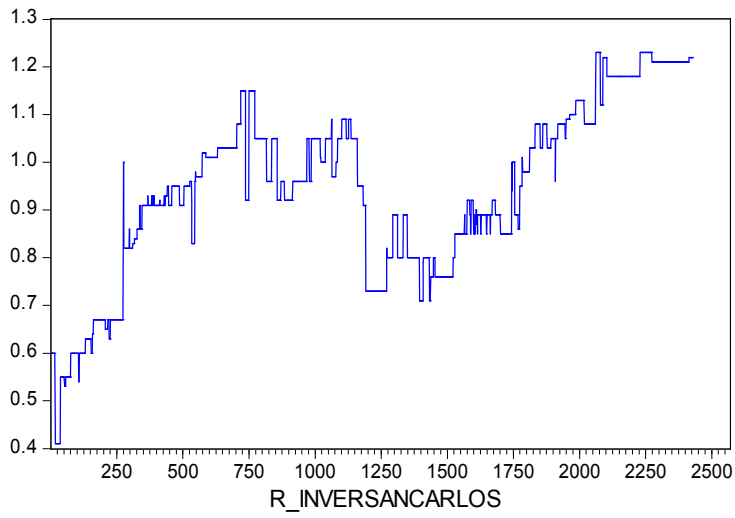
Dada la cantidad de las series y graficas obtenidas, se muestra solamente las gráficas de las series de dos empresas, la Favorita e Inversancarlos, y las gráficas de los índices bursátiles Ecuindex e IRECU. (Las gráficas para las demás compañías las se remite a los anexos de esta investigación)

**Gráfico N° 9:** Serie de precios y retornos La Favorita



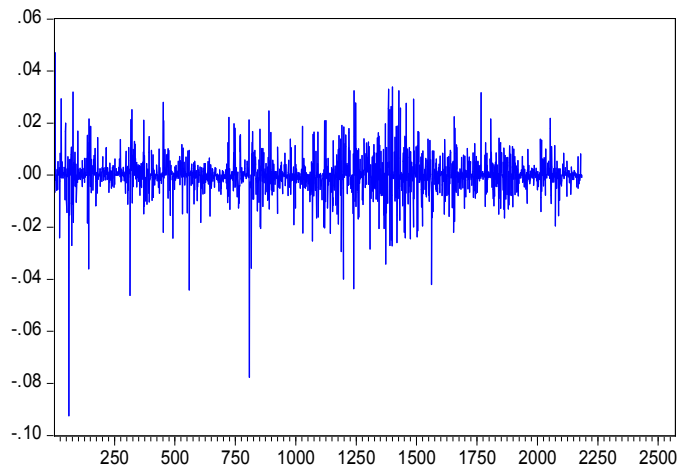
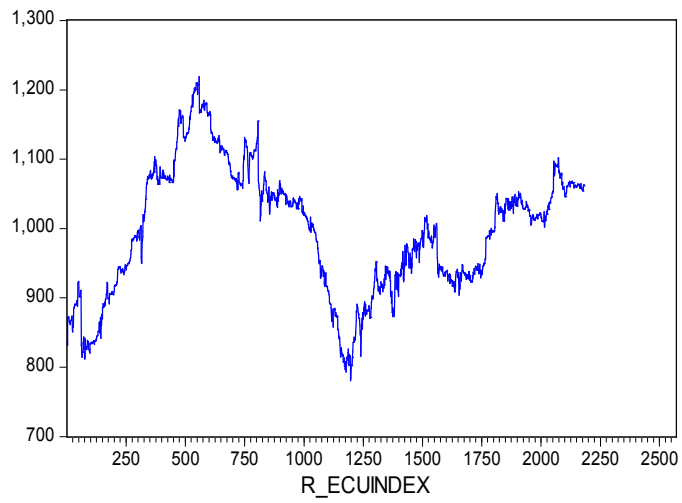
**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

**Gráfico N° 10:** Serie de precios y retornos Inversancarlos  
P\_INVERSANCARLOS



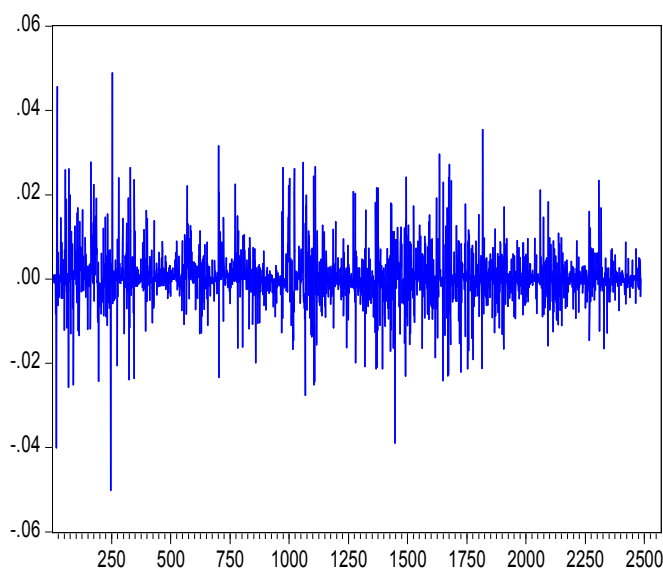
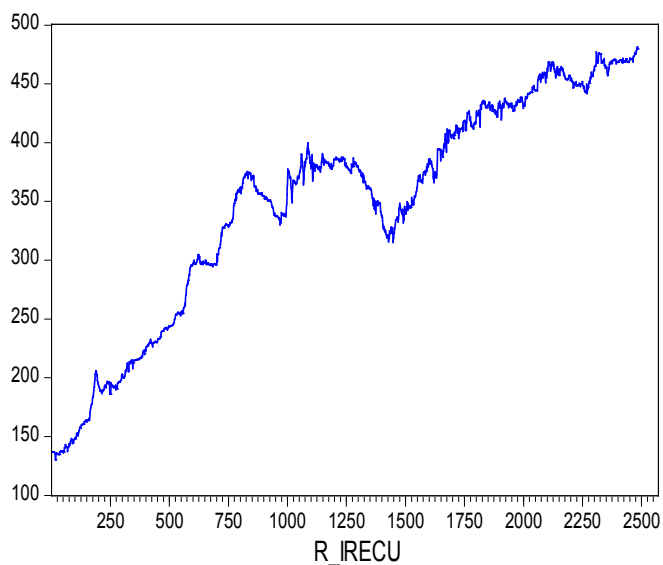
**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

**Gráfico N° 11: Serie de precios y retornos Ecuindex**  
L\_ECUINDEX



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

**Gráfico N° 12:** Serie de precios y retornos IRECU  
I\_IRECU



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

El fenómeno del bajo volumen de transacciones del mercado accionario ecuatoriano es claramente visible en el comportamiento de los precios históricos de Inversancarlos, que por causa del bajo nivel de negociaciones de este activo, los precios no muestran una evolución continua y existen largos periodos de inactividad

y de rendimientos cero. Este comportamiento se repite en la mayoría de empresas que participan en este mercado.

Por otra parte, los precios de las acciones de Corporación La Favorita, una de las empresas más negociadas en este mercado, muestra un mejor desempeño; a pesar de esto, aún existen periodos de inactividad y rendimientos cero con cierta frecuencia.

Para el caso de los índices bursátiles, que por definición, son un resumen de la evolución del mercado nacional, se puede ver una evolución de precios y rendimientos más continua aunque aún no desaparecen periodos que registran rendimientos cero.

Otros dos puntos interesantes por recalcar sobre el comportamiento de los índices bursátiles son los siguientes:

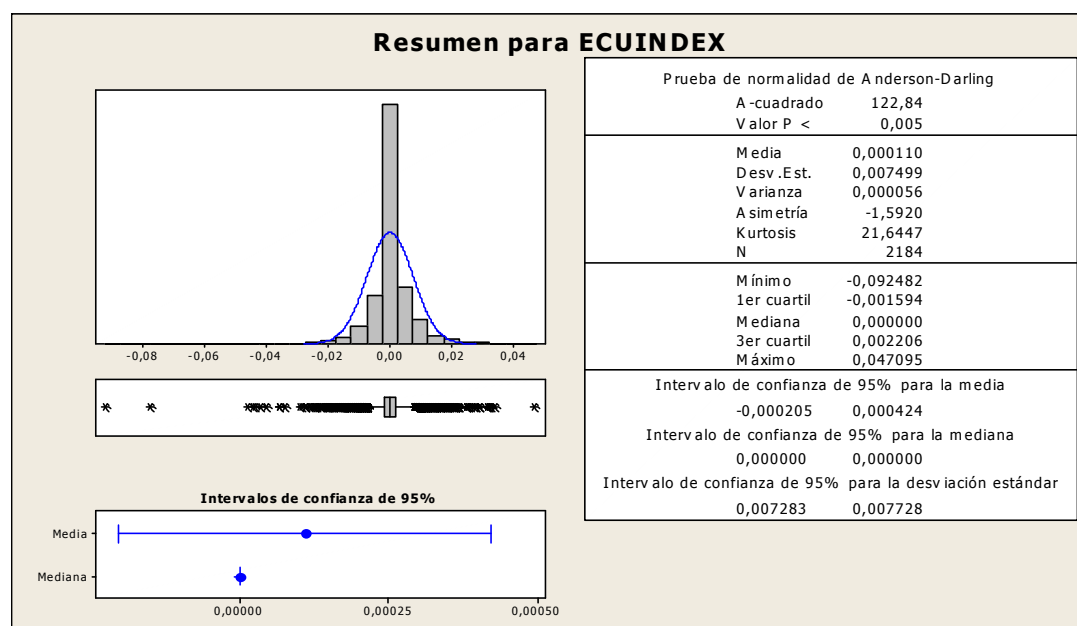
- El Ecuindex cotizó, durante los años 2005 y 2013, en promedio diario a 995 (miles USD), mientras que el IRECU cotizo, durante los años 2004 y 2013, en promedio diario a 347 (miles USD). Esto muestra claramente la mayor actividad bursátil existente en la Bolsa de Valores de Quito.
- El Ecuindex y el IRECU, entre los tiempos  $t = 1000$  y  $t = 1250$  correspondientes a al periodo enero 2009 y enero 2010, se observa una notable caída del mercado, lo cual tiene coherencia con los efectos que

experimento la economía nacional debido a la crisis financiera mundial iniciada en 2008.

### 2.3.2 Pruebas de bondad de ajuste y resumen estadístico para los rendimientos

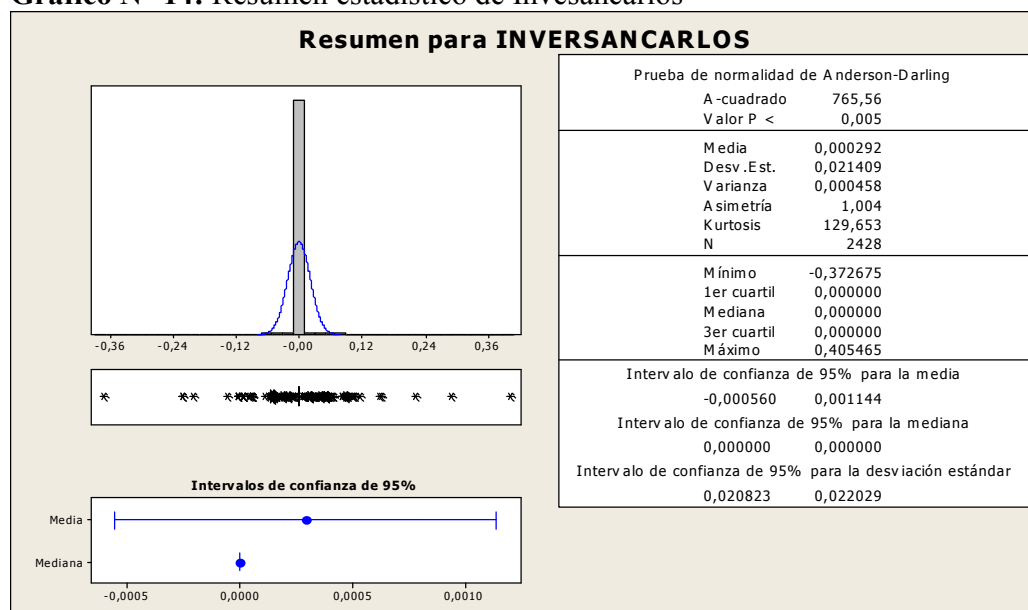
En esta sección, se muestra el resumen estadístico arrojado por MINITAB16 solamente para la empresa Inversancarlos y el índice bursátil Ecuindex. Se elaborará un cuadro general de resumen del resto de acciones participantes en la muestra y se remite al anexo sus respectivos resúmenes generados por MINITAB16.

**Gráfico N° 13:** Resumen estadístico de Ecuindex



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

Gráfico N° 14: Resumen estadístico de Invesancarlos



Elaborado por: Boris Bermúdez

Fuente: Bolsa de Valores de Guayaquil

Tabla N° 1: Resúmenes estadísticos

ESTADISTICO	FAVORITA	SAN CARLOS	IND. ALES	BCO.GUAYAQUIL	CERV.NACIONAL
PROMEDIO	4.98E-05	0.000167	-0.00019300	-0.000395	0.000145
MEDIANA	0	0.000	0.00000000	0	0
MAXIMO	0.264408	0.23372600	0.26182200	0.675755	0.212587
MINIMO	-0.317466	-0.252496	-0.22993900	-0.64608	-0.161716
DESV.STANDAR	0.016941	0.019848	0.02064300	0.035537	0.010466
C.ASIMETRIA	-4.688024	-0.500085	-2.16016400	-0.019139	5.105136
KURTOSIS	130.5091	56.12118	65.08359000	128.9313	190.5914
PRUEBA DE NORMALIDAD					
JARQUE-VERA	1710931	285461.7	405539.30000000	1493360	3647126
P-VALOR	0.0000000	0.00000000	0.00000000	0.0000000	0.0000000

Elaborado por: Boris Bermúdez

Fuente: Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

**Tabla N° 2:** Resúmenes estadísticos

ESTADISTICO	INVERSANCARLOS	HOLCIN	ECUINDEX	IRECU
PROMEDIO	0.000292	0.000117	0.00011	0.000506
MEDIANA	0	0	0	0
MAXIMO	0.400478	0.089332	0.047095	0.048938
MINIMO	-0.380772	-0.089813	-0.092482	-0.050134
DESV.STANDAR	0.02135	0.008799	0.007501	0.006319
C.ASIMETRIA	0.81133	-1.759909	-1.590468	0.269404
KURTOSIS	134.775	42.54501	24.58138	12.24676
PRUEBA DE NORMALIDAD				
JARQUE-VERA	1756266	96213.7	43284.73	8879.57
P-VALOR	0.000000000	0.000000000	0.0000000	0.00000

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

Todas las empresas e índices bursátiles participantes en la muestra de análisis mostraron un comportamiento bastante similar al que se puede observar en el resumen estadístico del Ecuindex e Inversancarlos. Bajo los resultados de la prueba de bondad de ajuste de Jarque Vera, se observa que, tanto los rendimientos accionarios como los rendimientos de los índices bursátiles, con un nivel de significancia de 0,05, no están normalmente distribuidos.

Las implicaciones matemáticas de estos resultados son de suma importancia en finanzas; dado que la distribución normal de los retornos y la distribución log normal de los precios de las acciones constituyen el supuesto elemental de la teoría financiera clásica, modelos como la ecuación de Black y Scholes para valorar derivados financieros, la Teoría del Portafolio y el Modelo de Valoración de Activos

Financieros (CAPM), dependen de este supuesto, entre otros más, para ser aproximadamente eficientes, de tal forma que, para el caso ecuatoriano no sería posible aplicar estos modelos directamente, ya que dado el incumplimiento de este supuesto, sus resultados no serían razonablemente eficientes.

Hay que prestar notable atención a la forma de distribución que siguen los rendimientos accionarios y de los índices bursátiles, según se observa en el resumen estadístico, los retornos presentan un marcado exceso de curtosis (agrupamiento de valores alrededor de la media) y colas pesas en su distribución. El efecto de esto es que, la aparición de eventos extremos (rendimientos muy altos o muy bajos) es más probable de lo que se podría esperar si la distribución fuese normal, así mismo, la posibilidad de obtener rendimientos cero o muy cercanos a la media es más alta. Es decir, dado que la teoría financiera clásica se basa en la distribución normal de los rendimientos, el concepto de riesgo y volatilidad de estos modelos sería ineficiente ya que empíricamente la aparición de eventos extremos y rendimientos muy cercanos a la media es más probable que lo que la teoría clásica predice. Así mismo, el coeficiente negativo de asimetría de los retornos de varias acciones, nos indica que, en algunos casos, la distribución está sesgada hacia la izquierda, lo cual reafirmaría la existencia de valores extremos negativos más frecuentes de lo esperado.

## 2.4 ANÁLISIS DE AUTOCORRELACIÓN PARA LOS RENDIMIENTOS

### 2.4.1 Definiciones básicas del análisis de autocorrelación

En consideración a lo expuesto en (Gujarati, 2009, pág. 749) , sea un proceso estocástico  $X$ , su covarianza  $\gamma_k$  en el rezago  $k$ , se define como

$$\gamma_k = \frac{\sum(X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{n}$$

Así, mismo su varianza se define como

$$\gamma_0 = \frac{\sum(X_t - \bar{X})^2}{n}$$

Una vez, definida la covarianza y la varianza del proceso  $X$  , se muestra que el coeficiente de autocorrelación viene dado por

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

La gráfica de las autocorrelaciones en diferentes rezagos se llama Correlograma.

Si bien ya se ha definido los conceptos del análisis de autocorrelación, es importante determinar la significancia estadística de los coeficientes estimados. Una prueba estadística que nos permite analizar la significancia estadística de todos los coeficientes de autocorrelación a diferentes rezagos, es el estadístico Q de Box y Pierce que se define como

$$Q = n \sum_{k=1}^m \rho_k^2$$

Donde  $n$  es el tamaño de la muestra y  $m$  es la longitud del rezago. Es importante mencionar que en muestras grandes el estadístico  $Q$  se distribuye aproximadamente como la distribución  $\chi^2$ .

El estadístico  $Q$  es utilizado frecuentemente para determinar si una serie de tiempo es o no estacionaria y para verificar la independencia de las realizaciones del proceso estocástico analizado. Dado que el estadístico  $Q$  sigue aproximadamente una distribución  $\chi^2$ , es posible estimar un valor crítico a un nivel de confianza para determinar su significancia estadística; de la misma forma es posible estimar un p-valor a cierto nivel de significancia. El test de hipótesis vendría dado por:

$$H_0: Q = n \sum_{k=1}^m \rho_k^2 = 0 \quad (\text{No hay autocorrelación})$$

$$H_a: Q = n \sum_{k=1}^m \rho_k^2 \neq 0 \quad (\text{hay autocorrelación})$$

#### 2.4.2 Aplicación a los rendimientos

En esta sección, mediante el paquete Eviews8, se estiman los coeficientes de autocorrelación a diferentes rezagos para los retornos para las acciones e índices bursátiles que componen la muestra de análisis. Se muestra la salida del paquete

Eviews8 para los rendimientos de Industrias Ales. Se remite las demás salidas de Eviews8 para los rendimientos accionarios al anexo.

**Tabla N° 3:** Correlograma Industrias Ales

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.005	-0.005	0.0756	0.783
		2	-0.027	-0.027	1.8970	0.387
		3	-0.011	-0.012	2.2257	0.527
		4	0.053	0.052	9.2310	0.056
		5	-0.055	-0.055	16.806	0.005
		6	0.013	0.016	17.255	0.008
		7	-0.032	-0.034	19.826	0.006
		8	-0.027	-0.030	21.642	0.006
		9	-0.062	-0.059	31.424	0.000
		10	0.020	0.013	32.456	0.000
		11	-0.005	-0.004	32.510	0.001
		12	0.003	0.002	32.533	0.001
		13	0.019	0.024	33.487	0.001
		14	-0.010	-0.018	33.720	0.002
		15	0.029	0.033	35.865	0.002
		16	-0.027	-0.034	37.751	0.002
		17	-0.022	-0.025	38.966	0.002
		18	-0.088	-0.090	58.388	0.000
		19	-0.012	-0.018	58.738	0.000
		20	-0.025	-0.024	60.265	0.000
		21	0.003	-0.001	60.291	0.000
		22	0.027	0.037	62.112	0.000
		23	0.055	0.046	69.723	0.000
		24	-0.040	-0.033	73.747	0.000
		25	0.001	-0.011	73.748	0.000
		26	0.011	-0.001	74.061	0.000
		27	0.037	0.021	77.593	0.000
		28	0.017	0.024	78.295	0.000
		29	0.023	0.022	79.591	0.000
		30	0.011	0.020	79.904	0.000
		31	-0.059	-0.052	88.866	0.000
		32	-0.010	-0.006	89.099	0.000
		33	0.029	0.023	91.224	0.000
		34	0.014	0.011	91.722	0.000
		35	-0.017	-0.011	92.482	0.000
		36	-0.012	-0.022	92.856	0.000

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

Gráficamente, la mayoría de correlogramas estimados presentan estructuras similares a los resultados de Industrias Ales, es decir, con coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial que oscilan alrededor de cero, por lo cual, esto nos darían una idea de la independencia entre los retornos y la posibilidad de que sean un proceso estocástico de segundo orden o estacionario. Sin embargo, dando una rápida lectura a los p-valores del estadístico Q a diversos rezagos, se puede observar que existe autocorrelación entre los retornos a medida que aumenta el rezago, lo cual implicaría que los rendimientos no son independientes entre sí.

Para otros casos excepcionales como el de los rendimientos de Corporación La Favorita, se observa que en su correlograma, para todos sus rezagos, el estadístico Q muestra p-valores muy superiores al nivel de significancia 0,05, lo cual es evidencia de una marcada estacionariedad del proceso estocástico generado por dichos retornos y su independencia.

En base a estos resultados, en cuanto al supuesto de independencia de la hipótesis de mercados eficientes, las estructuras de autocorrelación en los retornos accionarios sugieren que no son independientes, y por tanto, no son un evento puramente aleatorio ya que los eventos del pasado sí ejercen cierta influencia en las realizaciones presentes del proceso estocástico generado por la mayoría de acciones analizadas. Estos resultados sugieren que es posible ajustar un modelo estadístico para realizar pronósticos sobre el comportamiento de los rendimientos.

En cuanto a la estacionariedad de los procesos estocásticos de los rendimientos, a partir de todos los resultados obtenidos, si bien existen evidencias de la presencia de autocorrelación, no es posible llegar a una conclusión definitiva sobre la estacionariedad o no de los diferentes rendimientos accionarios, por lo cual, en las siguientes secciones se analiza, mediante más pruebas estadísticas, la naturaleza de los rendimientos.

## 2.5 PRUEBA DE RAÍZ UNITARIA

### 2.5.1 Definición básica

Otro tipo test estadístico utilizado para determinar si un proceso estocástico es estacionario o no, son las pruebas de raíz unitaria. Existen varias pruebas de raíz unitaria con diferentes ventajas y desventajas, sin embargo, primero se da una definición sobre el objetivo de estas pruebas y posteriormente se procede a su aplicación.

Se define al proceso estocástico  $X_t$  como un proceso de raíz unitaria si viene dado por:

$$X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{con } -1 \leq \delta \leq 1$$

Como se puede ver, en caso de que  $\delta = 1$ ,  $X$  sería una caminata aleatoria y por tanto un proceso no estacionario. Determinar si  $\delta = 1$  es el objetivo fundamental de las pruebas de raíz unitaria para determinar si una serie es o no estacionaria. Así mismo, la prueba de raíz unitaria es una herramienta muy útil a la hora de determinar el orden de integración ( $i$ ) de una serie temporal bajo la metodología ARIMA.

### **2.5.2 Test de raíz unitaria de Phillips Perron**

Como ya se mencionó, existen varias pruebas de raíz unitaria, sin embargo, para analizar los rendimientos se utilizará el test de Phillips Perron. Dado que, como se muestra en (Perez, 2006, pág. 503), una de sus cualidades fundamentales es suponer que los shocks  $\varepsilon_t$  no necesariamente son no correlacionados y de esa forma flexibiliza el análisis de estacionariedad incluso para cuando  $\varepsilon_t$  tiene algún proceso ARMA o de heteroscedasticidad como los que sugieren los correlogramas antes analizados.

### **2.5.3 Aplicación a los rendimientos**

En esta sección, mediante el paquete Eviews8, se realiza el test de Phillips Perron a los retornos para las acciones e índices bursátiles que componen la muestra de análisis. Se expone la salida del paquete Eviews8 para los rendimientos del Ecuindex y un resumen para el resto de rendimientos accionarios. Las demás salidas de Eviews8 para los rendimientos accionarios se remiten al anexo de este trabajo.

**Tabla N° 4:** Prueba de raíz unitaria

ACCION O INDICE	P-VALOR	ESTACIONARIO
ECUINDEX	0.000000	SI
IRECU	0.000000	SI
FAVORTIA	0.000000	SI
SAN CARLOS	0.000000	SI
IND. ALES	0.000000	SI
BCO. GUAYAQUIL	0.000000	SI
CERV.NACIONAL	0.000000	SI
INVERSANCARLOS	0.000000	SI
HOLCIN	0.000000	SI

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

**Tabla N° 5:** Test de Phillips Perron para rendimientos del Ecuindex

Null Hypothesis: R\_ECUINDEX has a unit root  
 Exogenous: Constant, Linear Trend  
 Bandwidth: 9 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-52.97646	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.962252	
5% level	-3.411868	
10% level	-3.127828	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	5.55E-05
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	5.03E-05

Phillips-Perron Test Equation  
 Dependent Variable: D(R\_ECUINDEX)  
 Method: Least Squares  
 Date: 01/23/14 Time: 00:40  
 Sample (adjusted): 3 2184  
 Included observations: 2182 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
R_ECUINDEX(-1)	-1.119013	0.021270	-52.61032	0.0000
C	0.000279	0.000319	0.872639	0.3830
@TREND("1")	-1.44E-07	2.53E-07	-0.567476	0.5704

R-squared	0.559517	Mean dependent var	-1.64E-06
Adjusted R-squared	0.559113	S.D. dependent var	0.011223
S.E. of regression	0.007452	Akaike info criterion	-6.959373
Sum squared resid	0.120995	Schwarz criterion	-6.951553
Log likelihood	7595.676	Hannan-Quinn criter.	-6.956514
F-statistic	1383.923	Durbin-Watson stat	2.011137
Prob(F-statistic)	0.000000		

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

La prueba Phillips Perron de raíz unitaria muestra resultados muy similares para todas las empresas e índices participantes en la muestra de análisis. Dado que el P-valor del test es inferior al nivel de significancia 0,05, se concluye que los rendimientos no son un proceso de raíz unitaria y por tanto son un proceso estacionario, lo cual implica que, la forma en cómo se distribuyen los rendimientos se mantiene relativamente constante en el tiempo, y, así mismo, nos indica que existe estabilidad en la media y varianza de los retornos accionarios.

## **2.6 ANÁLISIS ECONOMETRICO DE LA VOLATILIDAD: MODELOS ARCH Y**

### **GARCH**

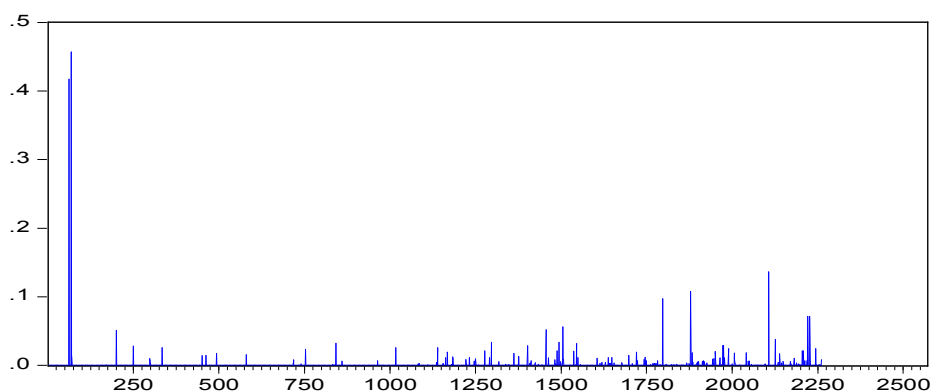
Dado que los correlogramas mostraron ciertos indicios de la ausencia de estacionariedad de los rendimientos del Ecuindex, la prueba Phillips Perron parece ser una buena alternativa para confirmar la estacionariedad de los rendimientos tanto en media como en varianza. Sin embargo, aún se debe analizar el comportamiento de su varianza (por ende de la volatilidad o desviación estándar) de forma detallada. Dado que la varianza es un parámetro no observable y generalmente variante en el tiempo, requiere de un análisis más riguroso. Para el tratamiento de la volatilidad estocástica es muy cotidiano el uso de modelos de volatilidad heteroscedastica ARCH y GARCH. En esta investigación se hará uso de estos modelos, solamente si se comprueba que la volatilidad de los rendimientos no es estable a través del tiempo (procesos no estacionarios en varianza) y presenta ciertas anomalías.

### 2.6.1 Agrupamiento de la Volatilidad

En diversos estudios dentro de la literatura especializada, se observó que era usual encontrar dentro de las series financieras periodos de alta volatilidad seguidos por periodos de relativa calma, este es el comportamiento conocido como agrupamiento de la volatilidad (efecto ARCH). Una forma rápida de detectar la existencia de este comportamiento sobre los rendimientos, es aplicar el análisis de autocorrelación sobre los rendimientos cuadrados.

Para esta aplicación, se hará uso del paquete Eviews8 y se mostrará su salida solamente para los rendimientos cuadrados de Banco de Guayaquil, para el resto de empresas se mostrará un resumen de los resultados obtenidos. Se remite al anexo las demás salidas de Eviews8 para las empresas e índices restantes.

**Gráfico N° 15:** Rendimientos cuadrados de Banco de Guayaquil  
R2\_BCOGUAYAQUIL



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

**Tabla N° 6:** Correlograma de rendimientos cuadrados Banco de Guayaquil

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	-0.004	-0.004	0.0444	0.833
		2	0.011	0.011	0.3075	0.857
		3	-0.005	-0.005	0.3687	0.947
		4	-0.001	-0.001	0.3695	0.985
		5	-0.005	-0.005	0.4226	0.995
		6	0.422	0.422	403.83	0.000
		7	-0.004	-0.002	403.88	0.000
		8	0.008	-0.002	404.02	0.000
		9	-0.005	-0.002	404.08	0.000
		10	-0.006	-0.004	404.16	0.000
		11	-0.001	0.003	404.16	0.000
		12	-0.004	-0.221	404.20	0.000
		13	-0.001	0.002	404.21	0.000
		14	-0.004	-0.006	404.24	0.000
		15	-0.004	-0.002	404.29	0.000
		16	-0.002	0.003	404.29	0.000
		17	0.002	0.000	404.30	0.000
		18	-0.005	0.116	404.35	0.000
		19	0.010	0.011	404.57	0.000
		20	-0.005	0.001	404.63	0.000
		21	-0.007	-0.006	404.75	0.000
		22	-0.001	-0.003	404.75	0.000
		23	0.001	-0.000	404.75	0.000
		24	-0.005	-0.068	404.80	0.000
		25	-0.005	-0.019	404.85	0.000
		26	-0.003	-0.003	404.87	0.000
		27	-0.005	0.001	404.92	0.000
		28	-0.006	-0.006	405.01	0.000
		29	-0.005	-0.006	405.06	0.000
		30	-0.006	0.032	405.13	0.000
		31	-0.004	0.013	405.17	0.000
		32	0.005	0.010	405.24	0.000
		33	-0.004	-0.005	405.28	0.000
		34	-0.003	0.003	405.30	0.000
		35	-0.005	-0.000	405.36	0.000
		36	-0.005	-0.021	405.41	0.000

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Balsa de Valores de Guayaquil

Se eligió el correlograma de Banco de Guayaquil ya que este presenta resultados muy similares al de las demás empresas participantes en la muestra de análisis. Como se puede observar en el correlograma de los rendimientos cuadrados de Banco de Guayaquil, inicialmente, el estadístico Q presenta p-valores muy superiores al nivel de significancia de 0,05, lo cual indica la usencia de agrupamiento de volatilidad. Sin embargo, continuando con la lectura de p-valores, se observa que muy rápidamente decrecen por debajo del nivel de significancia, mostrando autocorrelación en rezagos superiores. Ante esta situación, por el concepto matemático del estadístico Q, se podría afirmar que los rendimientos presentan agrupamiento de volatilidad (efectos ARCH).

Para otros casos excepcionales como el de Corporación La Favorita y el índice bursátil Ecuindex, el estadístico Q para los sus retornos cuadrados, presenta en todos sus rezagos, p-valores muy superiores al nivel de significancia, con lo cual se comprueba la estacionariedad en varianza y la estabilidad de la volatilidad sugerida por el test de Phillips Perron. Por otra parte, el correlograma de retornos cuadrados índice bursátil IRECU, en todos sus rezagos, mostro p-valores muy inferiores al nivel de significancia, mostrando así un efecto ARCH muy claros en sus retornos.

Si bien los correlogramas muestran un detalle más profundo sobre la volatilidad, aún es necesario probar la estabilidad de la volatilidad mediante un test de hipótesis más formal. En la siguiente sección se aborda este tema.

### **2.6.2 Prueba de Heteroscedasticidad**

Las pruebas de Phillips Perron de los retornos y el correlograma de los retornos cuadrados, permitieron analizar la existencia o no de estabilidad de la media y la varianza dentro del proceso estocástico de los retornos accionarios, sin embargo, se requiere de un test más formal para determinar la existencia de efectos ARCH, para lo cual, se debe realizar pasos previos en virtud de los primeros resultados estadísticos obtenidos.

En base a los correlogramas obtenidos en el análisis de autocorrelación de los rendimientos accionarios convencionales, se detectó que estos no son eventos plenamente aleatorios, y que por tanto es posible hacer pronósticos de rendimientos

futuros mediante algún modelo estadístico; de forma que, para comenzar, se determina una estructura (ARMA) para modelar adecuadamente el comportamiento de los retornos accionarios.

La metodología es muy sencilla, primero se realiza la siguiente regresión para las series de rendimientos de la muestra de análisis:

$$r = \beta + \varepsilon$$

Mediante el análisis de residuos, si se encuentra que estos no son un proceso de ruido blanco, es necesario establecer una estructura ARMA para la media antes de analizar la prueba de heteroscedasticidad y búsqueda de efectos ARCH. Para esta aplicación, se hará uso del paquete Eviews8 y Crystal ball y se mostrará un resumen de los resultados obtenidos. Se remite al anexo las demás salidas de Eviews8 y Crystal ball para las empresas e índices participantes.

**Tabla N° 7:** Resumen Estructura ARMA

ESTRUCTURA ARMA (p,q)				
EMPRESA O INDICE	REGRESIÓN	P-VALOR CORRELOGRAMA RESIDUALES	RUIDO BLANCO	ESTRUCTURA
BCO.GUAYAQUIL	$R=\beta+\varepsilon$	0.0000	no	ARMA(1,1)
IND.ALES	$R=\beta+\varepsilon$	0.0000	no	ARMA(0,1)
CERV.NACIONAL	$R=\beta+\varepsilon$	0.0070	no	ARMA(1,1)
FAVORITA	$R=\beta+\varepsilon$	0.7020	si	No
HOLCIN	$R=\beta+\varepsilon$	0.0020	no	ARMA(1,1)
INVERSANCARLOS	$R=\beta+\varepsilon$	0.0000	no	ARMA(1,1)
SAN CARLOS	$R=\beta+\varepsilon$	0.0050	no	ARMA(1,1)
ECUINDEX	$R=\beta+\varepsilon$	0.0000	no	ARMA(0,1)
IRECU	$R=\beta+\varepsilon$	0.0050	no	ARMA(0,1)

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

Una vez encontrada la estructura ARMA para modelar la media de los rendimientos, se estima el modelo, y mediante el análisis de los residuos resultantes, se realizarán dos pruebas para detectar efectos ARCH:

- Se aplica nuevamente el análisis de autocorrelación sobre sus residuos cuadrados, si estos muestran ser correlacionados, existen efectos ARCH y el proceso no es estacionario en varianza.
- Se aplica el test de efectos ARCH, en el cual se obtienen el test de Engel del multiplicador de Lagrange ( $N \cdot R^2$ ), el estadístico F, y sus respectivos P-valores para evaluar la presencia de efectos ARCH en los retornos a diferentes rezagos. Si los P-valores son inferiores al nivel de significancia, se verifica la presencia de efectos ARCH en el rezago analizado.

Se muestra un resumen de los resultados obtenidos y la salida de Eviews8 para Holcin. Se remite al anexo el detalle de resultados obtenidos en Eviews para las demás empresas e índices que integran la muestra de análisis.

**Tabla N° 8:** Resumen de Pruebas de Heteroscedasticidad

EFECTOS ARCH (REZAGOS>10)				
EMPRESA O INDICE	MODELO	P-VALOR F	P-VALOR $\chi^2$	EFEECTO ARCH
BCO.GUAYAQUIL	ARMA(1,1)	0.0000	0.0000	SI
IND.ALES	ARMA(0,1)	0.0096	0.0099	SI
CERV.NACIONAL	ARMA(1,1)	0.0000	0.0000	SI
FAVORITA	No	0.5836	0.5834	NO
HOLCIN	ARMA(1,1)	0.0000	0.0000	SI
INVERSANCARLOS	ARMA(1,1)	0.9126	0.9126	SI
SAN CARLOS	ARMA(1,1)	0.0044	0.0045	SI
ECUINDEX	ARMA(0,1)	0.1691	0.1699	NO
IRECU	ARMA(0,1)	0.0036	0.0036	SI

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Empresas en estudio

**Tabla N° 9:** Test de efectos ARCH para Holcin (3 rezagos)

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	16.29130	Prob. F(3,1457)	0.0000
Obs*R-squared	47.41749	Prob. Chi-Square(3)	0.0000

Test Equation:  
 Dependent Variable: RESID^2  
 Method: Least Squares  
 Date: 05/24/14 Time: 10:34  
 Sample (adjusted): 6 1466  
 Included observations: 1461 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5.91E-05	1.29E-05	4.587868	0.0000
RESID^2(-1)	0.003881	0.025780	0.150554	0.8803
RESID^2(-2)	0.025128	0.025739	0.976275	0.3291
RESID^2(-3)	0.177800	0.025747	6.905552	0.0000

R-squared	0.032456	Mean dependent var	7.48E-05
Adjusted R-squared	0.030463	S.D. dependent var	0.000484
S.E. of regression	0.000476	Akaike info criterion	-12.45844
Sum squared resid	0.000330	Schwarz criterion	-12.44396
Log likelihood	9104.890	Hannan-Quinn criter.	-12.45304
F-statistic	16.29130	Durbin-Watson stat	1.996699
Prob(F-statistic)	0.000000		

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Empresa Holcin

Como se observa, a medida que se aplica el test de efectos ARCH a en rezagos cada vez mayores, dado que los p-valores son significativos (inferiores al nivel de significancia 0.05), se comprueba la existencia de agrupamiento de volatilidad en los rendimientos accionarios, y por tanto, se demuestra que la varianza no es constante en el tiempo para los rendimientos accionarios y los reconfirma como un proceso estocástico no estacionario en varianza. Para casos excepcionales como Corporación La Favorita y el Índice Ecuindex se continúa comprobando para todos sus rezagos la ausencia de efectos ARCH.

### **2.6.3 Modelos tipo ARCH-GARCH**

Volviendo a retomar, la forma en cómo se distribuyen los rendimientos analizados, es decir, con exceso de curtosis y colas pesadas, se podría afirmar que es necesario estimar la volatilidad considerando estas características; pues bien, los modelos de la familia ARCH y GARCH fueron formulados por sus autores considerando esta realidad muy frecuente en las series de rendimientos accionarios, por este motivo es conveniente ajustar un modelo de este tipo para los rendimientos accionarias con aparente heteroscedasticidad condicionada.

Una vez estimada la ecuación de la media para los rendimientos accionarios y considerando la existencia de efectos ARCH en sus retornos, es necesario estimar una ecuación para su varianza para de esa forma poder calcular su varianza y volatilidad en cada instante de tiempo. Existen diversos tipos modelos ARCH y

GARCH, cada uno con diversas ventajas, desventajas y supuestos, sin embargo para esta investigación, solo se especifican los modelos más cotidianos bajo lo expuesto en (Hamilton, 1994, pág. 657) y (Casas & Cepeda, 2008) se remite a la literatura especializada el desarrollo matemático de estos modelos.

Modelo ARCH: ecuación de la media condicional definida por  $r_t = f(\varphi|\Omega_{t-1}) + \varepsilon_t$  y ecuación de la varianza definida por  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q\varepsilon_{t-q}^2$ .

Donde  $f$  es una función de un vector  $\varphi$  de parámetros y  $\Omega_{t-1}$  la información disponible hasta  $t - 1$ ,  $\varepsilon_t$  son los residuos y  $\alpha_t$  son los parámetros estimados.

Modelos GARCH (ARCH Generalizado): ecuación de la media condicional definida por  $r_t = f(\varphi|\Omega_{t-1}) + \varepsilon_t$  y ecuación de la varianza definida por  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2$ . Donde  $f$  es una función de un vector  $\varphi$  de parámetros y  $\Omega_{t-1}$  la información disponible hasta  $t - 1$ ,  $\varepsilon_t$  son los residuos y  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son los parámetros estimados.

Modelo asimétrico EGARCH: ecuación de la media condicional definida por  $r_t = f(\varphi|\Omega_{t-1}) + \varepsilon_t$  y ecuación de la varianza definida como  $\ln(\sigma_{j,t}^2) = \omega_j +$

$$\beta_j \ln(\sigma_{j,t-1}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \theta \left[ \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right].$$

Donde  $f$  es una función de un vector  $\varphi$

de parámetros y  $\Omega_{t-1}$  la información disponible hasta  $t - 1$ ,  $\varepsilon_t$  son los residuos y  $\omega, \beta, \gamma, \theta$  son los parámetros del modelo.

Modelo Asimétrico TGARCH: ecuación de la media condicional definida por  $r_t = f(\varphi|\Omega_{t-1}) + \varepsilon_t$  y ecuación de la varianza definida como  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \beta_i \sigma_{t-1}^2$ . Donde  $f$  es una función de un vector  $\varphi$  de parámetros y  $\Omega_{t-1}$  la información disponible hasta  $t - 1$ ,  $\varepsilon_t$  son los residuos,  $\omega, \beta, \gamma, \alpha$  son los parámetros del modelo, y  $d_t$  es una variable dummy.

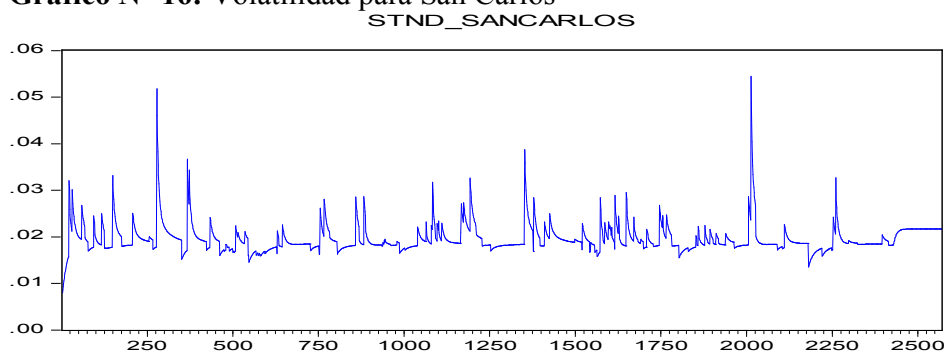
Se suele hacer el supuesto de que los residuos  $\varepsilon_t$  siguen una distribución normal, una T de student o Generalizada de error. Así mismo Eviews8 cuenta con rutinas computacionales para el uso de estos modelos.

#### **2.6.4 Estimación de modelos tipo ARCH-GARCH para los rendimientos**

Se muestra la varianza estimada para la empresa San Carlos, se presenta un resumen general y se remite al anexo los demás resultados obtenidos en el resto de rendimientos accionarios.

##### Modelo EGARCH para San Carlos

La volatilidad estimada para San Carlos se muestra en la siguiente gráfica:

**Gráfico N° 16: Volatilidad para San Carlos**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

**Tabla N° 10: Volatilidad para San Carlos**

Dependent Variable: R\_SANCARLOS

Method: ML - ARCH

Date: 02/06/14 Time: 15:24

Sample (adjusted): 3 2428

Included observations: 2426 after adjustments

Convergence achieved after 126 iterations

MA Backcast: 2

Presample variance: backcast (parameter = 0.7)

LOG(GARCH) = C(4) + C(5)\*ABS(RESID(-1))/SQRT(GARCH(-1)) + C(6)

\*RESID(-1)/SQRT(GARCH(-1)) + C(7)\*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000118	0.000119	0.998908	0.3178
AR(1)	0.930776	0.007686	121.1024	0.0000
MA(1)	-0.971421	0.004101	-236.8638	0.0000
Variance Equation				
C(4)	-0.992111	0.045840	-21.64280	0.0000
C(5)	0.052333	0.005251	9.965797	0.0000
C(6)	-0.107698	0.004961	-21.70836	0.0000
C(7)	0.875939	0.005687	154.0299	0.0000
R-squared	0.007377	Mean dependent var	0.000167	
Adjusted R-squared	0.006558	S.D. dependent var	0.019852	
S.E. of regression	0.019787	Akaike info criterion	-5.050083	
Sum squared resid	0.948660	Schwarz criterion	-5.033364	
Log likelihood	6132.750	Hannan-Quinn criter.	-5.044004	
Durbin-Watson stat	2.038579			
Inverted AR Roots	.93			
Inverted MA Roots	.97			

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

Mediante los resultados, es posible escribir la ecuación de la varianza como

$$\log(\sigma_t^2) = -0,99 + 0,05 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} \right| - 0,10 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} \right| + 0,87 \log(\sigma_{t-1}^2)$$

Como se puede observar en los resultados obtenidos, el modelo presenta parámetros significativos, tanto en la ecuación de la media condicional como en la ecuación de la varianza. De la misma forma, con el análisis de autocorrelación residual, se puede ver que sus coeficientes no tienen estructuras de autocorrelación, de forma que el modelo queda validado.

De esta forma, se ajustó modelos eficientes para el resto de rendimientos accionarios, con excepción de Corporación La Favorita y el Índice Ecuindex por presentar estabilidad en la varianza y por tanto en su volatilidad. Se muestra el resumen general de resultados en el siguiente recuadro.

**Tabla N° 11:** Resumen general de la volatilidad

MODELOS ARCH GARCH ESTIMADOS					
EMPRESA O INDICE	ECUACION DE LA MEDIA	MEJOR MODELO	DISTRIBUCION DE RESIDUOS	PARAMETROS SIGNIFICATIVOS	VALIDADOS SEGÚN INDEPENDENCIA DE RESIDUOS
BCO.GUAYAQUIL	ARMA(1,1)	T-GARCH(1,1,1)	NORMAL	SI	SI
IND.ALES	ARMA(0,1)	T-GARCH(1,1,1)	T-STUDENT	SI	SI
CERV.NACIONAL	ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	NORMAL	SI	SI
FAVORITA	NO	NO NECESARIO	NO NECESARIO	NO NECESARIO	NO NECESARIO
HOLCIN	ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	NORMAL	SI	SI
INVERSANCARLOS	ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	T-STUDENT	SI	SI
SAN CARLOS	ARMA(1,1)	EGARCH(1,1,1)	NORMAL	SI	SI
ECUIINDEX	ARMA(0,1)	NO NECESARIO	NO NECESARIO	NO NECESARIO	NO NECESARIO
IRECU	ARMA(0,1)	EGARCH(1,1,1)	NORAMAL	SI	SI

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

Si bien la volatilidad no es un parámetro constante, si es posible realizar pronósticos de rendimientos y volatilidades futuras a corto plazo mediante el uso de este tipo de modelos estadísticos. Este hecho verificado en a lo largo de estos análisis, permiten continuar afirmando la predictibilidad de los precios, de forma que, un inversionista si está, en cierta medida, en posibilidades de realizar especulación rentable en el mercado ecuatoriano.

## **2.7 VALOR EN RIESGO**

En esta sección se analiza el valor en riesgo no como una herramienta para la toma de decisiones financieras, sino para examinar más detalladamente el comportamiento de la volatilidad en consideración de la distribución no gaussiana de los rendimientos accionarios en el Ecuador.

Dado que se han comprobado la estabilidad de la media y la varianza a través del tiempo en el comportamiento de ciertos retornos accionarios, mientras que, de la misma forma se han especificado modelos de pronóstico para aquellos rendimientos predecibles; ahora se estimará el Valor en Riesgo para las empresas e índices bursátiles de la muestra de análisis para el lapso de tiempo de un día, de dos maneras distintas: la primera, asumiendo la normalidad de los rendimientos, y la segunda, mediante una simulación basada en la distribución empírica mostrada por los retornos accionarios. El objetivo fundamental es observar la magnitud en que difieren los resultados entre cada método debido a los supuestos realizados sobre su distribución de probabilidad. Para este ejercicio se hará del

software de simulación Crystal ball, se muestra un resumen de los resultados y se remite al anexo la salida del programa.

### **2.7.1 Definición de Valor en Riesgo**

El valor en riesgo, es una metodología desarrollada por el Banco Estadounidense JP Morgan, la cual es muy usada por firmas financieras y bancos para estimar la máxima pérdida esperada de una inversión a un determinado nivel de confianza y a cierto horizonte de tiempo. Su fórmula paramétrica viene dada por:

$$VAR_{t+1} = \sigma * z * \sqrt{t}$$

Donde  $Z$  es un percentil a cierto nivel de confianza proveniente de una distribución normal estándar.

Este ejercicio se realizará mediante los resultados econométricos obtenidos y mediante simulación de los retornos. Cabe mencionar que la volatilidad no es constante como ya se lo demostró.

### **2.7.2 Valore en riesgo: enfoque econométrico**

Se estima el valor en riesgo de la siguiente manera:

- Los parámetros de la media y la volatilidad serán estimados a partir de sus respectivas ecuaciones obtenidas en los modelos ARCH-GARCH.

- Por el criterio de estacionariedad de las pruebas de raíz unitaria, se asume que el parámetro  $\sigma$  de volatilidad y el parámetro  $\mu$  de media, son teóricamente constantes para Corporación La Favorita y el índice bursátil Ecuindex.
- El percentil  $Z$  es estimado a un nivel de confianza del 99% asumiendo que los retornos se distribuyen normalmente.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

**Tabla N° 12:** Valore en riesgo: enfoque econométrico

SUPONIENDO DISTRIBUCIÓN NORMAL (99% CONFIANZA)			
EMPRESA O ÍNDICE	MEDIA	$\sigma$	VAR
ECUIINDEX	0.0001040	0.007501	-1.73%
IRECU	0.000343403	0.00477867	-1.08%
FAVORTIA	0.0000498	0.016941	-3.94%
SAN CARLOS	-0.0001953	0.01826268	-4.27%
IND. ALES	0.0000003	0.00006256	-0.01%
BCO. GUAYAQUIL	-0.0000007	0.01106795	-2.57%
CERV.NACIONAL	-0.0000818	0.00735788	-1.72%
INVERSANCARLOS	0.0000004	1.29E-06	-0.0003%
HOLCIN	0.0002236	0.00782465	-1.80%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Empresas en estudio

### 2.7.3 Valore en riesgo: enfoque de simulación de Montecarlo

Se estima el valor en riesgo de la siguiente manera:

- Se realizan una simulación de 10000 iteraciones basadas en la distribución histórica presentada por cada acción e índice bursátil participante en la muestra de análisis.
- Se calcula el percentil a partir de la distribución obtenida en la simulación.

- La ventaja de este método de simulación no paramétrico, es que simula con gran precisión la distribución empírica que históricamente han generado los rendimientos.

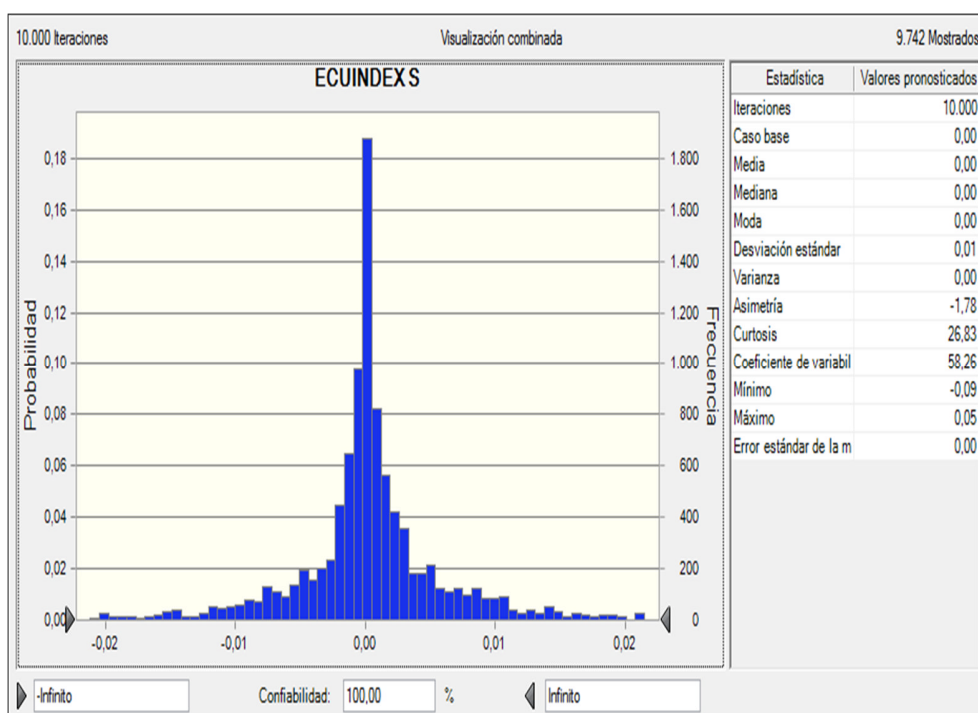
Los resultados obtenidos se muestran en el siguiente recuadro:

**Tabla N° 13:** Valore en riesgo: enfoque de simulación de Montecarlo

SIMULACION MONTE DE CARLO (99% CONFIANZA)			
EMPRESA O INDICE	ITERACIONES	$\alpha$	VAR
ECUINDEX	10,000.00	0,01	-2.44%
IRECU	10,000.00	0,01	-1.71%
FAVORTIA	10,000.00	0,01	-3.56%
SAN CARLOS	10,000.00	0,01	-7.80%
IND. ALES	10,000.00	0,01	-5.88%
BCO. GUAYAQUIL	10,000.00	0,01	-10.88%
CERV.NACIONAL	10,000.00	0,01	-1.62%
INVERSANCARLOS	10,000.00	0,01	-4.76%
HOLCIN	10,000.00	0,01	-2.66%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Empresas en estudio

**Gráfico N° 17: Simulación rendimientos del Ecuindex**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

#### 2.7.4 Análisis del en Valor en Riesgo estimado

A través de la simulación de Montecarlo se logró capturar el comportamiento histórico que presentaron los rendimientos accionarios, en consecuencia, se logró simular el fenómeno de colas pesadas y exceso de curtosis dentro de las distribuciones probabilísticas simuladas. Comparando el VAR estimado bajo simulación y el VAR estimado bajo el supuesto de distribución normal de los retornos, la diferencia es muy clara; para la mayoría de casos, la pérdida extrema, estimada a un 99% de confianza mediante simulación, es superior. Esto demuestra

la incapacidad de la distribución normal para explicar el riesgo en los rendimientos accionarios en este mercado.

Bajo estos resultados se puede afirmar que, si un inversionista o gestor de cartera basa sus provisiones de riesgo en medidas como el VAR bajo el supuesto de normalidad, esta propenso a experimentar pérdidas más fuertes de las esperadas. Ante esta situación, es recomendable hacer uso de métodos no paramétricos para determinar de forma más eficiente medidas de gestión del riesgo.

## **2.8 ANÁLISIS ESPECTRAL**

En esta sección se aplicarán los conceptos del Análisis de Fourier, tratados en el Ensayo I, para analizar las series financieras en el dominio de frecuencia, lo cual se conoce como análisis espectral. El objetivo fundamental de esta sección es identificar la presencia o no de componentes estacionales en los rendimientos de las acciones. En la literatura especializada existen diversas y extensas metodologías econométricas para analizar efectos estacionales en las series financieras de manera muy detallada, sin embargo, no es el objetivo fundamental de esta investigación encontrar efectos estacionales de forma exhaustiva, sino simplemente, mediante el Análisis de Fourier, hallar la existencia o no de estos efectos de manera general, como un punto a tomar en cuenta a la hora de modelar la dinámica que guía los precios en el desarrollo del Ensayo III.

### 2.8.1 Fundamentos del Análisis Espectral

A lo largo de este ensayo se ha analizado las series financieras como variables en el dominio del tiempo  $t$ , ahora, se cambia de perspectiva para analizar las series en el dominio de frecuencia  $\omega$ . El motivo por el cual parece interesante realizar esto, es que la frecuencia no es más que una medida para representar ciclos, es decir, la frecuencia es el número de ciclos en cada unidad de tiempo. Este es el criterio fundamental que permite analizar la estacionalidad de las series analizadas.

Bajo la teoría trata en (Hamilton, 1994, págs. 152-159), sea  $x(t)$  un proceso estocástico estacionario con media  $E(x) = \mu$  y que en cada instante de tiempo  $j$  tiene una autocovarianza sumable definida como  $\gamma_j = (x_t - \mu)(x_{t-j} - \mu)$ , es posible definir la función de autocovarianzas como:

$$g_x(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j z^j \quad \text{donde } z \text{ es un escalar complejo}$$

Si se sabe que la función  $g_x(z)$  pertenece al espacio  $\mathcal{L}^2$ , es decir  $\int_{-\infty}^{\infty} |g_x(z)|^2 dt < \infty$ , entonces su transformada de Fourier existe, de tal forma que aplicando la transformación se obtiene:

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_h e^{i\omega h}$$

La función  $g(\omega)$  se conoce como la función de densidad espectral poblacional del proceso  $x(t)$ . Dado que en la práctica no se dispone de la población sino solo de realizaciones del proceso estocástico, la densidad espectral se estima a partir de estas realizaciones o muestras generadas por el proceso, es decir, para un número finito de covarianzas

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|h| < r} \hat{\gamma}_h e^{i\omega h}$$

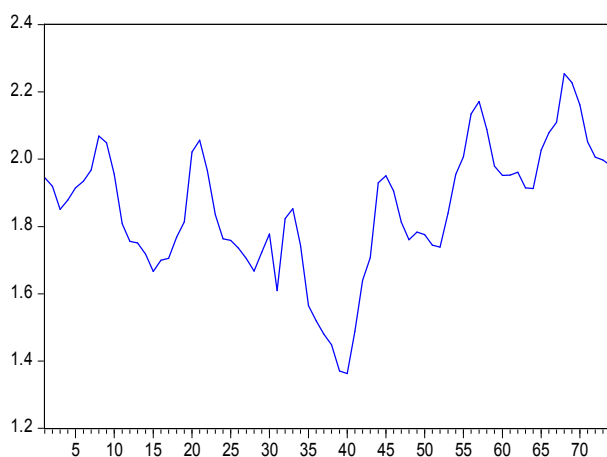
De esta forma, para una serie de longitud  $r = T$ , la función  $\hat{g}(\omega)$  se conoce como periodograma. Computacionalmente el periodograma es estimado, como es lógico, mediante la transformada rápida de Fourier, la cual ya está implementada en softwares especializados como Matlab y SPSS.

### 2.8.2 Ejemplo ilustrativo

Como ya se mencionó, el análisis espectral, mediante el periodograma, busca encontrar efectos estacionales dentro de una serie temporal. El periodograma facilita observar los diferentes ciclos estacionales cuando no son fácilmente observables en la serie representada en el dominio del tiempo.

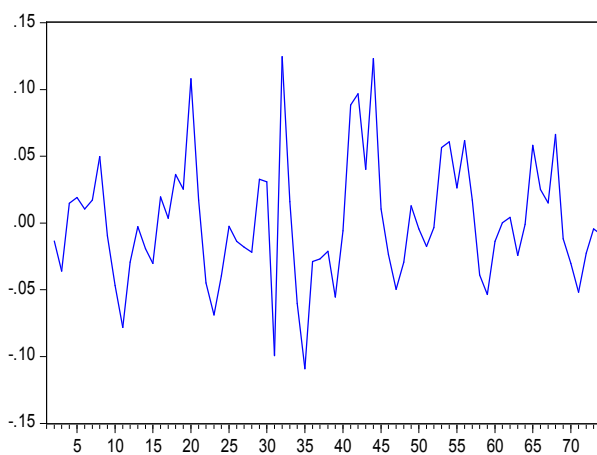
A continuación se presenta un proceso estocástico  $X_t$  estacional y su variación logarítmica definida como  $Ln \left( \frac{X_t}{X_{t-1}} \right)$

**Gráfico N° 18: Serie temporal simulada**  
SER\_SIMULADA



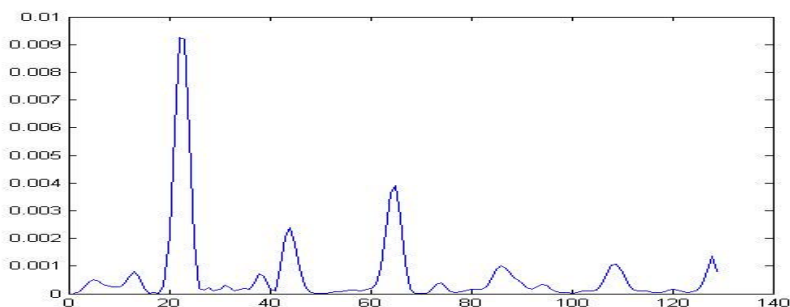
**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Gráfico N° 19: variación serie temporal simulada**  
VARIACION



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

Las gráficas nos muestran ciertos patrones estacionales, ahora, tomando las variaciones y estimando el periodograma en MATLAB se obtuvo el siguiente resultado:

**Gráfico N° 20: Patrones estacionales**

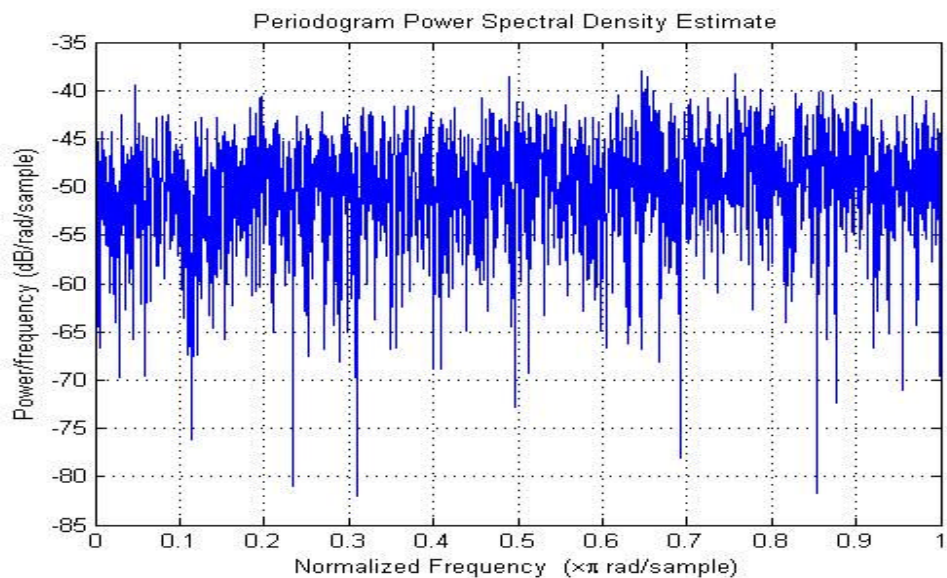
**Elaborado por:** Boris Bermúdez

Como se puede observar, el periodograma permite identificar los efectos estacionales con mayor facilidad, de forma que, cada pico destacable representa un periodo o ciclo dentro del proceso analizado y cada amplitud destacable representa la longitud del periodo estacional. La ausencia de picos destacables, por concepto, implicaría la ausencia de efectos estacionales en la serie. (Perez, 2006, pág. 148)

De la misma manera es posible conocer la duración o periodo de cada ciclo pasando del dominio de frecuencia al dominio del tiempo bajo los principios antes tratados.

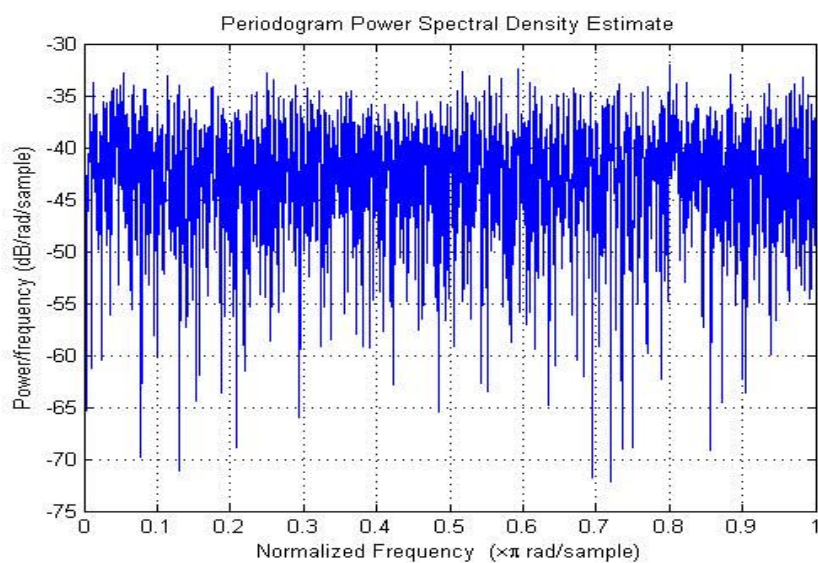
### **2.8.3 Estimación de Periodogramas para los rendimientos**

Mediante el uso el programa de análisis matemático MATLAB, se estimó los periodogramas para los rendimientos de la muestra de análisis. Se presentan los resultados para Corporación la Favorita y el índice bursátil Ecuindex, se remite al anexo los resultados obtenidos para las demás rendimientos accionarios.

**Gráfico N° 21: Periodograma Ecuindex**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

**Gráfico N° 22: Periodograma La Favorita**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsa de Valores de Quito

Las acciones e índices bursátiles participantes en la muestra de análisis presentaron periodogramas muy similares a los obtenidos por el ECUINDEX y Corporación La

Favorita. Como se puede observar, no existen picos destacables ni amplitudes que permitan hablar sobre la existencia de efectos estacionales en el comportamiento de los rendimientos. Por tanto, se puede afirmar que no existen épocas específicas del año en que los precios de las acciones tomen un determinado comportamiento que facilite aún más su predictibilidad.

## 2.9 ANÁLISIS DE RETORNOS FINANCIEROS MEDIANTE WAVELETS

En esta sección se aplicará la Teoría de Wavelets y el análisis Multiresolución para analizar el comportamiento de los rendimientos a diferentes horizontes de tiempo, el análisis de las series mediante Wavelets presenta la ventaja de que el proceso estocástico no necesariamente debe ser estacionario. Se da paso directo a las aplicaciones y se remite al Ensayo I los fundamentos de la Teoría de Wavelets.

### 2.9.1 Análisis Multiresolución y estadística descriptiva

Tomando la serie original de rendimientos históricos, se aplica la descomposición, mediante análisis Multiresolución, utilizando la Wavelet de Daubechies de orden 8 a 7 niveles de resolución. De esta manera se obtiene una aproximación de la serie original de la forma:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \Phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

Ahora, bajo los criterios tratados en el Ensayo I, es posible definir la duración u horizonte de tiempo que cada nivel de resolución representa; de esta manera, la escala de resolución  $d_{j=1}$  representa un horizonte de tiempo  $\lambda_1 = 2^{j-1}$  es decir, 1 a 2 días. A continuación se presenta un recuadro con los horizontes de tiempo que se analizarán:

**Tabla N° 14:** Horizontes de tiempo

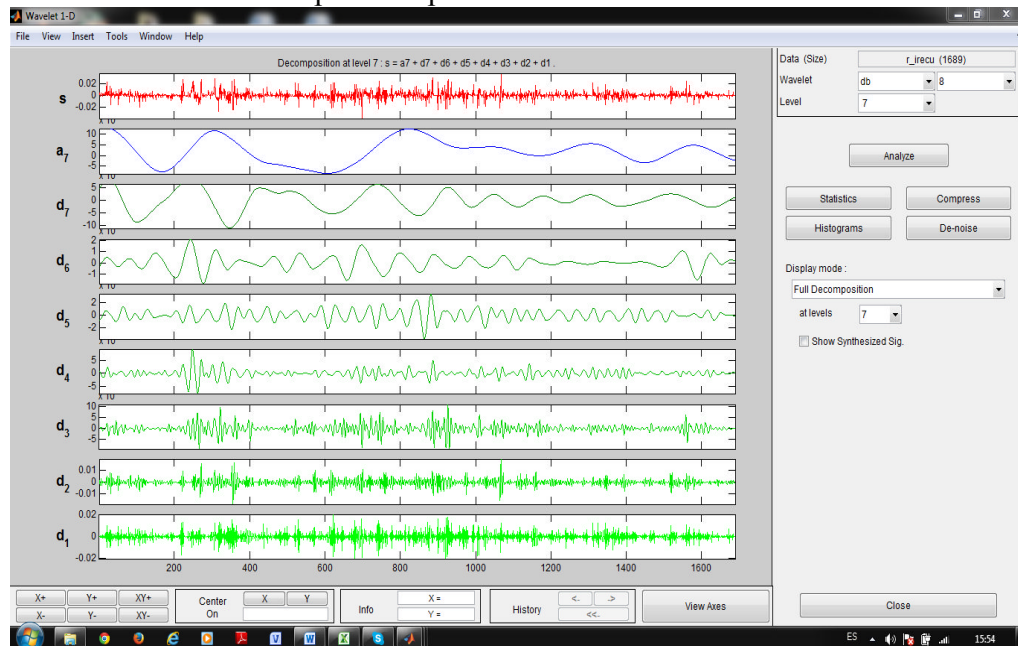
RESOLUCIÓN	HORIZONTE DE TIEMPO (DIAS)
d1	2
d2	4
d3	8
d4	16
d5	32
d6	64
d7	128

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Wavelet de Daubechies

Cabe resaltar, que los niveles de resolución inferiores capturan los eventos de mayor frecuencia, mientras que a niveles mayores de resolución se obtiene información sobre los eventos de menor frecuencia.

Dada la gran cantidad de información que se genera mediante el análisis Multiresolución, se presenta la descomposición para índice bursátil IRECU y se remite al anexo el resto de descomposiciones.

**Gráfico N° 23: Descomposición para índice bursátil IRECU**

**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Empresa IRECU

Una vez realizado el análisis Multiresolución mediante Wavelet de Daubechies, se analiza la estadística descriptiva de cada uno de los niveles de resolución con el uso de Eviews8. Dada la gran cantidad de información, se presenta los resultados para el índice IRECU y se remite al anexo los demás resultados.

**Tabla N° 15:** Resultados para el índice IRECU

RENDIMIENTOS IRECU								
RESUMEN	R_IRECU=a7+d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7							
	a7	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7
Mean	0.000496684	-1.10E-07	1.14E-07	-8.67E-07	1.29E-06	2.89E-06	1.69E-06	3.87E-06
Median	0.000400502	-1.40E-05	-9.87E-06	-2.94E-05	-2.80E-06	-9.57E-07	2.15E-05	2.71E-05
Maximum	0.002098223	0.026807082	0.019478734	0.013192714	0.008110221	0.004917665	0.002842605	0.001557657
Minimum	-0.00098784	0.028070516	-0.01550456	0.012992059	0.008471334	0.006165708	0.002039754	0.002014082
Std. Dev.	0.000670902	0.004618644	0.003083049	0.00208405	0.00150804	0.001110244	0.000685437	0.000574421
Skewness	0.063134223	0.110556676	0.003602807	0.111683837	0.063842188	0.001075947	0.187377422	0.228346124
Kurtosis	2.829241295	7.766673794	6.400280744	8.46690646	7.857572958	8.803778274	3.875467897	4.073790175
Jarque-Bera	4.668083498	2356.702263	1196.66297	3098.475294	2443.874949	3486.278153	93.86262143	140.9248909
Probability	0.096903296	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Sum	1.23376192	0.000272388	0.000282341	0.002153902	0.003208752	0.007178636	0.004206722	0.009608596
Sum Sq. Dev.	0.001117621	0.052967047	0.023601394	0.010784327	0.005646804	0.003060648	0.001166574	0.000819288
Observations	2484	2484	2484	2484	2484	2484	2484	2484

**Elaborado por:** Boris Bermúdez**Fuente:** Bolsa de Valores de Guayaquil

Las demás empresas e índices bursátiles generan información similar en sus respectivos análisis Multiresolución. Ante estos resultados y los obtenidos en los demás rendimientos accionarios, se comenta lo siguiente:

- Como se observa, los rendimientos, según la prueba Jarque-Bera con 95% de confianza, no distribuyen normalmente tanto en horizontes de tiempo a corto plazo (eventos de mayor frecuencia) como en horizontes de tiempo de largo plazo (eventos de menor frecuencia), lo cual nos permite rechazar la posibilidad de que a largo plazo los rendimientos converjan a una distribución normal.
- De la misma forma, la presencia de una marcada curtosis se mantiene para todos los horizontes de tiempo, aunque a horizontes de mayor duración presenta cierta reducción
- La asimetría de los rendimientos persiste en el corto y largo plazo.
- A niveles inferiores el análisis de Multiresolución captura fenómenos de mayor frecuencia y niveles superiores captura fenómenos de menor frecuencia. Por este motivo, la media y la desviación estándar, decrecen progresivamente a medida que crece el horizonte de tiempo analizado, sin embargo, sus valores son muy cercanos a ceros para todos horizontes de tiempo, lo cual confirma la baja volatilidad en los rendimientos generada por el bajo volumen de negociación existente en el mercado.

## 2.9.2 Comovimiento de rendimientos accionarios: enfoque de Wavelets

En esta sección se analiza la correlación entre los índices bursátiles Ecuindex e IRECU a diferentes horizontes de tiempo mediante el análisis multiresolución. En teoría, tanto el IRECU como el Ecuindex, muestran un resumen del movimiento global del mercado accionario ecuatoriano, y por tanto, estadísticamente no deben ser diferentes ya que los dos son construidos a partir de un mercado común.

Para este análisis, se tomará los rendimientos diarios de los índices para los periodos comprendidos entre el 2 de enero de 2007 y el 30 de septiembre de 2013, se les aplicará el análisis multiresolución y se calculará el coeficiente de correlación Wavelet para cada horizonte de tiempo. Así mismo, dado el rechazo de normalidad en los retornos, mediante la prueba no paramétrica de Mann Whitney se probará la igualdad entre los rendimientos de índices bursátiles, tanto para las series originales como para los detalles de multiresolución.

### 2.9.2.1 Correlación Wavelet

Bajo lo expuesto en (Téllez & López, 2010) y como ya se mencionó, es posible analizar una función  $f(t)$  por sus variaciones suaves  $\sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \Phi_{j_0,k}(t)$  y por sus detalles  $\sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$  a diferentes niveles de resolución  $\lambda_j$ . Bajo estos principios, se define la correlación Wavelet como:

$$\rho_x(\lambda_j) = \frac{\gamma_x(\lambda_j)}{\mathcal{V}_1(\lambda_j)\mathcal{V}_2(\lambda_j)}$$

En donde  $\gamma_x(\lambda_j)$  es la covarianza Wavelet definida por  $\gamma_x(\lambda_j) = \frac{1}{2\lambda_j} cov(w_{1,j,t}, w_{2,j,t})$ , y donde  $\mathcal{V}_1^2(\lambda_j)$  y  $\mathcal{V}_2^2(\lambda_j)$  son las varianzas de series  $x_1$  y  $x_2$  a cierto nivel de resolución  $\lambda_j$ .

### 2.9.2.2 Aplicación a los rendimientos

A continuación se muestra un resumen de la correlación entre los rendimientos del Ecuindex y el IRECU, tanto para sus series originales como para diferentes horizontes de tiempo.

**Tabla N° 16:** Resumen de correlación entre los rendimientos de Ecuindex y el IRECU

correlación	SERIE	a7	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7
	0.6529	0.7320	0.6126	0.6703	0.7457	0.7595	0.8058	0.5999	0.8356

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

Como se puede observar en el resumen, tanto en la series originales como para horizontes de tiempo de duraciones inferiores (2 días) y superiores (128 días), las correlaciones son claramente positivas, lo cual indica que los rendimientos, tanto del índice Ecuindex como del índice IRECU, se mueven en direcciones similares. Esto se valida la hipótesis de que los índices si

describen estadísticamente de forma similar el comportamiento del mercado accionario ecuatoriano.

De la misma manera, se presenta un resumen de la prueba no paramétrica de Mann Whitney para las series de rendimientos originales y para las diferentes escalas wavelet.

**Tabla N° 17:** Resumen de la prueba de Mann Whitney

MANM WHITNEY	
DATOS	P_VALOR
SERIES	0,5053
d1	0,7706
d2	0,8601
d3	0,9411
d4	0,5760
d5	0,7571
d6	0,4369
d7	0,8865

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

Como se puede observar en el resumen de la prueba no paramétrica de Mann Whitney, tanto para las series de rendimientos originales como para la escalas Wavelet a diferentes horizontes de tiempo, los p-valores son muy superiores al nivel de significancia de 0,05, por lo cual se acepta ampliamente la hipótesis de que los rendimientos de los dos índices bursátiles son estadísticamente similares y por tanto provienen estadísticamente de una misma población o mercado como tal en este caso.

## **2.10 ARBITRAJE EN EL MERCADO ACCIONARIO**

Revisando las bases de datos, construidas a partir de la información histórica de precios de acciones e índices bursátiles proporcionados por las Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil, se pudo encontrar que varias acciones cotizaron a precios diferentes tanto en Guayaquil como Quito para exactamente las mismas fechas; sin embargo la diferencia de precios parece ser bastante pequeña (a penas pocos centavos en algunos casos).

## **2.11 CONCLUSIONES FINALES SOBRE LA NATURALEZA Y EFICIENCIA DEL MERCADO ACCIONARIO ECUATORIANO**

A lo largo del desarrollo de este ensayo, mediante diversas técnicas y pruebas estadísticas se realizaron los siguientes hallazgos:

- Los rendimientos accionarios no siguen una distribución de probabilidad normal: los rendimientos e índices bursátiles presentaron un marcado exceso de curtosis y coeficientes de asimetría diferentes de cero (distribuciones asimétricas). El exceso de curtosis se generó, en la mayoría de casos, por la gran cantidad de rendimientos cero ocasionados para el bajo volumen de negociación en el mercado.
- Se hallaron estructuras de autocorrelación entre los rendimientos, lo cual indica la ausencia de independencia de los retornos. Se rechaza que los retornos

accionarios son un proceso puramente aleatorio, y por tanto si son predicibles en cierta medida yes posible aplicar modelos de pronosticos para su analisis.

- Se comprobó la estacionariedad de los rendimientos o variones de los precios, es decir, los precions de las acciones son un proceso estacionario en diferencia.
- Se verificó la estacionariedad en media para los rendimientos accionarios mediante la prueba Phillips Perron que considera la existencia de autocorrelaciones entre los rendimientos.
- Se hallaron evidencias de la heteroscedasticidad de la volatilidad para la mayoria de rendimientos bursatiles. Es posible analizar la volatilidad de los rendimientos mediante modelos tipo ARCH-GARCH.
- Es posible analizar los rendimientos eficientemente mediante las ecuaciones de la media y varianza obtenidas de los modelos ARCH-GARCH, sin embargo, para mas precision en el análisis también es posible el uso de modelos econométricos de memoria larga y fraccionarios.
- Se comprobó, mediante la estimación del Valor en Riesgo paramétrico (asumiendo distribucion normal en los rendimientos) y Valor en Riesgo no paramétrico (simulaciones de Monte Carlo) la ineficiencia de la distribución normal para describir el riesgo en el mercado accionario ecuatoriano.
- Mediante el análisis espectral, de forma general, no se hallaron efectos estacionales en los rendimientos.
- Mediante el uso de la teoria de Wavelets y estadística no paramétrica, se demostró que los rendimientos del mercado global descritos por los indices bursátiles Ecuindex e IRECU son estadisticamente iguales y evolucionan a

direcciones similares (movimientos correlacionados). Por tanto, la descripción de los rendimientos del mercado global presentada por cada uno de estos índices, no es estadísticamente diferente, aunque cotizen en montos monetarios diferentes por sus respectivos niveles de actividad bursatil.

- Existe la posibilidad de realizar arbitraje en el mercado accionario ecuatoriano.

En cuanto a la eficiencia de este mercado, bajo la hipótesis establecida por el profesor Eugene Fama y los resultados obtenidos mediante la estadística, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- No se cumple el supuesto de crecimientos  $\varepsilon$  independientes, por cuanto, como ya se mencionó, los precios son predicibles en cierta medida.
- Dado que los rendimientos no siguen una distribución normal, no se cumple la condición de normalidad de los incrementos  $\varepsilon$  establecida en el modelo de caminata aleatoria de la hipótesis de mercados eficientes.
- Se cumple el supuesto de estacionaridad en media para los rendimientos  $\varepsilon$ , pero se comprueba la no estacionaridad en varianza.
- No existen efectos estacionales significativos en los rendimientos que permitan obtener ventajas del mercado.
- Dada la existencia de estructuras de autocorrelación en los rendimientos, esto muestra el lento ajuste de los precios a la llegada de nueva información al mercado y la posibilidad de realizar especulación rentable. De la misma forma, la existencia de oportunidades de arbitraje confirman esto.

- El bajo nivel de negociación en este mercado, genera largos periodos de rendimientos teóricamente iguales a cero dado que no hay modificaciones en los precios. Esto días de ausencia de negociación son días donde teóricamente no se conoce el verdadero valor de mercado de dichas empresas.

Bajo estas conclusiones, en especial por las condiciones de predictibilidad de precios, arbitraje y bajo volumen de negociación, para esta investigación se considera que el mercado accionario ecuatoriano es ineficiente. En Ecuador no existe un mercado bursátil de renta variable desarrollado que lleve a los distintos agentes económicos a participar de actividades bursátiles cada vez mayores; por lo contrario, situaciones como la proliferación de las empresas familiares en la economía nacional y la falta de una cultura bursátil, hacen que el volumen de negociaciones sea bajo e irregular. Por otra parte, sí bien se comprobó que los precios de las acciones son, en cierta medida, predicibles, y consecuentemente, existe la posibilidad de que los pocos inversionistas que interactúan en este mercado puedan realizar especulación rentable, lo cual no es una característica de un mercado perfectamente competitivo, también existe la posibilidad de que eso se vea contrarrestado por el fenómeno de bajo volumen de negociación, es decir, ¿de que sirve tomar ventaja del mercado pronosticando razonablemente precios futuros, si quizás no hay personas dispuestas a vender y comprar acciones en un momento determinado?

En cuanto a la aplicación de la teoría clásica de las finanzas, dado que el mercado accionario ecuatoriano es ineficiente, según la hipótesis de mercados eficientes, tampoco es posible aplicar el modelo clásico de mercado CAPM, (problema de la hipótesis

conjunta). Así mismo, por las condiciones estadísticas antes mencionadas, modelos como la teoría del portafolio y el modelo Black & Scholes no deberían ser utilizados ya que producirían resultados poco coherentes dada la naturaleza estadística de este mercado.

**ENSAYO III**

**MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA DE PRECIOS Y  
CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS**

El objetivo fundamental de este ensayo es, bajo la teoría tratada en el Ensayo I y los hallazgos obtenidos en el Ensayo II, establecer los modelos matemáticos o adaptar los ya existentes en la literatura a las condiciones empíricas del mercado accionario ecuatoriano, y de esa forma, abordar temas como la dinámica de los precios de las acciones, construcción de portafolios de inversión y el riesgo en las inversiones.

### **3.1 DINÁMICA DE LOS PRECIOS Y RENDIMIENTOS**

#### **3.1.1 Perspectiva desde la literatura especializada**

##### Movimiento Browniano Geométrico

Como se vio en el Ensayo I, clásicamente en finanzas se ha utilizado el movimiento browniano geométrico para modelar la dinámica de los precios en los mercados bursátiles, sin embargo, su supuesto elemental es que los rendimientos siguen una distribución normal; un hecho que en el mundo real no es muy usual.

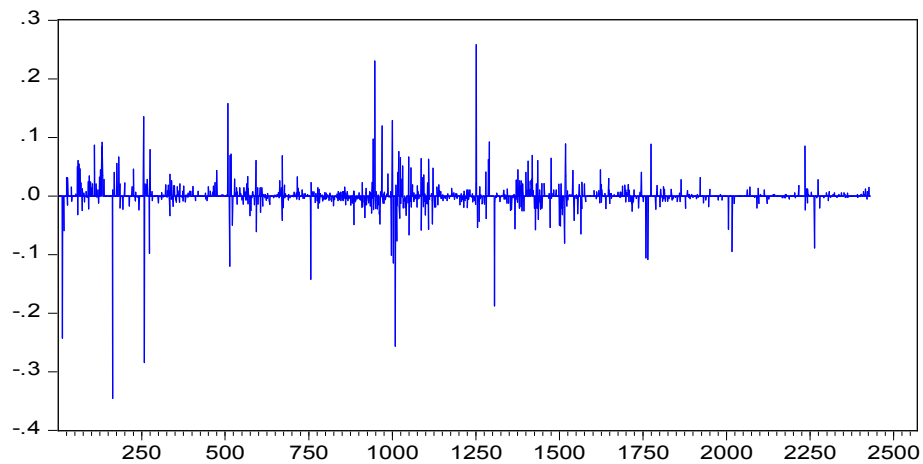
Por lo contrario, la gran mayoría de mercados accionarios presentan rendimientos con distribuciones marcadas por excesos de curtosis y sesgos, lo cual, también

sucedo en el mercado ecuatoriano como se mostr6 en el Ensayo II, por eso, ante esta situaci6n, un movimiento browniano geom6trico, ser6 incapaz de captar los movimientos de los precios en el mercado ecuatoriano de forma adecuada.

#### Procesos de difusi6n con saltos

Otro hecho muy cotidiano en la gran mayor6a de mercados burs6tiles, incluyendo el mercado accionario ecuatoriano, es la presencia de saltos en los rendimientos accionarios. Un salto se define como un alza o baja bastante fuerte en el precio del activo, tal como se puede observar en los rendimientos hist6ricos de Corporaci6n La Favorita.

**Gr6fico N6 24:** Rendimientos hist6ricos de La Favorita  
R\_FAVORITA



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Empresa La Favorita

Ante la presencia de estos saltos y la forma de la distribuci6n probabilista generada por los rendimientos antes descrita, el profesor Robert Merton (Premio Nobel 1997),

propuso la siguiente ecuación diferencial estocástica para modelar la dinámica de este tipo de rendimientos

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t + \mathcal{V} P_t dN_t$$

En donde la ecuación representa un movimiento browniano geométrico más un proceso de Poisson  $dN_t$ . En esta ecuación, el movimiento Browniano modela las fluctuaciones convencionales en los precios de la acción, mientras que el proceso de Poisson modela los movimientos anormales o saltos del precio de la acción. Después de aplicar el lema de Ito a la ecuación antes descrita, es posible definir la dinámica de los retornos y precios de la siguiente forma:

$$dP_t = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t + \ln(1 + \mathcal{V}) dN_t$$

$$P_t = P_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma \int_0^t dW_t + \ln(1 + \mathcal{V}) \int_0^t dN_t \right]$$

En la literatura especializada, es cotidiano reemplazar el proceso de Poisson convencional por un proceso de Poisson no homogéneo o compuesto para mejorar el modelo.

Si bien las características de esta ecuación, por su capacidad de captar las distribuciones leptocurticas y de colas pesadas, parecerían ser ideales para modelar los rendimientos y precios en el mercado accionario ecuatoriano, no es del todo aplicable como se verá más adelante.

En el mercado ecuatoriano es muy común que, por el bajo volumen de negociación, no existan cambios teóricos en los precios durante largos periodos de tiempo, lo cual genera series continuas de rendimientos cero durante ciertos lapsos de tiempo. Ante esta situación, el componente de movimiento browniano dentro de la ecuación del proceso de difusión con saltos, no permitiría simular este fenómeno debido a que presupone cambios continuos convencionales. Además de esto, en muchos casos, debido también al bajo volumen de negociación, se observó que la volatilidad se muestra como un parámetro estocástico y no constante como supone el movimiento browniano geométrico. Todas estas situaciones y hallazgos hacen inaplicables estos modelos para el caso ecuatoriano.

### **3.1.2 Modelamiento de la dinámica de los precios y rendimientos en Ecuador**

Como se pudo observar, dada las características estadísticas de los rendimientos accionarios, es muy difícil adaptar un modelo matemático tipo paramétrico (como el proceso de difusión con saltos) para describir la evolución en el tiempo del precio de las acciones en el mercado bursátil ecuatoriano; se requeriría de leyes de probabilidad más sofisticadas, axiomas matemáticos más complejos y métodos de estimación computacionalmente complicados. Ante esta situación, los métodos no paramétricos representan una alternativa teóricamente más sencilla y eficiente, de modo que, en la siguiente sección, se modelará bajo este criterio la evaluación en el tiempo del precio de las acciones.

### 3.1.2.1 Ecuación diferencial estocástica no paramétrica

Aunque la simulación no paramétrica no tiene una ley de probabilidad bien definida, logra capturar el comportamiento histórico de los rendimientos con gran precisión. Una manera de modelar la dinámica de los precios, sin restringirnos a una ley de probabilidad específica o un proceso estocástico de parámetros bien definidos, es modelar los precios mediante la ecuación diferencial estocástica que se propone a continuación:

$$dP_t = dZ_t$$

En donde  $Z_t$  es un proceso estocástico que se distribuye de forma equivalente a la distribución probabilística que históricamente han generado los rendimientos de la acción  $P_t$ . Conociendo el cambio de variable  $P_t = \ln(P_t)$ , se presenta la siguiente solución a la ecuación:

$$\int_0^t dP_t = \int_0^t dZ_t$$

$$\ln(P_t) - \ln(P_0) = Z_t \quad \text{ecuación de los rendimientos}$$

$$P_t = P_0 \exp(Z_t) \quad \text{ecuación de precios}$$

Como se observa, la solución de esta ecuación no requiere del cálculo de ningún parámetro estadístico proveniente de la serie histórica de rendimientos del precio de la acción  $P_t$ , sino que simplemente trabaja la

evaluación de precios mediante el proceso estocástico  $Z_t$  el cual se distribuye, como ya se mencionó, de forma equivalente a la distribución histórica generada por los rendimientos de la acción.

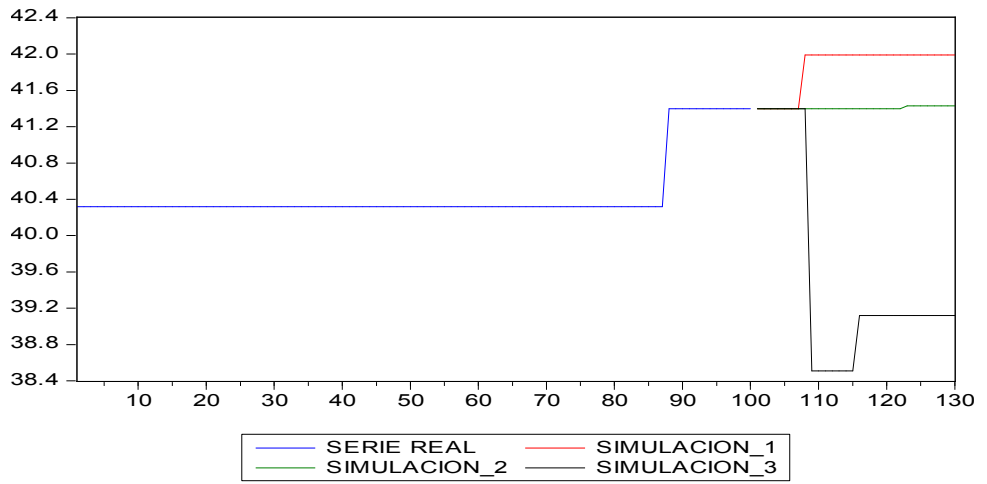
Como se mostró en el Ensayo II, una de las características de los retornos accionarios es que son un proceso estacionario, el cual, por definición mantiene constante en el tiempo la forma en cómo se distribuyen las realizaciones del proceso estocástico, de forma que, la ecuación diferencial estocástica no paramétrica propuesta, tiene un factor estocástico  $Z_t$  que conserva sus características teóricamente en todo momento y permite modelar adecuadamente la dinámica de la evolución del precio de las acciones.

### **3.1.2.2 Simulación del modelo no paramétrico de dinámica de precios**

A continuación, mediante el uso de la solución a la ecuación diferencial estocástica propuesta, se realizan simulaciones de varios posibles vectores de precios para algunas de las diferentes empresas analizadas en este trabajo. Se remite al anexo las simulaciones correspondientes al resto de acciones analizadas.

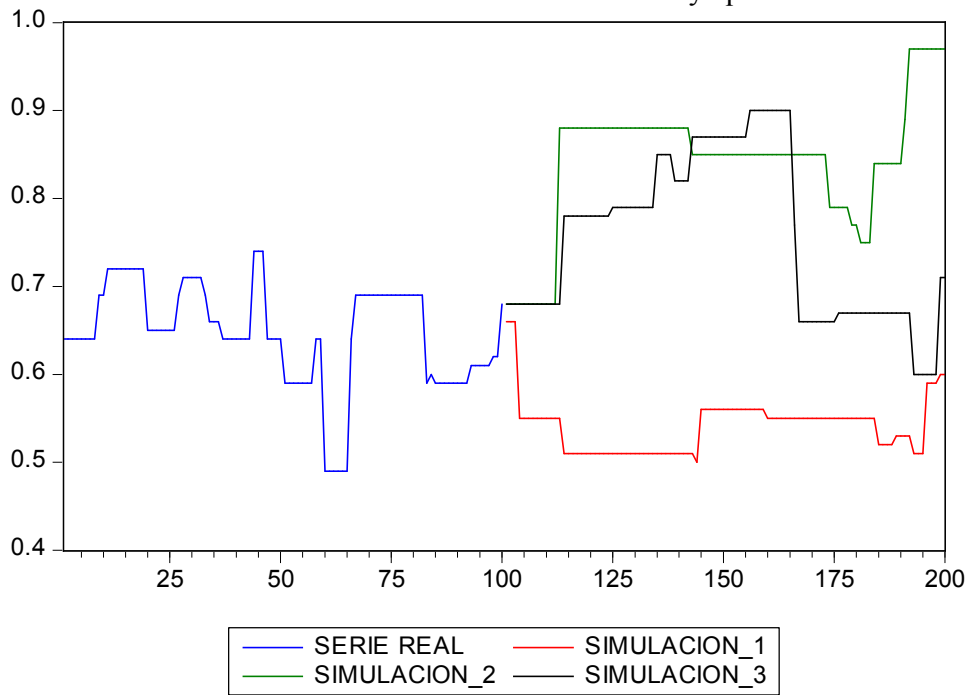
La serie de color azul representa la serie histórica de precios de la acción, mientras que las series de color rojo, azul y negro representan simulaciones realizadas con la ecuación propuesta.

**Gráfico N° 25:** Simulación de 30 días Cervecería Nacional

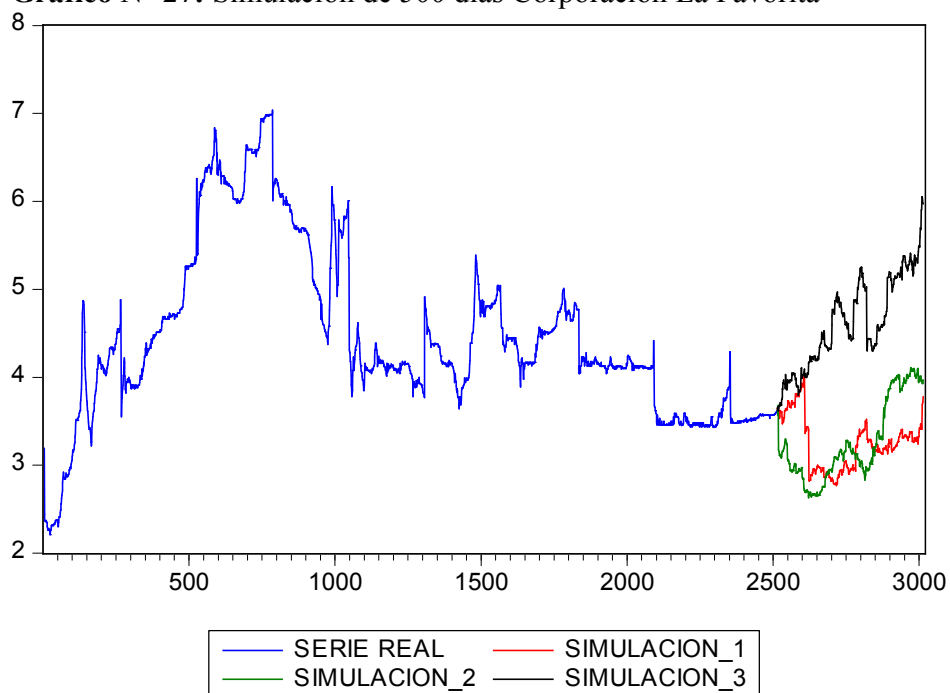


**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Gráfico N° 26:** Simulación de 100 días Banco de Guayaquil



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Gráfico N° 27:** Simulación de 500 días Corporación La Favorita

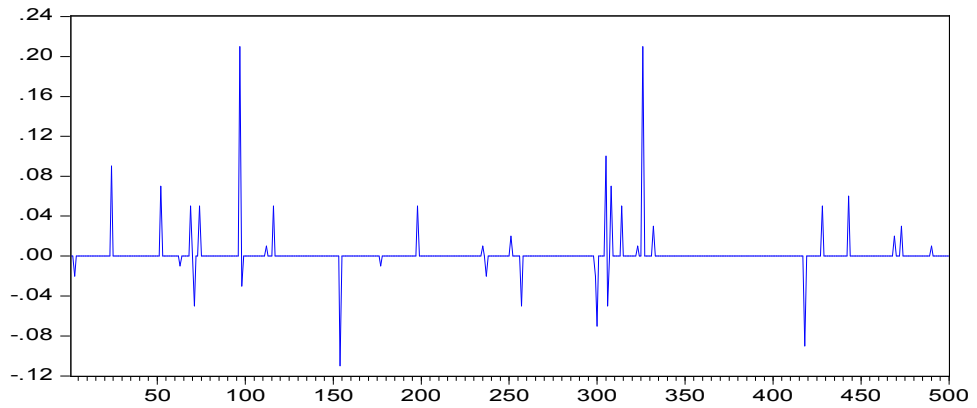
**Elaborado por:** Boris Bermúdez

Como se puede observar en las simulaciones, el modelo logra simular el comportamiento de baja variabilidad de los precios debido al bajo volumen de negociación en el mercado, lo cual es un hecho muy cotidiano en la realidad del mercado accionario ecuatoriano.

### 3.1.2.3 Rendimientos simulados

A continuación se presentan los rendimientos simulados para la empresa San Carlos y su distribución probabilística generada. Los resultados para las demás empresas se remiten al anexo de esta investigación.

**Gráfico N° 28:** Rendimientos simulados de San Carlos  
R\_SANCARLOS



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

Como se puede observar, la presencia de rendimientos cero y pocas variaciones de los rendimientos, usuales en el comportamiento de las acciones en el Ecuador, es adecuadamente simulado por el modelo propuesto. Ahora para estos mismos rendimientos simulados se presenta su distribución probabilística.

**Gráfico N° 29:** Distribución probabilística de San Carlos



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

De igual forma, teniendo coherencia con los rendimientos observados en el mundo real, los rendimientos simulados no se distribuyen normalmente y presentan un marcado exceso de curtosis en los rendimientos ceros y presencia de asimetría.

### 3.1.2.4 Validación empírica del modelo

Para validar el funcionamiento de la ecuación diferencial estocástica propuesta, se tomará la distribución probabilística generada por 1000 rendimientos simulados, y mediante la prueba no paramétrica de Mann Whitney se verificará que estos rendimientos y los rendimientos históricos sean estadísticamente iguales o provengan de una población.

Se remite al anexo los resultados computaciones obtenidos y se presenta un resumen de los resultados de la prueba no paramétrica de Mann Whitney para cada acción en la muestra de análisis.

**Tabla N° 18:** Resumen de validación mediante prueba Mann Whitney

RESUMEN DE VALIDACION MEDIANTE MANN WHITNEY				
RENDIMIENTO SIMULADO	RENDIMIENTO HISTORICO	N. DATOS	P-VALOR	VALIDACION
ALES	H_ALES	1000	0.82	SI
BCO GUAYAQUIL	H_BCO GUAYAQUIL	1000	0.17	SI
CERV NACIONAL	H_CERV NACIONAL	1000	0.82	SI
FAVORITA	H_FAVORITA	1000	0.14	SI
HOLCIN	H_HOLCIN	1000	0.89	SI
INVERSANCARLOS	H_INVERSANCARLOS	1000	0.73	SI
SAN CARLOS	H_SAN CARLOS	1000	0.52	SI

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

Bajo los resultados obtenidos con un nivel de confianza del 95%, se puede concluir que los rendimientos simulados y los rendimientos históricos no difieren entre sí mismos, y por tanto, el modelo es eficiente para modelar la dinámica de los precios de las acciones en el Ecuador.

### **3.2 CONSTRUCCIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN**

Bajo los resultados del Ensayo II se encontraron varias evidencias estadísticas que imposibilitaría el uso de la teoría del portafolio propuesta por Harry Markowitz basada en algoritmos de optimización matemática. A partir de esos resultados se puede decir lo siguiente:

Dado que la distribución empírica de los retornos accionarios no siguen una distribución normal, los conceptos de esperanza matemática y varianza de los retornos no serían parámetros eficientes como punto de partida para el proceso de optimización. Esto se debe a que en la práctica, sería más cotidiano esperar variaciones cero o muy próximas al promedio con mayor frecuencia de lo predicho por una distribución normal; lo mismo sucedería con los cambios extremos que podría experimentar el precio de las acciones.

Dado que la volatilidad es un factor estocástico, no es posible formar una estrategia minimización del riesgo (volatilidad) de la inversión estática, como usualmente se lo haría para un grupo definido de acciones. Por lo contrario se requeriría realizar proceso de

optimización dinámica para cada instante de tiempo; a pesar de la existencia de esta alternativa, este ejercicio tendría poco sentido práctico por los siguientes motivos:

- Se podría realizar esto mediante el uso de modelos GARCH Multivariados, sin embargo su costo computacional es tan alto que el software estadístico y matemático convencional no logran calcular eficientemente el modelo cuando el número de acciones es grande (más de 304 acciones en el portafolio).
- La falta de negociación de la gran mayoría de acciones participantes en este mercado, hace que el ejercicio de una optimización de portafolio para cada instante de tiempo (al menos cada día), sea un esfuerzo injustificado dado que lo más probable en horizontes cortos de tiempo, como se mostró en el Ensayo II, es que las variaciones sean muy pequeñas o incluso que no se den.

### **3.2.1 Simulación de un portafolio de inversiones**

En esta sección se simulará la evolución del valor de un portafolio de inversiones conformado por las acciones de las empresas que conforman la muestra de análisis. Este ejercicio se plantea como una herramienta para analizar el efecto de diversas estrategias de selección de cartera o construcción del portafolio.

Como primera parte, se sabe que, para un instante de tiempo dado, el valor de un portafolio en un instante  $t$  es la suma de del valor  $P_t$  de las acciones que lo componen por la cantidad  $a_i$  que se posee de cada acción del portafolio, es decir

$$V_{Portafolio} = (a_1 * P_{t,1}) + (a_2 * P_{t,2}) + \dots + (a_n * P_{t,n})$$

Si se asume que los precios evolucionan mediante la solución a la ecuación diferencial estocástica antes propuesta, se podría definir el valor de un portafolio en el instante  $t$  mediante la ecuación:

$$V_{Portafolio} = \sum_{i=1}^n a_i (P_{i,0} \exp\{Z_{it}\})$$

Donde  $a_i$  es el número de acciones que el portafolio mantiene por cada empresa.

De manera esquivarte, se puede presentar el rendimiento del portafolio como

$$R_{Portafolio} = \sum_{i=1}^n w_i Z_{it}$$

En donde  $w_i$  es la proporción de recursos invertida en cada empresa que conforma el portafolio.

Ahora, el dilema se encuentra en como determinar las proporciones  $w_i$  de recursos que deben asignarse a cada activo del portafolio, sabiendo que los fundamentos de la teoría del portafolio se quebrantan ampliamente por las características estadísticas de las acciones y sus rendimientos. Resolver este dilema representa por sí mismo

uno de los grandes problemas sin resolver de las finanzas modernas; sin embargo, se responderá a este dilema examinando diversas estrategias de inversión mediante simulaciones.

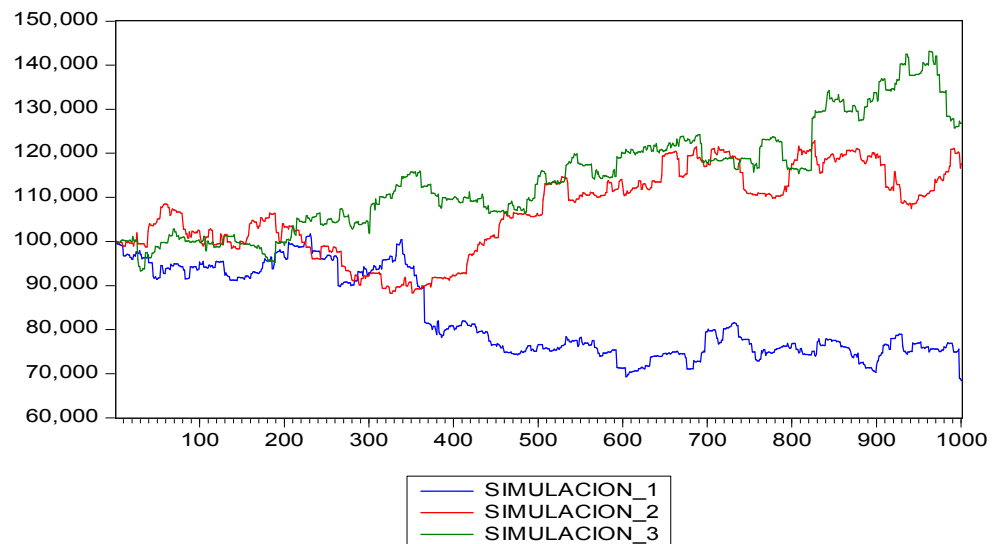
Para llevar a cabo esta simulación, se utilizara el paquete Crystal Ball, y se realizará lo siguiente:

- Una primera simulación usando la ecuación de la dinámica del portafolio, suponiendo que se invierte en cada activo la misma proporción de recursos, ya que para un inversionista neutral al riesgo le es indiferente escoger entre una y otra alternativa de inversión.
- Una segunda simulación usando la ecuación de la dinámica del portafolio, suponiendo que se invierte en cada activo la proporción de recursos sugerida por el modelo de Markowitz. Se hará esto, dado que sería la estrategia que adoptaría un inversionista si asumiese que los supuestos de la teoría clásica son verdaderos, y que por tanto, siente aversión al riesgo. De hecho, en el mundo real, los administradores de portafolios de inversión usan la teoría a pesar de conocer que los supuestos de los modelos son quebrantados.
- Se asumirá que se inicia en el instante  $t = 0$  con una inversión de \$100.000,00 y realizarán simulaciones para mil días de actividad bursátil.
- Se obtendrá la distribución probabilística de los rendimientos del portafolio para verificar que se distribuya de igual forma en que lo hacen las series de rendimientos observadas en el mercado.

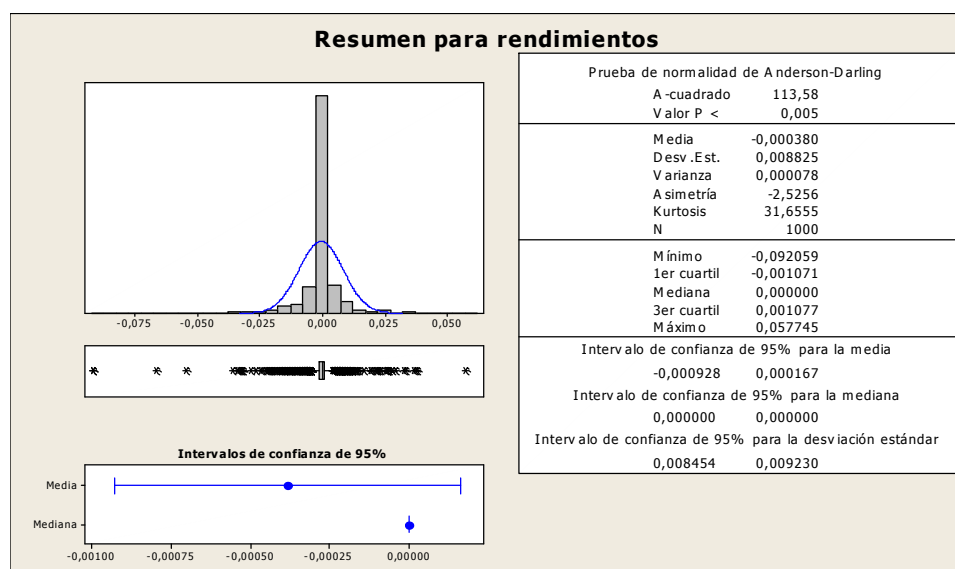
- Se estimará el Valor en Riesgo (VAR) para diferentes horizontes de tiempo utilizando la metodología no paramétrica, es decir, tomando el percentil de la distribución de rendimientos simulados. Esto se lo realiza con el fin de evaluar las diferencias en cuanto al riesgo que existirán entre las estrategias de construcción de portafolios simuladas.
- Se analizará la media y volatilidad (desviación estándar) de las simulaciones realizadas, como un parámetro netamente informativo de los resultados obtenidos, y no como la volatilidad real del proceso estocástico que dirige los retornos de las acciones.

### 3.2.1.1 Simulación de estrategia neutral al riesgo

**Gráfico N° 30:** Evolución del valor del portafolio



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Gráfico N° 31:** Distribución probabilística de rendimientos**Elaborado por:** Boris Bermúdez**Tabla N° 19:** Valor en Riesgo

SIMULACION 1		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-3.18%
30	99%	-17.42%
100	99%	-31.80%
SIMULACION 2		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-2.66%
30	99%	-14.56%
100	99%	-26.58%
SIMULACION 3		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-2.45%
30	99%	-13.40%
100	99%	-24.46%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Tabla N° 20:** Rendimiento promedio y volatilidad del portafolio

PORTAFOLIO NEUTRAL AL RIESGO(NO OPTIMIZADO)		
RENDIMIENTOS	PROMEDIO	VOLATILIDAD
SIMULACIÓN 1	-0.0380%	0.8825%
SIMULACIÓN 2	0.0161%	0.7128%
SIMULACIÓN 3	0.0237%	0.7785%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

### 3.2.2.2 Simulación suponiendo portafolio óptimo: estrategia de aversión al riesgo

#### Matriz de Covarianzas y Proporción de inversión que minimiza la varianza

La optimización de un portafolio con el supuesto de que la teoría es coherente con la realidad (lo cual no pasa en el caso ecuatoriano como lo se mostró en el Ensayo II), se realizó mediante Excel y su complemento de optimización Solver. Primero se da una corta revisión del modelo de Markowitz y posteriormente se mostrarán los resultados.

La teoría clásica del portafolio de Harry Markowitz afirma que, si los retornos se distribuyen normalmente, entonces el rendimiento esperado y la varianza esperada de un activo se definen como:

$$E(r_i) = \mu$$

$$Var(r_i) = \sigma^2$$

Así mismo, se plantea el supuesto de que los retornos son un evento puramente aleatorio y estacionario, por lo cual los parámetros de media y varianza serían teóricamente constantes en el tiempo, y bajo el mismo principio, la forma de la distribución probabilística sería estable en el tiempo. Bajo estos supuestos, se puede definir la media y la varianza de un portafolio de inversiones de la siguiente forma:

$$E(r_p) = \sum_i w_i E(r_i)$$

$$Var(r_p) = \sum_i w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{i \neq j} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Donde  $\rho_{ij}$  es el coeficiente de correlación entre los retornos de la inversión  $i$  y  $j$ , de forma que  $\rho_{ij} = 1$  cuando  $i = j$ . Bajo estos conceptos, la volatilidad del portafolio vendría dada por:

$$\sigma_p = \sqrt{Var(r_p)}$$

Una vez obtenidas estas definiciones, Markowitz plantea encontrar las proporciones de  $w_i$  de recursos destinada a cada inversión que minimicen el riesgo, resolviendo el siguiente problema de optimización matemática:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Var}(r_p) \\ \text{s. a.} \quad & \sum_i w_i = 1 \\ & \sum_i w_i E(r_i) = E(r_p) \\ & w_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \dots n \end{aligned}$$

A continuación se presentan los resultados de la optimización del portafolio compuesto por las acciones analizadas en este trabajo.

**Tabla N° 21:** Optimización del portafolio teórico

RENDIMIENTO PORTAFOLIO	1.52%
VARIANZA MÍNIMA DEL PORTAFOLIO	1.12%
DESVIACIÓN DEL PORTAFOLIO	10.58%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

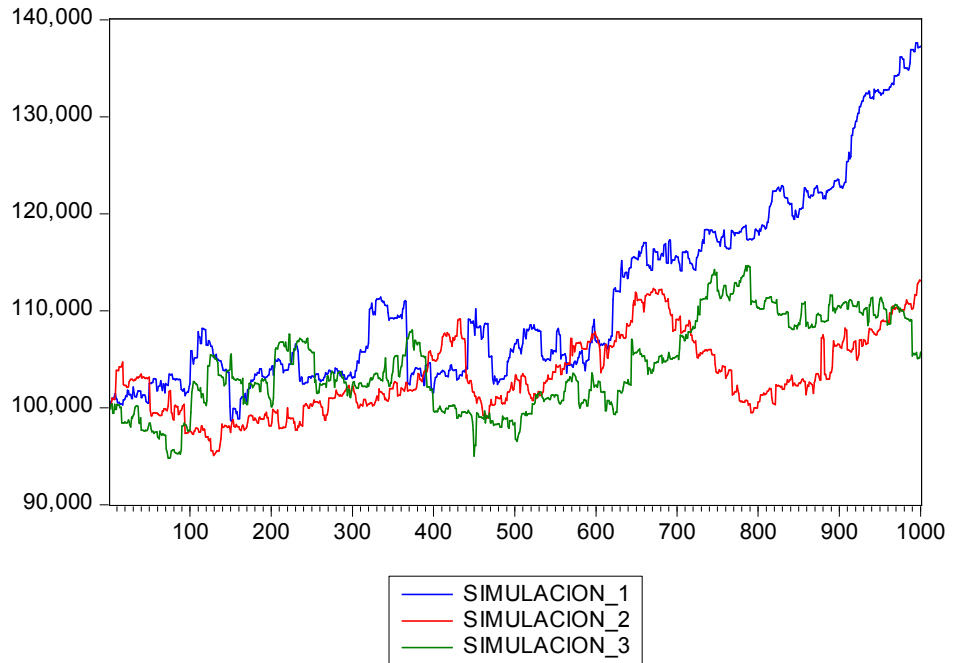
**Tabla N° 22:** Matriz de varianza covarianza del portafolio y proporciones  $w_i$  óptimas

	HOLCIN	FAVORITA	ALES	BCO GUAYAQUIL	CERV NACIONAL	INVER SANCARLOS	SAN CARLOS
HOLCIN	0.00794%	0.00027%	0.00043 %	-0.00037%	0.00009%	0.00017%	0.00025%
FAVORITA	0.00027%	0.02270%	0.00251 %	-0.00052%	-0.00007%	-0.00051%	0.00059%
ALES	0.00043%	0.00251%	0.05287 %	0.00025%	0.00002%	-0.00008%	0.00052%
BCO GUAYAQUIL	0.00037%	-0.00052%	0.00025 %	0.11483%	0.00037%	-0.00190%	-0.00215%
CERV NACIONAL	0.00009%	-0.00007%	0.00002 %	0.00037%	0.01378%	-0.00018%	0.00001%
INVER SANCARLOS	0.00017%	-0.00051%	0.00008 %	-0.00190%	-0.00018%	0.02708%	0.00382%
SAN CARLOS	0.00025%	0.00059%	0.00052 %	-0.00215%	0.00001%	0.00382%	0.03800%
PROPORCIÓN	38%	13%	6%	3%	22%	11%	7%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

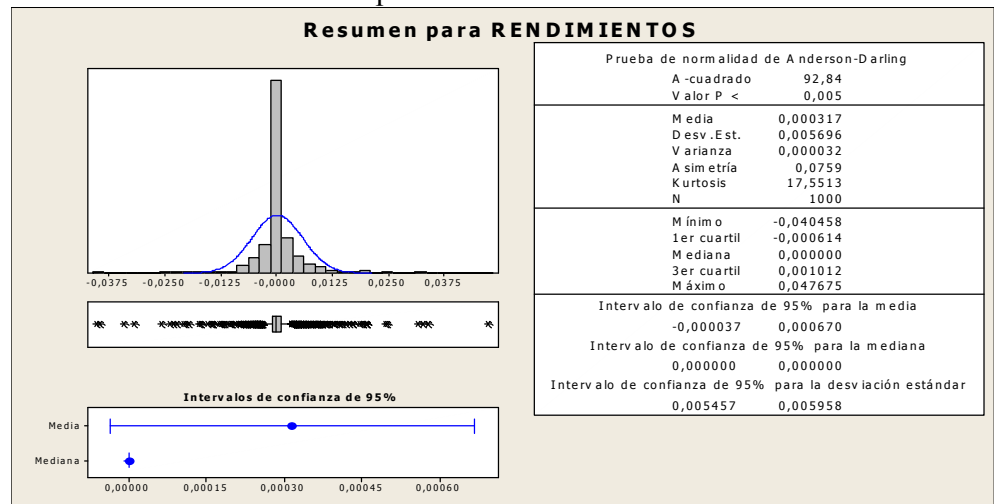
**Fuente:** Bolsas de valores de Quito y Guayaquil

**Gráfico N° 32:** Evolución del valor del portafolio



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Gráfico N° 33:** Distribución probabilística de rendimientos



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Tabla N° 23: Valor en Riesgo**

SIMULACION 1		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-1.97%
30	99%	-10.82%
100	99%	-19.75%
SIMULACION 2		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-1.66%
30	99%	-9.09%
100	99%	-16.60%
SIMULACION 3		
HORIZONTE DE TIEMPO(DIAS)	CONFIABILIDAD	VALOR EN RIESGO (VAR)
1	99%	-2.01%
30	99%	-11.03%
100	99%	-20.13%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Tabla N° 24: Rendimiento promedio y volatilidad del portafolio**

PORTAFOLIO ADVERSO AL RIESGO (OPTIMIZADO)		
RENDIMIENTOS	PROMEDIO	VOLATILIDAD
SIMULACIÓN 1	0.0317%	0.0317%
SIMULACIÓN 2	0.0124%	0.5031%
SIMULACIÓN 3	0.0056%	0.5737%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

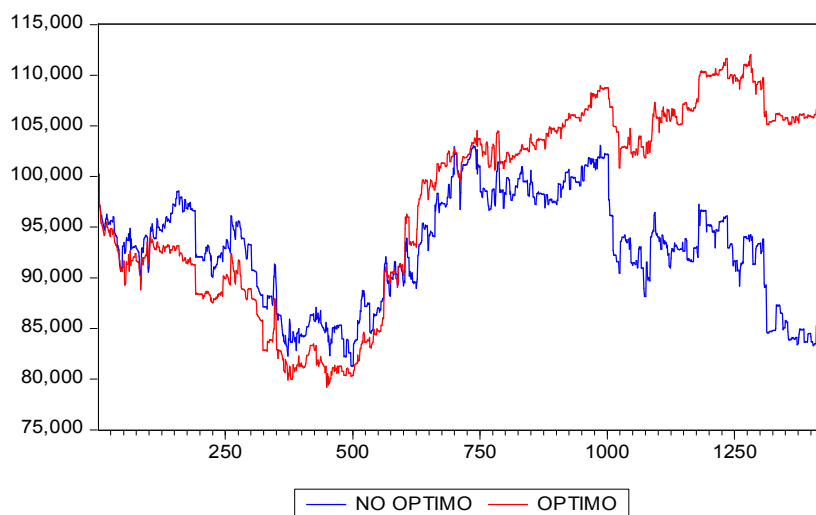
### 3.2.3 Perspectiva histórica de un portafolio

En esta sección, se dejan de lado las ecuaciones diferenciales estocásticas y las simulaciones para trabajar nuevamente con los datos históricos; se tomarán los rendimientos accionarios correspondientes a los últimos 1428 días de información bursátil, y se construirá la evolución que hubiese experimentado el valor de un portafolio teórico compuesto por dichas acciones. Esta sencilla labor se la realiza por los siguientes motivos:

- Comparar la magnitud del riesgo que podría haber experimentado un portafolio en el mercado en comparación al riesgo analizado mediante simulaciones. Para realizar esto, se tomará el Valor en Riesgo del portafolio basado en datos históricos.
- Verificar el efecto que habrían tenido estrategias de construcción de portafolios con criterios de optimización y sin criterios de optimización en el mundo real.
- Verificar la coherencia de los resultados obtenidos anteriormente mediante simulaciones.

### 3.2.3.1 Resultados

**Gráfico N° 34:** Evolución de los portafolios teóricos



**Elaborado por:** Boris Bermúdez  
**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

**Tabla N° 25:** Valor en riesgo portafolio no óptimo

VALOR EN RIESGO (PORTAFOLIO NO OPTIMO)		
CONFIABILIDAD	HORIZONTE DE TIEMPO (DIAS)	VAR
99%	1	-2.46%
99%	30	-13.45%
99%	100	-24.56%

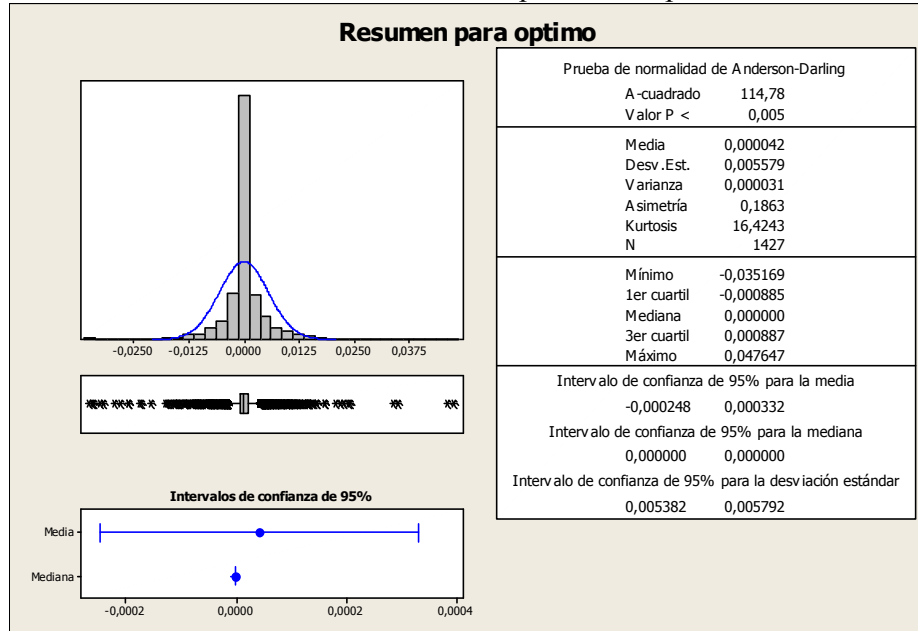
**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Tabla N° 26:** Valor en riesgo portafolio óptimo

VALOR EN RIESGO (PORTAFOLIO OPTIMO)		
CONFIABILIDAD	HORIZONTE DE TIEMPO (DIAS)	VAR
99%	1	-1.69%
99%	30	-9.28%
99%	100	-16.94%

**Elaborado por:** Boris Bermúdez

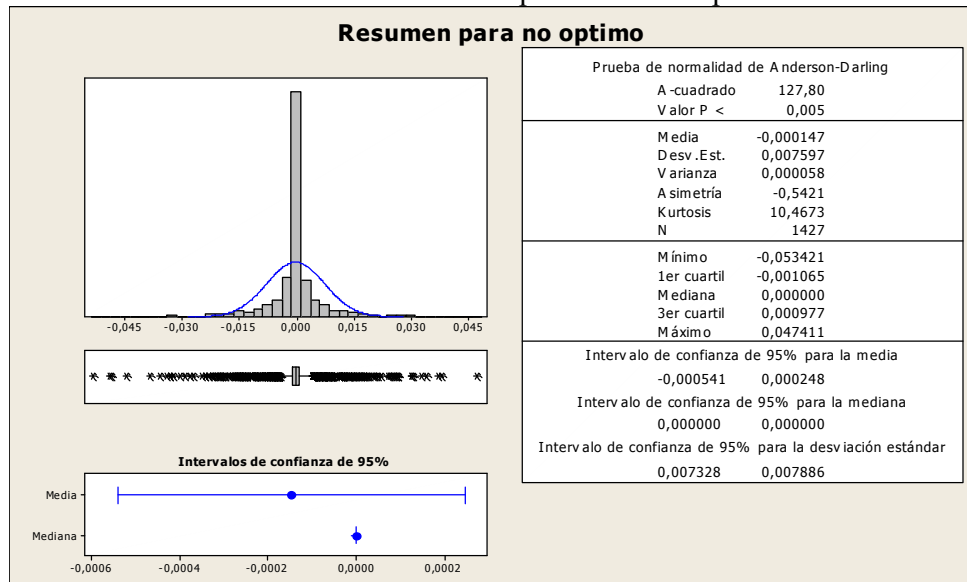
**Gráfico N° 35:** Resumen estadístico del portafolio óptimo



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

**Gráfico N° 36:** Resumen estadístico del portafolio no óptimo



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

### **3.2.3.2 Análisis econométrico del portafolio histórico**

En esta sección, se analiza el comportamiento estadístico del portafolio teórico basado en información histórica, se remite al anexo el análisis completo y se muestran los resultados de mayor relevancia.

#### Distribución probabilística de los rendimientos

Como siempre, el portafolio histórico mostro una distribución de los rendimientos con exceso de curtosis y asimetría, por lo cual, y en coherencia con la prueba Jarque-Vera, se rechaza la hipótesis de distribución normal de los retornos del portafolio teórico.

#### Autocorrelación y estructuras ARMA

Tomando los retornos que hubiese generado el portafolio optimo teórico, mediante el análisis de autocorrelación y la prueba de raíz unitaria, se verificó la estacionariedad de los retornos y la ausencia de independencia entre estos, por lo cual fue posible modelar este comportamiento mediante un modelo ARMA(1,1).

### Volatilidad Estocástica

De igual manera, los rendimientos cuadrados del portafolio y los residuos cuadrados del modelo ARMA (1,1) sugieren la existencia de efectos ARCH dentro de la volatilidad de los rendimientos del portafolio, de manera que fue posible ajustar un modelo GARCH para definir una ecuación de la media y varianza del proceso estocástico de los rendimientos del portafolio teórico.

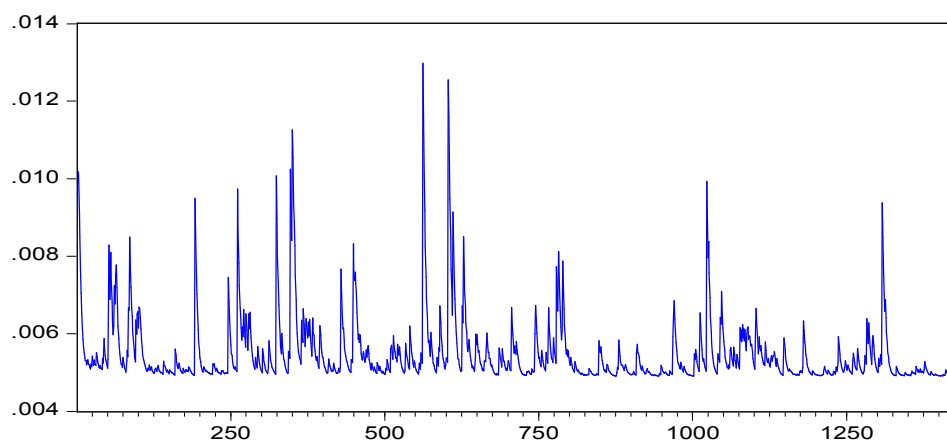
### Modelo GARCH

Ecuación de la varianza  $\sigma_{t+1}^2 = 6.73E - 06 + 0.061515\varepsilon_t^2 + 0.720602\sigma_t^2$

Ecuación de la desviación estándar (volatilidad)  $\sigma_{t+1} =$

$$\sqrt{6.73E - 06 + 0.061515\varepsilon_t^2 + 0.720602\sigma_t^2}$$

**Gráfico N° 37:** Volatilidad del portafolio  
DESVIACION\_PORTAFOLIO



**Elaborado por:** Boris Bermúdez

**Fuente:** Bolsas de Valores de Quito y Guayaquil

### 3.2.4 Análisis de resultados

Mediante las diversas simulaciones y pruebas estadísticas que se han realizado en esta sección, se concluye lo siguiente con respecto a la gestión de portafolios y el riesgo en las inversiones:

- En cuanto a la estrategia de construcción de portafolios, se observa que los parámetros estadísticos y los valores en riesgo (VAR) estimados en portafolios optimizados, indican menor volatilidad, menores pérdidas extremas y mayores retornos que los portafolios contruidos sin criterios de optimización, incluso cuando se quebrantan los supuestos estadísticos de la teoría clásica del portafolio. Así mismo, el portafolio teórico optimizado y basado en información histórica generó mejores rendimientos y menor riesgo que la estrategia alternativa.
- En lo que concierne a la teoría clásica del portafolio, por mucho, tanto en el análisis estadístico del Ensayo II y las simulaciones realizadas en esta sección, los datos muestran un claro incumplimiento de sus supuestos elementales; de modo que, parece un poco sorprendente que la estrategia de optimización del portafolio genere mejores resultados que la estrategia alterna utilizada en estos análisis. Sin embargo, esto no quiere decir que la optimización clásica del portafolio es siempre la mejor estrategia de construcción de un portafolio de inversiones, sino que simplemente significa que es una buena estrategia y que aún es posible encontrar estrategias de optimización mejores si se recurre a modelos matemáticos y estadísticos más

complejos (modelos GARCH multivariados, distribuciones probabilísticas más sofisticadas, etc.).

- Además de las condiciones matemáticas y estadísticas requeridas para el funcionamiento eficaz de la teoría clásica de portafolios, no hay que olvidar el principio de diversificación. En el mercado accionario ecuatoriano, existen un reducido número de empresas cotizan acciones en este mercado, por lo cual, las alternativas de diversificación son realmente reducidas.
- Dada la existencia de la volatilidad estocástica en el mercado y la ausencia de normalidad en la distribución de los rendimientos accionarios, el valor en riesgo (VAR) no paramétrico se presenta como una gran medida de riesgo. tomar el VAR de simulaciones de portafolios o de sus rendimientos pasados, nos ayuda a comprender de mejor manera el riesgo que implica cierta estrategia de construcción de portafolios.
- A pesar de la dificultad que implica estimar las proporciones de inversión ideales para cada activo dentro del portafolio mediante modelos GARCH multivariados o cualquier otro instrumento matemático más sofisticado; es posible evaluar el desempeño de una estrategia de inversión ya adoptada si analizamos el rendimiento y la volatilidad del portafolio mediante el análisis econométrico convencional.
- Dada la existencia de posibilidades de arbitraje en el mercado, como se expuso en el Ensayo II, el valor de un portafolio estaría sujeto a las pequeñas divergencias existentes entre los precios cotizados en la Bolsa de Valores de Quito y Guayaquil.

- Los portafolios simulados y los basados en información histórica, mostraron variaciones en su valor con mayor frecuencia que las acciones de forma individual. Esto se debe a que mientras ciertas acciones no registran transacciones hay otros que si lo hacen y generan variaciones en el valor del portafolio. Este comportamiento empíricamente se lo observa en las cotizaciones de los índices IRECU y Ecuindex, los cuales son construidos mediante las cotizaciones de las empresas más importantes del mercado.
- A pesar de que el valor de los portafolios fluctúa con mayor frecuencia que las acciones en forma individual, en horizontes cortos de tiempo (como por ejemplo 20 días) las fluctuaciones no son tan frecuentes o significativas.
- En el corto plazo los portafolios no logran ganancias significativas, por lo contrario, las ganancias más fuertes se generan mediante un proceso lento y evolutivo, tal como se muestran en las simulaciones de 1000 días de actividad bursátil y el portafolio basado en información histórica correspondiente a 1400 días aproximadamente.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 4.1 CONCLUSIONES

- Bajo el análisis estadístico realizado en el Ensayo II, se demuestra la ineficiencia del mercado, principalmente, por la existencia de predictibilidad en precios y rendimientos accionarios, así como también, la existencia de posibilidades de realizar arbitraje.
- De forma general, no se detectó la existencia de comportamientos estacionales claramente definidos en los rendimientos accionarios. Esto muestra que los inversionistas no modifican sus expectativas con respecto a los precios durante fechas específicas del año.
- A pesar de que los índices de mercado Ecuindex e IRECU cotizan en diferentes montos, por los diferentes niveles de actividad existentes entre la Bolsa de Valores de Quito y la Bolsa de Valores de Guayaquil, sus rendimientos provienen estadísticamente de un mismo mercado, por lo cual, existe coherencia estadística entre los índices.
- La ecuación diferencial estocástica propuesta en el Ensayo III representa una buena alternativa para la construcción de posibles escenarios de trayectorias de precios, desempeño de portafolios y análisis de riesgos en las inversiones.

- Una vez construido un portafolio, es posible analizar su desempeño mediante análisis estadístico convencional.
- A pesar de que las características estadísticas del mercado incumplen los supuestos de la teoría financiera clásica, la teoría del portafolio representa una buena estrategia de inversión cuando es difícil usar técnicas matemáticas y estadísticas más complejas de optimización dinámica.
- No se debe considerar a la teoría clásica del portafolio como la mejor estrategia para construir un portafolio, dado que es posible mejorar esta labor tomando caminos más complejos.
- El reducido número de empresas que cotizan acciones en las bolsas de valores ecuatorianas es tan reducido que no es posible diversificar un portafolio razonablemente.

## **4.2 RECOMENDACIONES**

- Dada la no normalidad en la distribución de los rendimientos accionarios, los métodos de simulación y estimación estadística no paramétricos, representan buenas herramientas para evaluar riesgos, escenarios y comportamiento en las inversiones bursátiles.
- Dada la aparente predictibilidad de los precios y rendimientos, es una buena alternativa analizar, en forma individual los precios y rendimientos accionarios, mediante modelos ARIMA (P,I,Q) y modelos tipo ARCH-GARCH. El análisis podría mejorar con modelos de memoria larga y modelos fraccionarios.

- Se recomienda la construcción dinámica de portafolios mediante modelos M-GARCH tanto para la estimación de la volatilidad como para optimización más eficaz de un portafolio de inversiones. Todo esto, siempre y cuando, se disponga de la herramienta computacional adecuada y sea una acción justificada, caso contrario, usar la teoría del portafolio convencional es una buena alternativa.
- En ambientes de volatilidad estocástica, se recomienda el uso complementario de medidas de riesgo alternas como el VAR.
- Toda estimación estadística usada en la construcción de una estrategia de inversión, deben ser interpretada considerando que existe la posibilidad de realizar arbitraje en el mercado, y que por tanto, dependiendo la bolsa de valores donde se realicen las operaciones, las situaciones pueden diferir con mayor o menor intensidad que lo sugerido en la estimación.

## BIBLIOGRAFÍA

- Al-Gwaiz, E. (2007). *Elements of real analysis*. Estados Unidos: Chapman&Hall.
- Araujo, J. (2008). *Valoracion y volatilidad de acciones en mercados de baja liquidez utilizando un modelo en base a variables latentes estimado mediante el filtro de Kalman*. Chile: Universidad de Chile, tesis de maestria.
- Burrus, S., Gopinath, R., & Guo, H. (1998). *Introuction to wavelets and wavelet transform*. Estados Unidos de America: Prentice Hall.
- Casas, M., & Cepeda, E. (2008). Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: aplicaciones a series financieras. *Cuadernos de Economía* , 287-319.
- Chamorro, D. (2010). *Espacios de Lebesgue y Lorentz*. Quito, Ecuador: Escuela Politecnica Nacional.
- Garcia, A. (2008). *Teorías de la medida y la probabilidad*. Caceres, España: Universidad de Extremadura.
- Gujarati, D. (2009). *Econometría*. Mexico: McGraw Hill.
- Haberman, R. (2003). *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*. Mexico: Prentice Hall.
- Hamilton, J. (1994). *Time series analysis*. Estados Unidos: Princeton University Press.
- Krantz, S. (2005). *Real analysis and foundations*. Estados Unidos: Chapman&Hall.
- Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para la ingeniería II*. Mexico: Editorial Limusa.
- Krinckeborg, k. (1965). *Teoría de la probabilidad*. Barselona, España: Teide.
- Mendenhall, W., Scheaffer, R., & Dennis, W. (1986). *Estadística matemática com aplicaciones*. Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Oksendal, B. (2000). *Stochastic differential equations*. Alemania: Recuperado de [http://dis.unal.edu.co/~gjhernandezp/sim/lectures/StochasticModels/SDE/Oksendal%20B.%20-%20Stochastic%20Differential%20Equations%20\(5th%20ed.\).pdf](http://dis.unal.edu.co/~gjhernandezp/sim/lectures/StochasticModels/SDE/Oksendal%20B.%20-%20Stochastic%20Differential%20Equations%20(5th%20ed.).pdf).
- Oppenheim, G. (2007). *Wavelets and their application*. Estados Unidos: ISTE.
- Pathak, R. (2009). *The wavelet transform*. Paris-France: Atlantis Press.
- Perez, C. (2006). *Econometria de las series temporales*. España: Prentice Hall.
- Proakis, J., & Manolakis, D. (2007). *Tratamiento digital de señales*. España: Prentice Hall.
- Rincón, L. (2012). *Introducción a los procesos estocásticos*. Mexico : Departamento de Matemáticas UNAM.
- Spiegel, M. (1976). *Variables reales*. Mexico: McGraw-Hill.
- Téllez, J., & López, P. (2010). Comovimiento entre mercados accionarios de América Latina y Estados Unidos: Un enfoque de wavelets. *Economía: Teoría y Practica*, 55-82.
- Tsay, R. (2010). *Analysis of financial time series*. Estados Unidos: Wiley and sons.
- Van, J. (2013). *Advanced stochastic processes part I and part II*. recuperado de Bookboom.com.
- Vanegas, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos*. Mexico: Cengage Learning.
- Vries, A. d. (2006). Recuperado el 20 de diciembre de 2013, de <http://math-it.org/Publikationen/Wavelets.pdf>
- Walker, J. (2008). *A primer on wavelets and their scientific application*. Estados Unidos: Chapman&Hall.
- Weelk, M. (2007). *Signal processing using matlab and wavelets*. Estados Unidos : Infinitive Science Press.
- Zill, D., & Cullen, M. (2006). *Cálculo vectorial, análisis de Fourier y análisis complejo*. Mexico: McGraw-Hill.

ANEXOS

# FORMATO DIGITAL