PARA TÍTULOS PROFESIONALES DE LICENCIATURA (TERCER NIVEL)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

DECLARACIÓN y AUTORIZACIÓN

Yo, **LEONEL EDMUNDO CUEVA GUERRERO** con Cédula de Identidad No. **172009944-7,** autor del trabajo de graduación intitulado: **"APROXIMACIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA INTUICIONISTA MEDIANTE LA TEORÍA MATEMÁTICA DE KANT"**, previa a la obtención del título profesional de **LICENCIADO EN FILOSOFÍA** en la Facultad Eclesiástica de **Ciencias Filosófico-Teológicas**:

1.- Declaro tener pleno conocimiento de la obligación que tiene la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, de conformidad con el artículo 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior, de entregar a la SENESCYT en formato digital una copia del referido trabajo de graduación para que sea integrado al Sistema Nacional de Información de la Educación Superior del Ecuador para su difusión pública respetando los derechos de autor.

2.- Autorizo a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador a difundir a través de sitio web de la Biblioteca de la PUCE el referido trabajo de graduación, respetando las políticas de propiedad intelectual de Universidad.

Quito, 9 de agosto de 2016

Leonel Edmundo Cueva Guerrero
C.I. 172009944-7

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

FACULTAD DE CIENCIAS FILOSÓFICO-TEOLÓGICAS

ESCUELA DE FILOSOFÍA

DISERTACIÓN PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIATURA EN FILOSOFÍA

APROXIMACIÓN A LA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA INTUICIONISTA MEDIANTE LA TEORÍA MATEMÁTICA DE KANT

AUTOR: LEONEL EDMUNDO CUEVA GUERRERO

DIRECTOR: ALFONSO MONTALVO ZUMÁRRAGA

QUITO, 2016

A Janett Guerrero Camacho

RESUMEN

A principios del siglo veinte se dio una discusión enriquecedora en torno a la fundamentación de la Matemática, en dicha discusión tomaron el rol protagónico dos escuelas matemáticas con raíces eminentemente filosóficas: El Formalismo y el Intuicionismo. El Intuicionismo representó de la mano de su fundador Brouwer un punto de discordancia en relación a la visión normal de la mayoría de matemáticos de aquel tiempo y del presente. Renunciando a cualquier tipo de fundamentación axiomática, Brouwer se aproximó más a sus raíces filosóficas para dar un sentido más adecuado, a su entender, al fundamento de la Matemática. El presente trabajo intenta esclarecer la relación que Brouwer estableció con la Filosofía de Kant.

Palabras clave: intuición, tiempo, espacio, a priori, construcción, fundamentación, geometría, aritmética.

ABSTRACT

At the beginning of the twentieth century was a enriching discussion on the Foundation of mathematics, in that discussion took the leading role two mathematics schools with eminently philosophical roots: the Formalism and the Intuitionism. The Intuitionism represented by its founder Brouwer a fairly pronounced point of disagreement in relation to the normal vision of the majority of mathematicians of that time and the present, renouncing any axiomatic Foundation, Brouwer was more close to its philosophical roots to give a more appropriate sense, in his opinion, to the mathematical Foundation from philosophy. Is the task of this work trying to clarify the relationship that Brouwer established with Kant's Philosophy.

Keywords: intuition, time, space, a priori, construction, foundation, geometry, arithmetic.

ÍNDICE

RESUMEN ii

ABSTRACT iii

INTRODUCCIÓN... 1

CAPÍTULO PRIMERO: DE LOS CONOCIMIENTOS Y LOS JUICIOS 3

1.1. De la división del conocimiento y los juicios.. 3

1.2. Conocimiento a priori y a posteriori.. 4

1.3. Juicios analíticos y sintéticos 7

1.4. Juicios sintéticos a priori 10

1.5. Diferenciación entre los conceptos discursivo e intuitivo 13

CAPÍTULO SEGUNDO: DE LA MATEMÁTICA Y SUS CARACTERÍSTICAS EN LA *CRÍTICA DE LA RAZÓN PURA* 15

2.1. Teoría del conocimiento como base de la teoría matemática en Kant 15

2.2. Sensibilidad, sensación y fenómeno... 16

2.3. Intuición.. 18

2.4. Descripción de las dos formas puras: Espacio y tiempo 20

2.4.1. Espacio 21

2.4.2. Tiempo.. 23

2.4.3. Sobre la preeminencia del tiempo 26

2.5. Espacio y tiempo en relación a la construcción matemática 28

2.6. Consideraciones finales 36

CAPÍTULO TERCERO: LAS CARACTERÍSTICAS FILOSÓFICAS DEL INTUICIONISMO EN RELACIÓN CON LA TEORÍA MATEMÁTICA DE KANT..... 41

3.1. Geometría, aritmética y otros tópicos.. 41

3.2. Geometría 45

3.2.1. Defensa del a priori en la teoría geométrica de Kant 48

3.3. Aritmética 52

3.3.1. Tiempo como fundamento de la construcción matemática 52

3.3.2 .Números naturales como fundamentación de la aritmética....................................... 57

3.3.3. Construcción en contraposición al lenguaje 65

3.4. Consecuencias 71

CONCLUSIONES... 75

BIBLIOGRAFÍA... 79

INTRODUCCIÓN

La obra capital de Immanuel Kant: *Crítica de la razón pura* (en adelante CRP), trata sobre la determinación de los límites del conocimiento humano, esto desde la formulación principal que guía el camino a recorrer de la mencionada obra, y que se presenta en forma de la siguiente pregunta "¿qué puedo conocer?" (*Was kann ich wissen?)* Esta pregunta se ocupa de uno de los principales problemas filosóficos, el del conocimiento, y junto con las preguntas ¿qué puedo hacer? (*Was soll ich tun?)* y ¿qué me es permitido esperar? (*Was darf ich hoffen?)* representan el gran espectro de la Filosofía kantiana. Estas tres preguntas manifiestan, finalmente, el interés de la razón, sea esta especulativa o práctica. Dentro del posible conocimiento que ocupa al ser humano, es de especial interés para el presente trabajo el conocimiento matemático. Kant, en su obra referida, se encarga de desenmascarar el carácter perteneciente a la Matemática, es decir, la Matemática es vista por Kant, así como también por corrientes de pensamiento posteriores y deudoras del pensamiento kantiano, como poseedora de un carácter sintético a priori (*synthetische a priori).* Este desenmascaramiento, y a la vez tesis sobre la naturaleza y fundamento de la Matemática, se plantea por la cuestión: ¿Cómo sería posible la intuición pura y por ende también los juicios sintéticos a priori?

Esta postura ha tenido muchos detractores así como seguidores, que han aceptado o rechazado, total o parcialmente, las tesis nacidas de la CRP (*Kritik der reinen Vernunft*). Estas divergencias se expusieron a lo largo de la primera mitad del siglo XX, teniendo su culmen alrededor de los años 30. En el presente trabajo se propondrá un acercamiento por medio de la teoría matemática de Immanuel Kant a la obra filosófica del matemático holandés Luitzen E. J. Brouwer. En el primer capítulo se expondrán los tipos de conocimiento y los juicios que hacen posible el conocimiento, sobre todo el matemático; en el segundo capítulo se expondrá, en su mayor parte, lo correspondiente a la estética transcendental, haciendo hincapié en la aclaración de conceptos clave para el presente trabajo, a saber, intuición, espacio y tiempo. Al final de dicho capítulo se ahondará en los temas más relevantes para el presente trabajo que se encuentran en la lógica transcendental.

En el tercer capítulo, se presentará la Filosofía intuicionista como fundamento de la teoría kantiana de la Matemática, que incluye a la geometría y la aritmética. En resumen, primero se expondrá la teoría matemática en Kant luego en Brouwer y posteriormente como conclusión se hará hincapié en el acercamiento o distanciamiento teórico entre ambos pensamientos.

Algunos lectores de Kant podrían ver en su obra capital un intento de justificación de la Física, la mayoría de estos lectores son científicos o filósofos de la ciencia, otros intentarían ver en su obra una justificación o una prueba de la cientificidad de la metafísica, la mayoría de estos lectores son filósofos que se han ocupado de la ética o de la misma metafísica, en cambio la presente disertación se ocupará exclusivamente de la fundamentación de la Matemática desde la CRP, esquivando, en la medida de lo posible, cualquier polémica sobre la finalidad de la mencionada obra. Esta aclaración es pertinente, dado que de esta perspectiva (tomar a la CRP como una obra enmarcada dentro de la teoría del conocimiento humano, dentro del cual se presenta inevitablemente el conocimiento matemático) fue asumida por importantes figuras de la fundamentación de la Matemática : Brouwer, Hilbert, Frege, etc.

Como ya se dijo, tras los tres capítulos del presente texto se expondrán los resultados obtenidos, en las conclusiones, como respuestas a las preguntas que incumben al trabajo: ¿la influencia kantiana en el intuicionismo matemático consiste en la utilización de categorías kantianas? De ser afirmativa la respuesta, ¿cuáles son estas categorías? Estos resultados implicarán la relación entre la teoría matemática de Kant y el Intuicionismo. En el transcurso de la disertación se aclararán conceptos clave de intuición, espacio y tiempo, que justamente son de gran importancia para encontrar la relación entre Kant y la postura moderna sobre la fundamentación de la Matemática que interesa a este trabajo: el intuicionismo de Brouwer.

CAPÍTULO PRIMERO: DE LOS CONOCIMIENTOS Y LOS JUICIOS

1.1. De la división del conocimiento y los juicios

El cometido principal que Kant plantea en la CRP es el descubrimiento de la naturaleza de los juicios sintéticos a priori y la delimitación de su función. Se puede afirmar incluso que el proyecto de la Filosofía crítica, (y por ende en esto consiste el método crítico o transcendental) básicamente, es el concienzudo estudio de tales juicios. El método transcendental es el estudio de las condiciones de posibilidad de cualquier conocimiento, es decir, de las condiciones (intuiciones y conceptos) puras que posibilitan un conocimiento objetivo. Es así que el saber metafísico, después de Kant, tendrá como objeto el estudio de los juicios sintéticos a priori, guiado por el método crítico o transcendental. Por esto se puede decir que la finalidad de dicha obra podría entenderse y abarcarse de mejor manera si se parte de la necesaria pregunta que engloba toda la CRP (y que a su vez parte de la pregunta: ¿qué puedo saber?), que el autor planteó de la siguiente manera: "Die eigentliche Aufgabe der reinen Vernunft ist nun in der Frage enthalten: Wie sind sinthetische Urteile a priori möglich? (Kant, 2010, pág. 68)[1]

Para poder alcanzar este cometido Kant tuvo que explicar el tipo de sabiduría específica que posee la metafísica, así como también el carácter de sabiduría de la Matemática y de la ciencia natural pura. El presente trabajo se interesa por el carácter de la sabiduría Matemática. Para esto se parte desde una división indispensable, entre conocimiento (*Erkenntnis*) y juicios (*Urteile*): La primera división se refiere a la posibilidad de conocimiento a priori o a posteriori; mientras que la segunda división hace referencia a los juicios que son o bien sintéticos o bien analíticos. Posteriormente veremos que el entrecruzamiento de tal conocimiento con tales juicios nos proporcionará una tabla de juicios, en donde podremos, en un primer momento, acercarnos a la concepción de juicios sintéticos a priori (*synthetische Urteile a priori*). En este tipo de juicios también se hará

[1] "La tarea propia de la razón pura está ahora contenida en la pregunta: ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos a priori?". Traducción personal.

una diferenciación necesaria entre juicios discursivos y juicios intuitivos. Todo esto en la búsqueda de los juicios propios de la Matemática, búsqueda que define el quehacer y en sentido de esta disertación, para luego poder relacionar estos resultados con el Intuicionismo (propiamente de Brouwer, su fundador).

1.2. Conocimiento a priori y a posteriori

Kant reconoce la división del conocimiento en puro y empírico, es decir, entre un conocimiento a priori, el cual es un conocimiento que está antes de toda experiencia, es independiente de la misma y basado en el mero intelecto, y un conocimiento a posteriori, el cual se fundamenta en la experiencia y por medio de ella es posible. Como se entendió históricamente, el conocimiento que tiene su origen en la experiencia, porque se fundamenta en las impresiones de los sentidos, se llama a posteriori. Este conocimiento genera cierto tipo de juicios que son dependientes de otros juicios que a su vez también describen impresiones sensoriales y experiencias. Las experiencias, o los juicios que se basan en la experiencia, pueden ser particulares o generales (por ejemplo: "Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas aplicadas sobre ellos." Primera Ley de Newton), generales porque se basan en observaciones particulares que fueron experimentadas y luego generalizadas.

Solamente las observaciones sensoriales pueden dar seguridad al enunciador de hechos de carga empírica, para por medio de estas afirmar que conoce. Si se afirmasen cuestiones relacionadas a lo empírico, que no se puede corroborar por medio de una base de la experiencia sensible, sería al final solamente discordante. Saber que los cuervos son negros, que Napoleón nació antes que María Antonieta, o que las células madre poseen capacidad mitótica, es remitirse a la experiencia. De esta manera la persona que enuncia este tipo de proposiciones debe poseer, no solamente la capacidad de comprender (comprensión probablemente a priori) lo que estas proposiciones significan, o lo que quieren decir, sino también poseer evidencia o pruebas que provengan de la misma experiencia sensible (a posteriori); lo que sus cinco sentidos a lo largo de su vida le han proporcionado. Kant reconoce que el principio temporal de todo conocimiento está en la experiencia: "Daβ alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anfange, daran ist gar kein

Zweifel" (Kant, 2010, pág. 49)[2], sin objetos (*Gegenstände*) que afecten nuestros sentidos y a su vez que provoquen representaciones (*Vorstellung*) no sería posible el conocimiento. Pero este principio temporal no significa un origen objetivo y único del conocimiento (*Erkenntnis*).

El mismo conocimiento solamente empírico es responsable de muchas generalizaciones imperdonables. Para ilustrar de mejor manera esto en el siguiente ejemplo, se presentará el papel que muchas veces desempeña el pensamiento inductivo en las ciencias, en general este pensamiento o bien es obvio o bien es muy discutible y rechazable. El científico, por ejemplo, acostumbra a efectuar: "…transiciones no deductivas a partir de premisas de la forma <<todos (cierta porción de) los Ps *observados* son Qs>> para llegar a conclusiones de tipo <<todos (cierta porción de) los Ps son Qs>>." (Körner, 1976, pág. 124) El científico para efectuar estas aseveraciones no deductivas se apoya en teorías estadísticas que a su vez se apoyan en algún tipo de noción de probabilidad. Así llega, muchas veces, a teorías. Pero aquí se presentan muchas desconfianzas, pues en su teoría puede incluir inducciones ingenuas. En la época de Kant ya se conocían este tipo de críticas a las generalizaciones, sobre todo llevadas a cabo por Hume. Este tipo de inducciones son las que parten desde constataciones retrospectivas que se efectúan sobre fenómenos naturales, hasta alcanzar generalizaciones sobre su comportamiento futuro. Hume afirma que este tipo de generalizaciones no son posibles. Por esto Kant recurre a la suposición de que nuestros sentidos, nuestra experiencia, se relacionan con algo más para de esta manera adquirir conocimientos. Si bien estos comienzan con la experiencia:

> …so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung. Denn es könnte wohl sein, daβ selbst unsere Erfahrungserkennis ein Zusammengesetztes aus dem sei, was wir durch Eindrücke empfangen, und dem, was unser eigenes Erkenntnisvermögen (durch sinnliche Eindrücke bloβ veranlaβt,) aus sich selbst hergibt. (Kant, 2010, pág. 50)[3]

---

[2] "Que todo nuestro conocimiento empieza con la experiencia no hay duda" Traducción personal.

[3] "…todos sin embargo, no se originan de la experiencia. Pues bien podría ser que nuestro conocimiento empírico fuera una composición de lo que recibimos por nuestras impresiones y de lo que damos por nuestra propia capacidad de conocer (simplemente motivada por la impresión sensible)." Traducción personal.

Con esto Kant tiende un puente entre el empirismo y el racionalismo. Nuestro conocimiento, si bien empieza con la experiencia (*Erfahrung*) no se ve reducida meramente a esta, sino más bien se requiere de un momento donde se realiza nuestra capacidad de conocer (*Erkenntnisvermögen*) (vinculada con el racionalismo, así también reivindica su valía, que en un primer momento parecía haber perdido en la adquisición del conocimiento). Entonces el conocimiento que es independiente de todas las impresiones de los sentidos, y cuyo fundamento es autonómico de toda experiencia, se llama a priori. Este conocimiento a priori está emparentado con un tipo de razonamiento bastante conocido, a saber, la deducción, desde el cual se puede determinar a priori la validez de un determinado enunciado. Más precisamente:

> Deduction is reasoning in which we can know a priori that if not logical mistake has been made and it the premises are true, then the conclusion will have to be true also. An example is the reasoning: <<Every even number is divisible by two; no primer number is divisible by two; therefore, no prime number is even>>. (Barker, 1964, pág. 5)[4]

Dado el último ejemplo, se puede saber solamente por su forma lógica si el argumento es válido o no. El argumento es válido pues obedece a la siguiente forma lógica: $\forall x(Px \rightarrow Qx)$; $\forall x(Rx \rightarrow \sim Qx)$; $\therefore \forall x(Rx \rightarrow \sim Px)$. Este tipo de argumentos pertenecen al dominio de la lógica. El conocimiento que ofrece es a priori, pues se sabe que si ambas premisas son verdaderas la conclusión obligatoriamente también lo es. Kant también aclara que el conocimiento a priori tiene dos características esenciales: la de necesidad (*Notwendigkeit*) y la de universalidad estricta (*strenge Allgemenheit*), estas dos características nunca podrán ser derivadas del conocimiento a posteriori: “Notwendigkeit und strenge Allgemeinheit sind also sichere Kennzeichen einer Erkenntnis a priori, und gehören auch unzertrennlich zu einander.” (Kant, 2010, pág. 52)[5]. Un ejemplo de conocimiento a priori sería: “Una esfera es redonda”, puesto que, para conocer si esto es verdadero, no necesito de la experiencia y solamente me basta saber que el concepto

[4] “Deducción es el razonamiento en el cual conocemos a priori que si ningún error lógico se ha hecho y si las premisas son verdaderas, la conclusión ha de ser también verdadera. Un ejemplo es el razonamiento: <<Todo número par es divisible por dos; ningún número primo es divisible por dos; luego, ningún número primo es par >>.” Traducción personal.

[5] “La necesidad y la estricta universalidad son los caracteres evidentes de un conocimiento a priori, y están indisolublemente unidos.” Traducción personal.

"esfera" contiene necesariamente el adjetivo "redondo", además de ser universalmente válido. La experiencia nunca podría tener una universalidad estricta, pues todo lo empírico es siempre accidental. Es más, los principios puros a priori en nuestro conocimiento originan la posibilidad de la experiencia, como primeros principios. Esto se puede reconocer por el siguiente párrafo:

> Erfahrung gibt niemals ihren Urteilen wahre oder strenge, sondern nur angenommene und comparative Allgemeinheit (durch Induktion), so daβ es eigentlich heiβen muβ: so viel wir bisher wahrgenommen haben, findet von dieser oder jener Regel keine Ausnahme. Wird also ein Urteil in strenger Allgemeinheit gedacht, d.i. so, daβ gar keine Ausnahme als möglich verstattet wird, so ist nicht von der Erfahrung abgeleitet, sonder schlechterdings a priori gültig. (B3 – B4) (Reclam 52) (Kant, 2010, pág. 52)[6]

Claros ejemplos de este conocimiento a priori estarían en la Matemática, pero no solo en ella, también se puede encontrar ejemplos en el uso común del entendimiento: "Todo cambio exige un causa", aquí el concepto de causa está necesariamente unido al concepto de efecto (cambio), además de la estricta generalidad de la regla. El interés de Kant se centra en el conocimiento puro a priori, sin relación alguna con lo empírico.

1.3. Juicios analíticos y sintéticos

A la diferenciación entre conocimiento a priori y a posteriori Kant añade una nueva distinción, esta vez que concierne al contenido de un juicio, y a la relación entre un sujeto y un predicado, lo que según el mismo Kant solamente es posible de dos formas. En la primera posibilidad el predicado ya está contenido en el sujeto y pertenece al sujeto, a esta posibilidad se la llama analítica. En la segunda posibilidad el predicado está fuera del sujeto y no está contenido en el mismo, a esta posibilidad se la llama sintética. Por eso los

[6] "La experiencia no da nunca sus juicios con universalidad verdadera y estricta, sino con una generalidad supuesta y comparativa (por la inducción), así que finalmente eso tiene que significar que de cuanto hemos observado hasta ahora, no hemos encontrado una excepción a determinadas leyes. Un juicio, pues, pensado con estricta universalidad, es decir, que no admite excepción alguna, no se deriva de la experiencia, sino que tiene valor absoluto a priori." Traducción personal.

juicios analíticos son llamados también juicios explicativos (*erläuternde*) y los juicios sintéticos son llamados juicios extensivos (*erweiternde*).

> In allem Urteilen, worin das Verhältnis eines Subjekts zum Prädikat gedacht wird, (wenn ich nur die bejahende erwäge, den auf die verneinende ist nachher die Anwendung leicht,) ist dieses Verhältnis auf zweierlei Art möglich. Entweder das Prädikat B gehört zum Subjekt A als etwas, was in diesem Begriffe A (versteckter Weise) enthalten ist; oder B liegt ganz auβer dem Begriff A, ob es zwar mit demselben in Verknüpfung steht. Im erten Fall nenne ich das Urteil analytisch, in dem andern synthetisch. (Kant, 2010, pág. 58)[7]

Para Kant conocer algo es ya hacer un juicio. Este juicio pudo haber sido formulado de una forma consciente o de una forma inconsciente, para posteriormente ser expresado en palabras y llegar a ser una tesis, o no ser expresado en palabras. Este acto mental, la realización de juicios, es un acto de relacionar conceptos entre sí y también la conservación de los mismos, unidos, en la conciencia. Así por ejemplo, cualquier persona que sabe que, "Todo cuerpo es extenso", ha podido relacionar en su conciencia los conceptos de "cuerpo" y de "extenso". Ese juicio es un juicio analítico. De la misma manera, cualquier persona que sepa que, "Ningún mamífero vuela"[8] ha relacionado en su mente el concepto de "mamífero" y el de "volar". Este último juicio es un juicio sintético.

Los juicios analíticos son aquellos juicios donde un concepto solamente es analizado, esto es donde un concepto es dividido y su contenido explicado. Aquí no se experimenta nada nuevo, solamente el contenido que yace en cada concepto. En el juicio analítico anterior: "Alle Körper sind ausgedehnt" (Kant, 2010, pág. 59)[9], es analizado solamente el concepto "cuerpo" y a su vez dividido para poder tener como resultado que este concepto contiene el concepto "extenso". El sujeto "cuerpo" contiene finalmente el predicado explicativo

---

[7] "En todos los juicios, donde se piensa la relación de un sujeto a un predicado (cuando analizo solamente los juicios afirmativos, pues después para los negativos es más fácil la aplicación), esta relación es posible de dos maneras. O el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está contenido en este sujeto A (de forma oculta); o B está completamente fuera del concepto A, si bien esta enlazado con él. En el primer caso llamo al juicio analítico, en el otro sintético." Traducción personal.

[8] Aunque esta afirmación más bien resulte falsa o al menos confusa. Para la mayoría de biólogos, y con cierta razón, el único mamífero que vuela es el murciélago. Pero aquí se presenta la discusión, en realidad vuela o solo planea. La primera acción resulta ser un vuelo activo, la segunda un vuelo pasivo, en el último grupo también entrarían la ardilla y el ratón voladores.

[9] "Todos los cuerpos son extensos" Traducción personal.

“extenso”, dado que un cuerpo siempre es pensado como algo extenso. Un juicio resulta analítico, si para su determinación no se necesita más que la simple reflexión sobre los conceptos y la forma en que estos han sido combinados, para luego poder determinar su validez. De esta manera se puede afirmar que “Todo cuerpo es extenso” es un juicio analítico, porque en el mismo se puede notar no solo su independencia de la experiencia, por la simple división del sujeto “cuerpo” en el concepto “extenso”, que en sí mismo está contenido en el sujeto, sino también porque para determinar su validez o su verdad debe coincidir con la verdad lógica, por ejemplo, con el principio de no contradicción:

> Daβ ein Körper ausgedehnt sei, ist ein Satz, der a priori feststeht, und kein Erfahrungsurteil. Denn, ehe ich zur Erfahrung gehe, habe ich alle Bedingungen zu meinem Urteile schon in dem Begriffe, aus welchem ich das Prädikat nach dem Satze des Widerspruchs nur herausziehen, und dadurch zugleich der Notwendigkeit des Urteils bewuβt werden kann, welche mich Erfahrung nicht einmal lehren würde. (Kant, 2010, pág. 60)[10]

El principio de no contradicción es visto por Kant como el principio rector de toda la lógica formal, la negación de dichos juicios contiene simplemente una contradicción. Los juicios analíticos son todos los juicios que meramente aclaran el sentido de los términos. Este tipo de juicios no plantean problemas interesantes para la Filosofía. Su conocimiento es alcanzado por la mente, cuando se comprende la forma del propio lenguaje. Cuando se llega a saber que los solteros son no-casados, el individuo que posee este conocimiento solamente refleja la naturaleza de los propios conceptos en cuestión.

Los juicios sintéticos, en cambio, amplían el conocimiento al añadir algo nuevo a un concepto, lo que no es posible solamente por la división o análisis de un concepto. Un ejemplo de este tipo de conceptos sería: “Alle Körper sind schwer” (Kant, 2010, pág. 59)[11]. Aquí se puede encontrar una ampliación del sujeto “cuerpo”, dado que el predicado “pesado” no está contenido en todo sujeto. No se puede deducir a partir de la mera división

---

[10] “Que un cuerpo sea extenso es un principio a priori y no un juicio de la experiencia, pues antes de que me dirija a la experiencia, tengo todas las condiciones para mi juicio en mi concepto, desde el cual saco el predicado según el principio de contradicción -del sujeto-, y por eso igualmente poder llegar a ser consciente de la necesidad del juicio, la cual nunca me podría enseñar la experiencia.” Traducción personal.

[11] “Todos los cuerpos son pesados”. Traducción personal.

y análisis del concepto "cuerpo", el predicado "pesado", por el contrario, el predicado llega a ser añadido como un concepto nuevo y extensivo.

Solamente mediante la experiencia se puede entrelazar la posibilidad de síntesis del predicado, en este caso "pesado", con el sujeto, en este caso "cuerpo", estos conceptos no están en íntima relación, ni contenido el predicado en el sujeto, sin embargo, se establece entre ellos una relación de pertenencia, aunque de una manera contingente, al ser estos conceptos partes de un todo de la misma experiencia, la cual resulta ser un "synthetische Verbindung der Anschauungen" (Kant, 2010, pág. 61)[12]. Este enlace es lo que en el juicio sintético se necesita, además del concepto de sujeto, algo que Kant llamó X, y sobre lo cual puede fundamentarse el entendimiento, para posteriormente poder conocer y asimilar un predicado que no se encuentra incluido en aquel sujeto y que le puede pertenecer. Esto es explicado por Kant de la siguiente manera: "Bei empirischen oder Erfahrungsurteilen hat es hiermit gar keine Schwierigkeit. Denn dieses X ist die vollständige Erfahrung von dem Gegenstande, den ich durch einen Begriff A denke, welcher nur einen Teil dieser Erfahrung ausmacht." (Kant, 2010, pág. 60)[13]. Por eso en la experiencia, a la cual llamó Kant X, que esta fuera del concepto A, se posibilita la síntesis del predicado B con el sujeto A, es decir del concepto de "pesado", con el concepto de "cuerpo".

1.4. Juicios sintéticos a priori

Dada la diferenciación entre conocimiento y juicios, resulta una tabla con cuatro diferentes posibilidades de juicios, a saber: 1) Juicios analíticos a posteriori; 2) Juicios sintéticos a posteriori; 3) Juicios analíticos a priori; 4) Juicios sintéticos a priori. Si los juicios de la experiencia, los cuales son juicios a posteriori, son siempre sintéticos, se deduce que la opción (1) Juicios analíticos a posteriori no tendría ningún sentido, porque un juicio analítico no necesita de la experiencia. Todo lo que uno tiene que saber sobre un juicio analítico está contenido en el respectivo concepto y solamente se presenta la necesidad de dividirlo y analizarlo. Por eso para Kant este tipo de juicios no existen. La segunda opción, (2) Juicios sintéticos a posteriori, se da por lo que ya ha sido explicado: cuando se ha

[12] "Enlace sintético de las intuiciones" Traducción personal.
[13] "Los juicios empíricos o de la experiencia no poseen aquí ninguna dificultad, pues dicha X es la experiencia total del objeto, que pienso por un concepto A que solo constituye una parte de esa experiencia". Traducción personal.

añadido y asociado a un concepto un nuevo predicado, el cual ha sido adquirido desde la experiencia. Los juicios a priori, en cambio, pueden ser analíticos como también sintéticos. La opción (3) Juicios analíticos a priori muestra la indispensable, y ya explicada, división que se debe dar del concepto y en donde la experiencia no es necesaria, constituyen el acto más elevado de reflexión analítica, porque el concepto ya contiene lo que sobre él analíticamente se puede enunciar.

La división más interesante que resta es la de los Juicios sintéticos a priori (4). Estos juicios no dividen un concepto, al sujeto, sino por el contrario añaden uno nuevo desde el predicado, y a la vez lo amplían. Lo complejo de este tipo de juicios es que son independientes de la experiencia, pues son a priori, por lo que se tiene que añadir un predicado a un sujeto solamente con la ayuda de la razón pura. Es decir que este tipo de juicios no dependen de la percepción sensorial y son necesarios porque si cualquier juicio acerca del mundo físico ha de ser cierto, por ejemplo juicios de la Física, necesariamente este tipo de juicios han de ser ciertos. En otros términos, se puede decir que "synthetic a priori propositions are necessary conditions of the possibility of objective experience" (Körner, 1986, pág. 26)[14]. Este tipo de juicios amplían el conocimiento a la vez que poseen necesidad y universalidad estricta. Este tipo de juicios está asentado en relación directa a la Matemática y su posibilidad.

Kant se pregunta por la existencia de juicios sintéticos a priori, los cuales tendrían valor general y universal como los juicios analíticos. Su respuesta es un rotundo sí. Los ejemplos con los que apoya su respuesta son traídos de la Matemática (aritmética y geometría), así como también de la Física. En la Matemática, el juicio 7 + 5 = 12 contiene un valor sintético y a priori, porque el resultado es universal y necesario; pero el juicio no posee ningún valor analítico, porque el número 12 no contiene en sí incondicionalmente el número 5 y el número 7 como partes constitutivas; por el contrario perfectamente el número 12 podría contener como sus partes constitutivas los números 8 y 4. De ahí que este juicio, al no poder ser analítico, posee una naturaleza sintética. Este juicio no se funda en ninguna observación del mundo. Para convencernos de su fundamentación no tenemos que acudir a experiencia alguna, la experiencia se apoya en generalizaciones bastante

[14] "las proposiciones sintéticas a priori son condiciones necesarias de la posibilidad de la experiencia objetiva". Traducción personal.

diferentes como por ejemplo: “Los cisnes son blancos”. Esta generalización no es necesariamente verdadera y para su afirmación se recure solamente a la experiencia, por el contrario, Kant nos dice: “Zuvörderst muss bemerkt werden, daβ eigentlich mathematische Sätze jederzeit Urteile a priori und nicht empirisch sind, weil sie Notwendigkeit bei sich führen, welche aus Erfahrung nicht abgenommen werden kann.” (Kant, 2010, pág. 64)[15]

En la Geometría el juicio “la línea recta es la línea más corta entre dos puntos”, tiene también valor sintético y a priori. La palabra “recta” no contiene analíticamente el concepto “punto” como un límite, o el concepto “corta”, por eso este juicio proveniente desde la geometría es clasificado de esa manera.

> Eben so wenig ist irgend ein Grundsatz der reinen Geometrie analytisch. Daβ die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste sei, ist ein synthetischer Satz. Denn mein Begriff vom Geraden enthält nichts von Gröβe, sondern nur eine Qualität. Der Begriff des kürzesten kommt also gänzlich hinzu, und kann durch keine Zergliderung aus dem Begriffe der geraden Linie gezogen werden, vermittelst deren allein die Synthesis möglich ist. (Kant, 2010, pág. 66)[16]

En la última línea del anterior párrafo de Kant, éste acude al concepto de intuición, como sostén para la fundamentación de la geometría, en este caso, y de la Matemática posteriormente. Este concepto, intuición, se tratará más adelante con mayor holgura y detenimiento. Igualmente vale para la Física para los conceptos, o la relación, de causa y efecto (o de acción y reacción), el cual no se puede fundar en la experiencia por poseer universalidad y generalidad estricta, pero el concepto de “causa” tampoco contiene el concepto de “efecto”, por lo que, y por lo visto anteriormente, este concepto de la Física también tiene un valor sintético y a priori. Además de esto y a pesar de lo diferentes ejemplos que se puedan dar a favor del carácter sintético y a priori de la Matemática (aritmética y geometría), así como también de la Física, para Kant la cientificidad (de valor

[15] “Es de observar que propiamente los enunciados matemáticos son juicios a priori y no empíricos, porque los mismos llevan necesidad, la cual no puede ser tomada de la experiencia”. Traducción personal.

[16] “No son tampoco más analíticos los principios de la geometría pura. Es una proposición sintética que la línea recta entre dos puntos es la más corta, porque mi concepto de recto no contiene nada que sea cantidad, sino sólo cualidad. El concepto de más corta es completamente añadido y no puede provenir en modo alguno de la descomposición del concepto de línea recta. Es preciso aquí pues acudir a la intuición, único modo para que la síntesis sea posible.” Traducción personal.

sintético y a priori) de estas disciplinas no necesita ser comprobado, solamente se necesita preguntar cómo pueden ser posibles, porque al existir como reales, finalmente demuestran ya que lo son. “Von diesen Wissenschaften, da sie wirklich gegeben sind, laβt sich nun wohl geziemend fragen: wie sie möglich sind; denn daβ sie möglich sein müssen, wird durch ihre Wirklichkeit bewiesen”(Kant, 2010, pág. 69).[17]

1.5. Diferenciación entre los conceptos discursivo e intuitivo

Los juicios sintéticos a priori son divididos por Kant en dos conceptos: discursivo (*diskursiv*) e intuitivo (*intuitiv*). Por discursivo entiende Kant el conocimiento por conceptos, y se relaciona con la función ordenadora de las nociones generales. Un ejemplo para el juicio sintético a priori discursivo sería: “Kausalprinzip d.h. der Satz, der besagt, dass jede Tatsache eine Ursache hat.” (Bedürftig, 2012, pág. 57)[18]. Por intuitivo entiende Kant en cambio, la construcción de conceptos, y se relaciona con la estructura de la percepción. “All propositions of pure mathematics belong to the intuitive class of synthetic a priori propositions.” (Körner, 1986, pág. 27)[19]. De este modo, y en palabras del propio Kant, se puede entender de mejor manera lo que él pretende con esta última división, así como también se puede observar en la siguiente cita el grado de conocimiento que se genera desde la Matemática, a diferencia de la Filosofía, y el cual, el matemático, es uno de los más sobresalientes en la teoría del conocimiento, así se tiene:

> Wir finden aber, daβ alle mathematische Erkenntnis dieses Eigentümliche habe, daβ sie ihre Begriff vorher in der Anschauung und zwar a priori, mithin einer solchen, die nicht empirisch, sondern reine Anschauung ist, darstellen müsse, ohne welches Mittel sie nicht einen einzigen Schritt tun kann; daher ihre Urteile jederzeit intuitiv sind, anstatt daβ Philosophie sich mit diskursiven Urteilen aus bloβen Begriffen

[17] “De estas ciencias, dado que están realmente dadas, solamente se puede preguntar convenientemente: cómo son posibles; pues que ellas tienen que ser posibles, es comprobado por su realidad”. Traducción personal.

[18] “el principio de causalidad, es decir, el principio que dice que todo hecho tiene una causa.” Traducción personal.

[19] “Todas las proposiciones provenientes de la matemática pura pertenecen a la clase intuitiva de las proposiciones sintéticas a priori.” Traducción personal.

begnügen und ihre apodiktischen Lehren wohl durch Anschauung erläutern, niemals aber daher ableiten kann. (Kant, 1976, pág. 32)[20]

Entonces el conocimiento matemático es un conocimiento formal, es decir que es independiente de los fenómenos y de su materia; en la misma medida es intuitivo, esto es que no se puede reducir a relaciones lógicas, a discurso. Este conocimiento se funda en la necesidad del espacio y del tiempo. Es así que la geometría no puede fundar sus verdades en el simple análisis de sus conceptos propios; sus verdades se han de fundar como proposiciones sintéticas a priori (y también intuitivas). En este punto es pertinente citar algunos ejemplos del texto kantiano, sobre todo ejemplos geométricos de juicios sintéticos a priori:

> "die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste sei" (Kant, 2010, pág. 66)[21]
> "in einem Triangel zwei Seiten zusammen gröβer seien, als die dritte" (Kant, 2010, pág. 87)[22]
> "der Raum hat nur drei Abmessungen" (Kant, 2010, pág. 88)[23]
> "zwei gerade Linien schlieβen keinen Raum" (Kant, 2010, pág. 240)[24]
> "zwischen zwei Punkten kann nur eine gerade Linie sein" (Kant, 2010, pág. 326)[25]
> "drei Punkte jederzeit in einer Ebene liegen" (Kant, 2010, pág. 749)[26]

Lo que puede quedar a la deriva es el concepto de intuición, y más específicamente, intuición pura, haciéndose necesario distinguirla de una intuición empírica. Esta diferenciación se la hará en el siguiente capítulo.

[20] "Pero encontramos que todos los conocimientos matemáticos tienen esta característica: que deben presentar sus conceptos de antemano en la intuición, y por cierto a priori; por lo tanto, en una intuición tal, que no es empírica, sino pura, sin cuyo medio no puede dar ni un solo paso; por esto sus juicios son siempre intuitivos, en cambio que la Filosofía se debe conformar con juicios discursivos de meros conceptos y aclarar bien su enseñanza apodíctica por medio de la intuición, pero nunca derivarlos de ella." Traducción personal.
[21] "La línea recta entre dos puntos es la más corta." Traducción personal.
[22] "En un triángulo, dos lados juntos son más grandes que el tercero." Traducción personal.
[23] "El espacio solo tiene tres dimensiones." Traducción personal.
[24] "Dos líneas rectas no encierran ningún espacio." Traducción personal.
[25] "Entre dos puntos solamente puede estar una línea recta." Traducción personal.
[26] "Tres puntos están (yacen) siempre en un plano." Traducción personal.

CAPÍTULO SEGUNDO: DE LA MATEMÁTICA Y SUS CARACTERÍSTICAS EN LA CRÍTICA DE LA RAZÓN PURA

2.1. La teoría del conocimiento como base de la teoría matemática en Kant

Para Kant la Matemática se caracteriza de manera bastante precisa, además de ser un conocimiento amplio, se postula como el conocimiento del porvenir, de carácter absolutamente necesario en el ámbito científico y además de ser parte constituyente de la misma naturaleza humana, esta segunda característica más acorde con el presente trabajo, así por ejemplo, se puede observar en la siguiente cita tomada de una de las obras más didácticas de este autor:

> Hier ist nun eine groβe und bewährte Erkenntnis, die schon jetzt von bewunderungswürdigem Umfange ist und unbegrenzte Ausbreitung auf die Zukunft verspricht, die durch und durch apodiktische Gewiβheit, d.i. absolute Nowendigkeit bei sich führt, also auf keine Erfahrungsgründen beruht, mithin ein reines Produkt der Vernuft, überdem aber durch und durch syntetisch ist. (Kant, 1976, pág. 32)[27]

En el texto kantiano se llevará adelante la tesis de que la Matemática es aquella ciencia que se encuentra en posesión de juicios sintéticos a priori (*synthetische Urteile a priori*), esto conlleva a que este tipo de juicios sean necesarios (*notwendig*) y universalmente válidos (*allgemeingültig*). Que los juicios matemáticos sean a priori, significa que no pueden ser empíricos, como ya se lo explicó más detenidamente en el capítulo anterior, pues la necesidad (*Notwendigkeit*) se toma de un conocimiento a priori, y no es posible hacer esto desde la experiencia (*Erfahrung*). Esta es la primera gran característica de la Matemática,

[27] "Aquí está, pues, un conocimiento grande y demostrado, que es ya de maravillosa extensión y promete, para el futuro, una ampliación ilimitada que trae consigo una certeza completamente apodíctica, es decir, una necesidad absoluta que no se refiere a base alguna de experiencia, que es por consiguiente un producto puro de la razón, a más de lo cual es totalmente sintético." Traducción personal.

su necesidad (*Notwendigkeit*) y la universalidad (*Allgemeingültigkeit*) es su segunda, lo que termina por definir su carácter sintético a priori.

De los últimos párrafos del capítulo anterior surge el problema de lo que Kant puede llegar a entender por intuición pura, además de cómo se acede a esta intuición, esto formulado en una pregunta, con cuya respuesta se podrá acercar al centro mismo de la Filosofía kantiana: ¿qué es intuición pura?, que puede mediarse por la interrogante: "Denn nunmehro lautet die Frage: wie es möglich, etwas a priori anzuschauen?" (Kant, 1976, pág. 33)[28]. Esta misma cuestión se la puede presentar también con una pregunta complementaria, la cual ayudará a profundizar en el requisito que se necesita para alcanzar la resolución del problema: "Allein wie kann Anschauung des Gegenstandes vor dem Gegenstandes selbst vorhergehen?" (Kant, 1976, pág. 34)[29].

La respuesta es uno de los asuntos cardinales de la teoría del conocimiento que representa Kant en su obra, y que a su vez marca un antes y un después en la historia de la Filosofía. Las condiciones de posibilidad del conocimiento**,** y del matemático de especial interés en el presente trabajo, yacen en las formas de la intuición pura (*reine Anschauung*), los cuales son: el espacio y el tiempo. Como formas de la intuición pura, el espacio y el tiempo no son objetos exteriores, sino por el contrario formas de la sensibilidad humana, y las cuales están antes de la impresión de los sentidos (*Sinneseindrücken*), además de servir como elementos ordenadores de los mismos. En este punto se profundizará en la explicación de estos conceptos, intuición, espacio y tiempo, y de otros aledaños a ello. Se comenzará por el concepto de intuición y posteriormente se abarcarán los conceptos de espacio y tiempo, en el respectivo orden.

2.2. Sensibilidad, sensación y fenómeno

Kant afirma que todo conocimiento empieza irremediablemente por la experiencia, es decir por los sentidos y su conexión necesaria con la realidad, entonces es por eso que, en la aclaración de los conceptos más importantes en la teoría del conocimiento de Kant, se

[28] "Pues ahora se presenta la pregunta: ¿cómo es posible contemplar algo a priori?" Traducción personal.
[29] "Pero, ¿cómo puede la intuición de los objetos preceder a los objetos mismos?" Traducción personal.

empieza por el concepto de sensibilidad, para posteriormente ir elaborando un desarrollo más abstracto hasta llegar a la intuición pura.

"Die Fähigkeit, (Rezeptivität) Vorstellungen durch die Art, wie wir von Gegensänden affiziert werden, zu bekommen, heiβt Sinnlichkeit" (Kant, 2010, pág. 80)[30] Sensibilidad (*Sinnlichkeit*) es la capacidad recibir representaciones (*Vorstellungen*). El armario que estoy viendo efectúa o ejerce influencia sobre mi sentido de la vista, la silla en la cual estoy sentado, así como la mesa sobre la que escribo, ejercen una influencia sobre el sentido del tacto. Por medio de la sensibilidad los objetos nos son dados, y es esta misma la que nos proporciona intuiciones, y a su vez por medio del entendimiento (*Verstand*) que aquellas son pensadas, dando origen, de esta manera, a los conceptos (*von ihm entspringen Begriffen*), esto es posible por medio de las aplicaciones de las doce categorías del entendimiento efectuadas al objeto, que a su vez está afectando, o que sirve de afección, a nuestros sentidos. Todo pensamiento se refiere finalmente, para que un objeto pueda darse, a las intuiciones, por consiguiente a la sensibilidad.

Entonces, esta influencia de los objetos, que actúan sobre la sensibilidad, nos es suministrada por la intuición (*Anschauung*). Yo veo o siento objetos hechos de madera. Pero esta percepción del objeto no significa que se lo comprende, comprender un fenómeno es referirlo a un concepto, y de esto se encarga el entendimiento. El efecto de los objetos sobre nuestra sensibilidad, o sobre nuestra capacidad de representación, en cuanto se efectúa la afección del objeto, es llamada por Kant sensación (*Emfindung*) o también intuición empírica, al ser una intuición que se refiere al objeto tomando como medio la sensación, la cual es una interacción entre el concepto y la intuición.

El objeto indeterminado, teórico, de esta intuición empírica es llamado fenómeno (*Erscheinung*). Los fenómenos forman el objeto de nuestro conocimiento. Los fenómenos son el mundo tal y como lo captamos, independientemente de cómo el mundo es en "sí mismo"[31]. Aquí se distinguen dos facetas del fenómeno: su materia y su forma. La primera

[30] "La capacidad (receptividad) de recibir la representación según la manera como los objetos nos afectan, se llama sensibilidad" Traducción personal.
[31] El sentido que adquiere en la Filosofía kantiana, el término "fenómeno" (el objeto en tanto que aparece y es conocido se lo puede llamar fenómeno), la cosa en mí, se termina de establecer al ponerlo en contraposición con el concepto de "noúmeno", la cosa en sí.

tiene correspondencia con la sensación, y la manera en que el objeto afecta nuestros sentidos. La segunda es lo que hace que lo múltiple del fenómeno pueda ser ordenado en relaciones de espacio y tiempo, o espacio temporales. Obviamente que no puede ser sensación aquello que representa una forma u ordenación de las mismas sensaciones, esto no es dado a posteriori. Esta forma ordenadora tiene que estar aparte de cualquier sensación, esto es en la mente (espíritu), y esto es dado a priori.

2.3. Intuición

En el presente apartado se trata de ampliar la definición que Kant introduce en la "Estética transcendental" del concepto de intuición. Esto es posible mediante la aclaración de algunos conceptos aledaños al de intuición, para posteriormente, al finalizar esta exposición llegar a los conceptos de espacio y tiempo.

La intuición (*Anschauung*) es la capacidad cognoscitiva fundamental, se da entre el objeto que se encuentra en presencia inmediata y el sujeto cognoscente. Es el conocimiento inmediato de un objeto, y para todo pensamiento es un medio. Además de ser la primera relación que con un objeto puede mantenerse, produce la representación que puede darse de un objeto único. Esta representación es inmediata, pero no quiere decir que la representación de todo objeto debe ser siempre necesariamente inmediata. Puedo conocer un objeto sin que la contemplación sea inmediata.

Las intuiciones además son un medio para el pensamiento, al no tener intuición un concepto no posee objeto al cual referirse de forma inmediata, la consecuencia notable es que los conceptos producidos por el pensamiento están vacíos de contenido. Esto dado que el contenido es solamente subministrado por la intuición. En verdad un concepto carente de intuición puede tener un objeto al cual referirse, pero esta referencia carente de intuición obliga a que la referencia, el objeto referido, de este tipo de concepto sea simplemente otro concepto, o a su vez entre en juego una intuición de la imaginación, y nada más que eso. Estos conceptos vacíos también pueden ser entendidos como conceptos negativos, o como simples negaciones, contrapuestos a los conceptos reales, aquellos conceptos solamente dicen lo que una cosa no es, no dicen lo que una cosa es. De esa manera todo concepto que posea un objeto es un ente real, un ente verdadero, según la adecuación desde lo que se dice a lo que hay.

En este sentido la intuición solamente es posible cuando un objeto nos es dado, a esta actividad afectiva, capacidad de recibir afecciones, o capacidad de recibir representaciones en la medida en que nos vemos afectados por los objetos, como ya se indicó, se llama sensibilidad. Es por medio de ella también que los objetos nos son dados, así como también, y esto es lo más importante, ella es el único medio por la cual las intuiciones nos son ofrecidas. Cualquier pensamiento debe referirse de forma directa o de forma indirecta a las intuiciones. En este punto y para una mejor comprensión del asunto en mención se debe distinguir los dos tipos de intuición[32].

En primer lugar**,** la intuición empírica es aquella que encuentra una relación hacia el objeto mediante la sensación. La sensación es el efecto producido por un objeto sobre la facultad representativa (*Vorstellungsfähigkeit*), la cual nos pertenece, al ser sujetos pensantes. En la intuición empírica al objeto que no posee determinación se le llama fenómeno (*Erscheinung*). Entonces se debe distinguir lo que es materia y forma de un fenómeno. La materia de un fenómeno es lo que corresponde a la sensación, la cual solamente puede ser dada a posteriori. La forma de un fenómeno es lo que posibilita que lo que este dentro del fenómeno, correspondiente a la sensación, de modo diverso, pueda ser ordenado por medio de ciertas relaciones. Pero la forma del fenómeno solamente es posible a priori.

Lo que está libre de sensación se llama representación pura, en sentido trascendental. En segundo lugar**:** La intuición pura es también conocida como una forma pura de la sensibilidad, esto dado que esta forma pura (de las intuiciones sensibles) se encuentra a priori en la mente (espíritu diría Kant), en esta misma forma, como ya se dijo, se encuentra toda la diversidad de fenómenos los que se encuentran intuidos bajo cierto tipo de relaciones. Extensión y figura pertenecen a la intuición pura "…die a priori, auch ohne einen wirklichen Gegenstand der Sinne oder Empfindung, als eine bloβe Form der Sinnlichkeit in Gemüte stattfindet." (Kant, 2010, pág. 82)[33], pues es lo que queda de la

[32] En realidad sería mejor entender esta clasificación entre la intuición que es empírica y las formas de la misma, que son las formas de la intuición pura, esto es a priori y libre de carga empírica.
[33] "…la cual a priori, también sin objeto real de los sentidos o sensación, tiene lugar en la mente -animo- como mera forma de la sensibilidad." Traducción personal.

intuición empírica cuando se abstrae de la representación de cualquier cuerpo, lo que el entendimiento puede llegar a pensar, como substancia, divisibilidad y fuerza, así como también lo que pertenece a la sensación, como color, dureza, impenetrabilidad, entonces lo que queda es extensión y figura pertenecientes como ya se dijo, a la intuición pura, a priori como la forma pura de la sensibilidad, sin objeto de los sentidos. Lo que es eliminable no es el espacio, sino por el contrario las cosas en el espacio. Y esta eliminación no es en la experiencia, sino en el pensamiento. De igual manera se aplica al tiempo. El estudio pormenorizado de estas cuestiones se lo hace en la estética trascendental de la CRP.

2.4. Descripción de las dos formas puras: espacio y tiempo

La Estética Transcendental es la ciencia "…von allen Prinzipien der Sinnlichkeit a priori" (Kant, 2010, pág. 82)[34]. Es tarea de la misma encontrar estos principios para exponerlos, luego poder producir juicios sintéticos a priori de la sensibilidad, y por medio de esto poder ampliar nuestro conocimiento independiente de los sentidos. De la Estética Trascendental a la Lógica Transcendental, se conforma la estructura de Kant desde lo más exterior, referido en los sentidos, hasta llegar a las funciones psíquicas o cognitivas, que se dan en la mente, en pos de la afirmación del conocimiento puro.

Aquí se considera de manera aislada la sensibilidad, abstrayendo todo lo que el entendimiento, por medio de sus conceptos, puede poner en ella, logrando de esta manera aislar la intuición empírica. Después se abstrae de la intuición empírica todo lo que pueda pertenecer a la sensación, entonces queda la intuición pura. De esto resulta que se puede saber, después de estas abstracciones, que "daβ es zwei reine Formen sinnlicher Anschauung, als Prinzipien der Erkentnis a priori gebe, nämlich Raum und Zeit" (Kant, 2010, pág. 83)[35]. De esta misma manera y en un mismo sentido Kant afirma en su obra propedéutica a la CRP: "wenn man von den empirischen Anschauung der Körper und ihrer Veränderungen (Bewegung) alles Empirische, nämlich was zur Empindung gehört,

[34] "...de todos los principios de la sensibilidad a priori." Traducción personal.
[35] "hay dos formas puras de la intuición sensible, como principios del conocimiento a priori, a saber: espacio y tiempo" Traducción personal.

wegläβt, so bleiben noch Raum und Zeit übrig, welche also reine Anschauung sind" (Kant, 1976, pág. 35)[36].

En esta parte Kant explica en una doble exposición del par de intuiciones puras, demostrará la percepción del tiempo y el espacio, como principios a priori de la sensibilidad o formas puras. La divide en una exposición metafísica y una exposición transcendental. La exposición metafísica se efectúa cuando se trata de demostrar que tanto el tiempo como el espacio no dependen de la experiencia, por el contario, condicionan a toda experiencia, al ser la forma del conocimiento. La exposición transcendental demuestra que las representaciones del espacio y tiempo son intuiciones puras, y que estas mismas intuiciones son condiciones de posibilidad del conocimiento. Espacio y tiempo son sintéticos a priori cuando se puede deducir conocimiento adicional de ellos, sin recurrir a lo empírico. Este es el proceder de Kant en esta exposición.

2.4.1. Espacio

La exposición metafísica del concepto de espacio es la siguiente:

1) "Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äuβeren Erfahrungen abgezogen worden" (Kant, 2010, pág. 85)[37]. La representación del espacio no puede llegar a ser tomada por medio de la experiencia de las relaciones de los fenómenos externos, por el contrario, la representación del espacio hace posible la experiencia externa. Por ejemplo, para que algunas representaciones lleguen a ser referidas a algo situado en otro lugar del espacio, fuera de mí, y así mismo fuera y al lado unas de otras, es indispensable que el espacio se encuentre como fundamento.

2) "Der Raum ist eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äuβeren Anschauungen zum Grunde liegt" (Kant, 2010, pág. 85)[38]. El espacio llega a ser considerado como la

[36] "Si se suprime de la intuición empírica de los cuerpos y de los cambios (movimiento) todo lo empírico, es decir, todo lo que pertenece a la sensación, sobran aún espacio y tiempo". Traducción personal.
[37] "El espacio no es ningún concepto empírico, que haya llegado a ser sacado de las experiencias externas." Traducción personal.
[38] "El espacio es una representación necesaria, a priori, que yace como fundamento de todas las intuiciones externas." Traducción personal.

condición de posibilidad de los fenómenos, y no simplemente como una determinación dependiente de éstos, entonces, es una representación a priori. Por ejemplo, nunca se puede hacer una representación en la cual no estuviese el espacio, aunque por el contrario, si se pueda hacer una representación en la cual se encuentre el espacio sin objeto.

3) "Der Raum ist kein diskursiver, oder, wie man sagt, allgemeiner Begriff von Verhältnissen der Dinge / überhaupt, sondern eine reine Anschauung" (Kant, 2010, pág. 86)[39]. Solo se puede representar un único espacio; cuando se habla de muchos espacios en realidad se habla de muchos espacios que son partes del único espacio existente. Estas "partes del espacio" solo son concebibles en el espacio único, no son partes que le preceden como si lo formaran, como si estas partes fuesen sus componentes; solamente por medio de él, y en él, pueden llegar a ser pensadas. Lo múltiple de él se origina en las limitaciones del mismo espacio único. El espacio es uno, intuición pura a priori, que sirve como fundamento de todos los conceptos del mismo. Por ejemplo, en geometría, sus principios nunca son deducidos de los conceptos universales de punto, línea, y recta, sino por el contrario de la intuición pura del espacio.

4) "Der Raum wird als eine unendliche gegebene Gröβe vorgestellt" (Kant, 2010, pág. 87)[40]. Todo concepto puede contener una multitud finita de diversas representaciones, un concepto no puede ser pensado cono si éste contuviese una multitud de representaciones infinitas. Sin embargo, de esta manera es pensado el espacio, como si todas sus partes coexistieran en el infinito. Entonces, se puede afirmar que la representación originaria del espacio es intuición a priori y no concepto.

A continuación la exposición transcendental del concepto de espacio:

a) La representación originaria del espacio es intuición, es decir, no es concepto, pues las proposiciones que vayan más allá del concepto, no pueden provenir de aquel. Se obtendría de esta manera un conocimiento analítico pero no sintético.

[39] "El espacio no es un concepto discursivo, o, como se dice, general de las relaciones de las cosas, sino una intuición pura." Traducción personal.
[40] "El espacio es representado como una magnitud infinita dada." Traducción personal.

b) Esta intuición originaria necesariamente debe encontrarse en el ser humano a priori. Esta intuición es pura y debe tener lugar antes de cualquier percepción de un objeto. Es así que toda proposición de la geometría es necesaria, es decir apodíctica, desde la conciencia.

c) La razón por la que la intuición externa, que no empírica, de espacio está en la mente del ser humano, es que esta es una propiedad natural, o formal del sujeto, de tener afección de los objetos y recibir por ende representaciones inmediatas de estos. La intuición tiene su base en el mismo sujeto, como forma del sentido externo en general.

Entonces, tras estas dos exposiciones, se puede afirmar que el espacio no representa ninguna propiedad de la cosa en sí, y es la condición subjetiva de la sensibilidad, esto es la forma de todos los fenómenos del sentido externo. Esta condición subjetiva nos posibilita la representación de los objetos como fuera de nosotros (intuición externa).

2.4.2. Tiempo

La exposición metafísica del concepto de tiempo se realiza de la siguiente forma:

1) “Die Zeit ist Keine empirischer Begriff, der irgend von einer Erfahrung abgezogen worden” (Kant, 2010, pág. 94)[41], porque ni la simultaneidad ni la sucesión acontecen en la percepción, que son solo posibles por la representación del tiempo, que se encuentra como fundamento de la misma sensibilidad, a priori. Solo presuponiendo el tiempo es posible la representación de algo que es uno a la vez, o uno después de otro. Estas representaciones llevan a la simultaneidad y a la sucesión.

2) “Die Zeit ist eine notwendige Vorstellung, die allen Anschauungen zum Grunde liegt” (Kant, 2010, pág. 94)[42]. Se pueden quitar los fenómenos del tiempo, pero no el tiempo de los fenómenos. Pues en él y por él es posible toda la realidad fenoménica, esto a priori.

[41] “El tiempo no es ningún concepto empírico que haya sido tomado de la experiencia” Traducción personal.
[42] “El tiempo es una representación necesaria que yace como fundamento de todas las intuiciones.” Traducción personal.

3) “Auf diese Notwendigkeit a priori gründet sich auch die Möglichkeit apodiktischer Gründsätze von der Verhältnissen der Zeit, oder Axiomen von der Zeit überhaupt“ (Kant, 2010, pág. 95)[43]. Como por ejemplo: el tiempo solo tiene una dimensión; diversos tiempos no son simultáneos, sino sucesivos. Esta estricta universalidad no se puede derivar de la experiencia, ni por medio de ella se obtendría certeza apodíctica. Aquellos principios valen como reglas, bajo las cuales se hace posible la experiencia.

4) “Die Zeit ist kein diskursiver, oder, wie man ihn nennt, allgemeiner Begriff, sondern eine reine Form der sinnlichen Anschauung” (Kant, 2010, pág. 95)[44]. La intuición es la representación que es dada por un objeto único. Es así que diferentes tiempos son partes solamente del mismo tiempo. Así que la proposición: ‘tiempos diferentes no pueden ser simultáneos’, no se puede derivar de un concepto general, no puede proceder solamente de conceptos, y es una proposición sintética, la cual se halla contenida en la representación del tiempo, en su intuición.

5) “Die Unendlichkeit der Zeit bedeutet nichts weiter, als daβ alle bestimmte Gröβe der Zeit nur durch Einschränkungen einer einigen zum Grunde liegenden Zeit möglich sei” (Kant, 2010, pág. 95)[45]. Por esto la representación primaria “tiempo” debe ser dada como ilimitada, pero las partes mismas y todas las magnitudes de un objeto solo pueden llegar a ser representadas, así como determinadas, por medio de una limitación de este mismo objeto. Entonces, toda la representación no puede ser dada por medio de conceptos, pues estos mismos conceptos solamente pueden contener representaciones parciales, sino que deben tener como fundamento una intuición inmediata.

A continuación prosigue la exposición transcendental del concepto de tiempo. Kant la resume a la explicación de dos conceptos: el concepto de cambio (*Veränderung*) y el concepto de movimiento (*Bewegung*), vinculando la posibilidad de su existencia solamente mediante la representación del tiempo. Si el tiempo no fuese una intuición interna a priori, no se podría por medio de ningún concepto posibilitar la comprensión de cambio, es decir: “einer Verbindung kontradiktorisch entgegengesetzter Prädikate (z. B. das Sein an einem

[43] “Sobre esta necesidad a priori se funda también la posibilidad de principios apodícticos de las relaciones, o de los axiomas del tiempo en general.” Traducción personal.
[44] “El tiempo no es ningún concepto discursivo, o como se lo nombra, concepto general, sino una forma pura de la intuición sensible.” Traducción personal.
[45] “La infinitud del tiempo no significa nada más que toda magnitud determinada del tiempo es solamente posible por las limitaciones de un tiempo único y yacente como fundamento” Traducción personal.

Orten und das Nichtsein eben desselben Dinges an demselben Orte) in einem und damselben Objekte" (Kant, 2010, pág. 96)[46].

Es solo con relación al tiempo que ambas determinaciones, que son opuestas y contradictorias, pueden hallarse una después de otra. Entonces, se pueden afirmar que el tiempo es la condición subjetiva en donde las intuiciones tienen lugar, esto es, en nosotros, es ahí donde esta intuición interna puede encontrar representación a priori, antes de los objetos. Es así que el tiempo es únicamente "die Form des inner Sinnes, d.i. des Anschauens unserer selbst und unsers inneren Zustandes" (Kant, 2010, pág. 97)[47]. El tiempo no pertenece a una figura, ni a una posición, es decir que no determina la relación de los fenómenos externos, por el contrario, determina la relación de las representaciones en nuestro estado interno. Algo que se aclara en la siguiente cita:

> Und, eben weil diese inner Anschauung keine Gestalt gibt, suchen wir auch diesen Mangel durch Analogien zu ersetzen, und stellen die Zeitfolge durch das Mannigfaltige eine Reihe ausmacht, die nur von einer Dimension ist, und schlieβen aus den Egenschaften dieser Linnie auf alle Eigenschaften der Zeit, auβer dem einigen, daβ die Teile der ersten zugleich, die der letzten aber jederzeit nach einander sind. (Kant, 2010, pág. 98)[48]

Aquí hay que concluir que la misma representación del tiempo es a su vez una intuición, esto porque todas las relaciones del tiempo se dejan expresar en una expresión exterior (así como también interiormente).

---

[46] "…de la unión de predicados opuestos y contradictorios (por ejemplo el ser en un lugar y el no ser de la misma cosa en el mismo lugar), en un solo y mismo objeto". Traducción personal.

[47] "la forma del sentido interno, es decir la intuición de nosotros mismos y de nuestro estado interno". Traducción personal.

[48] "Y, precisamente porque esta intuición interna no da ninguna figura, buscamos también reemplazar esta carestía por medio de analogías, y nos representamos la sucesión del tiempo por medio de una línea prolongable hacia el infinito, en la cual lo múltiple constituye una seria, que solo es de una dimensión, y derivamos de las propiedades de esta línea, todas las propiedades del tiempo, excepto alguna, que las partes de la primera son simultáneas, y las del último siempre son sucesivas." Traducción personal.

2.4.3. Sobre la preeminencia del tiempo

Entonces se tiene que el tiempo es la condición formal y a priori de todos los fenómenos. El espacio está limitado a ser la forma pura de todos los fenómenos externos, mientras que el tiempo es la condición formal de la intuición interna y a priori de todos los fenómenos en general. Es decir que toda representación, tenga o no tenga por objeto cosas exteriores, pertenece a un estado interno. Este estado interno, bajo la condición formal, se ve regido por el tiempo. Lo que significa que el tiempo es la condición inmediata de todos nuestros fenómenos internos, es decir de nuestra mente, y a su vez es la condición mediata de los fenómenos externos. El tiempo tiene validez objetiva con relación a los objetos de nuestros sentidos, es decir a los fenómenos. El tiempo y el espacio son condiciones subjetivas de nuestra intuición humana, intuición que siempre es sensible porque somos afectados por los objetos, pero no son nada en sí fuera del sujeto. Sin embargo, al considerar los fenómenos, es decir las cosas que se nos presentan en la experiencia, la objetividad necesaria del espacio y el tiempo se hacen patentes.

Es así que en este punto se puede afirmar la validez objetiva de espacio y tiempo, con respecto a los objetos dados por los sentidos como fenómenos, esto es la realidad empírica (*empirische Realität*) de los mismos. Pero en un sentido más especial, o esencial si se quiere, el espacio y el tiempo no son nada en sí mismos, al hacer abstracción de las condiciones subjetivas de la intuición sensible, ni pueden llegar a ser atribuidos a los objetos en sí mismos, si la indispensable relación con nuestra intuición faltase. Esta es su idealidad transcendental (*transzendentale Idealität*).

Lo que se presenta como uno de los puntos centrales en el tratamiento final de esta explicación transcendental, es que los objetos en sí y separados de la sensibilidad humana son algo que permanece completamente desconocido. Al producir la intuición sensible solamente la representación del fenómeno, los objetos que intuimos no son en sí mismos lo que intuimos de ellos, ni las relaciones que se pueden dar entre ellos. Si se eliminase la constitución subjetiva, la cual determina la forma del objeto como fenómeno, se va con esta eliminación también las relaciones de los objetos dados en el espacio y en tiempo, toda constitución, así como también el espacio y el tiempo, al ser solo posibles en el ser humano. Pues éste solo conoce el modo de percibir los objetos, los fenómenos. De estos mismos puede plantearse muchas cosas a priori, por su forma, pero nada que se encuentra como fundamento en aquellos, esto es la cosa en sí (*Ding an sich*).

La sensación es la materia, y el espacio y el tiempo entonces son aquellas formas puras de esta manera de percibir, posibles solamente antes de toda percepción real, es decir que solo podemos conocerlas a priori, son entonces intuiciones puras. En cambio la intuición empírica es posibilitada por la sensación. Espacio y tiempo son las formas de nuestra intuición humana, intuiciones a priori, que posibilitan el darse de los objetos exteriores, sin los cuales no podría formularse ninguna proposición sintética y a priori correspondiente a estos objetos exteriores. Por simples relaciones no se puede llegar a conocer una cosas en sí misma, es así que por el sentido externo se nos dan solamente representaciones de relación, es decir la relación que se entabla entre el objeto y el sujeto en su representación, y no lo concerniente al objeto en sí. De igual manera, en la intuición interna no solamente se constituye la representación de los sentidos externos, sino que también el tiempo, donde son puestas estas relaciones, contiene las relaciones de simultaneidad, sucesión, y permanencia, es decir, de aquello que es simultáneo con la sucesión, aquí el tiempo precede a la conciencia de las mismas representaciones en la experiencia como su base, como condición formal, al ponerlas en la mente. Es un sentido interior según su forma. Pues esta intuición no representa nada, solo es el modo como la mente es afectada por la colocación de las representaciones, esto es, afectada por la propia actividad de poner representaciones.

El tiempo, como la forma pura del sentido interno, presenta un gran problema: cómo un sujeto puede intuirse a sí mismo interiormente. La apercepción, es decir la conciencia de sí mismo, es la representación del yo. La conciencia de sí mismo, exige una percepción interna de lo múltiple dado al sujeto con anterioridad, y es la sensibilidad el modo como lo múltiple es dado en la mente, sin espontaneidad. Si esta facultad, de ser consciente, quiere aprender lo que está en la mente, tiene que afectarse para poder de este modo producir una intuición de sí misma, pero cuya forma determina en la representación del tiempo el cómo lo múltiple está reunido en la mente. Por lo tanto, el sujeto se construye a sí mismo no como él representaría, sino por el contrario, por la manera cómo llega a ser afectado por dentro, no como es, sino como se aparece o representa a sí mismo.

Esto no quiere decir que los objetos, la forma en que son intuidos en el espacio y el tiempo, sean una mera apariencia, porque en el fenómeno son siempre considerados con sus cualidades atribuidas, como algo que realmente se da. Pero en cuanto estas cualidades dependen del modo de intuir del sujeto en relación al objeto intuido, se debe diferenciar este objeto como un fenómeno, de sí mismo como objeto en sí. La condición de existencia de cuerpos está en mi modo de intuir, y no en objetos en sí. La intuición sensible depende de la existencia del objeto, por lo tanto, la intuición sensible solamente es posible en la facultad de representación del sujeto que es afectado por el objeto.

Entonces, cómo se resuelve el problema central de la razón pura: ¿cómo son posibles los juicios sintéticos a priori? Primero, son posibles en el marco de la Estética Transcendental, constituida por las intuiciones puras a priori, es decir espacio y tiempo. Segundo, en esos juicios, siendo a priori, queremos salir de un concepto dado, y encontramos aquello que no puede ser descubierto a priori en el concepto, pero sí en la intuición que le corresponde; y así puede ser enlazada, de una forma sintética con el primero. Por eso estos juicios no pueden ser extendidos más que a objetos de los sentidos, solo son válidos para objetos de la experiencia posible.

2.5. Espacio y tiempo en relación a la construcción matemática

Al tomar en cuenta cualquier juicio de la percepción que trate sobre el mundo físico, como por ejemplo: “mi libro es azul”, o “mi libro está en medio de un par de guantes”, se puede afirmar que su verdad o falsedad no solo dependen de las reglas de la lógica formal, sino también del grado de correspondencia que tengan con la percepción física que están describiendo. La relación que se puede dar entre “libro” y “azul”, no se verifica al analizar estos conceptos, sino que, por el contrario, encuentra su fundamento en la experiencia.

De la misma manera, se puede diferenciar en la teoría kantiana del conocimiento dos aspectos clave a la hora de darse cualquier percepción, o al emitir una proposición de objetos externos, estos son: “the empirical material which is located in space and time, and the space and time in which such material is located" (Körner, 1986, pág. 27)[49]. Por esto se puede decir que el espacio y el tiempo son como una estructura y permanecen sin afección alguna por los cambios ocurridos en el material empírico, y que toda percepción se encuentra en el espacio y el tiempo, nunca fuera de ellos. De ahí que se considere al espacio y al tiempo como la forma de toda percepción (es necesario estar situado en el espacio y el tiempo para que se dé la posibilidad de percepción); y por el otro lado de la materia percibida.

El espacio y de tiempo son como (en forma metafórica) objetos físicos (objetos particulares), no son nociones generales (propiedades de objetos), ni son relaciones (entre los objetos). Esto es así porque al dividir cualquier objeto particular, por ejemplo una manzana, resultan sus pedazos, en cambio dividir una noción general, es dividir esta noción general en nociones que le son subordinadas. "Space and time are divisible, so Kant holds, not as the property "coloured" is divided into the various different colours, but rather as an apple is divided into pieces. Space is rather like a box and time rather like a stream" (Körner, 1986, pág. 27)[50].

Si bien son recipientes invariables, en los que está el material percibido, no son parte del material empírico de la percepción que cambia. El espacio y el tiempo son reales en cuanto condiciones de los seres capaces de percepción, y de pensamiento general, para poder tener experiencia objetiva. Es decir que se necesita del sujeto para la existencia de esta forma espacio-temporal. Es así que se explica la posibilidad de los juicios sintéticos a priori de manera intuitiva, porque estos son sintéticos a la vez que a priori, cuando es descrito el tiempo y el espacio:

> (a) in describing space and time we are describing particulars, which means we are making synthetic judgements; while (b) in describing space and time we are describing, not sense-impressions, but the permant and unchanging matrices of them,

[49] "el material empírico situado en el espacio y el tiempo, y el tiempo y el espacio en que dicho material se sitúa." Traducción personal.

[50] "Espacio y tiempo son divisibles, así lo considera Kant, no como la propiedad "coloreado" se divide en los diversos colores distintos, sino más bien tal como la manzana es dividida en pedazos. El espacio es más bien como una caja, y el tiempo más bien como un río." Traducción personal.

> which means that our descriptions are independent of sense-impressions, that is they are a priori. (Körner, 1986, pág. 27)[51]

Para Kant la Matemática pura es, como ya se ha dicho, sintética a priori, por su especial relación con el tiempo y el espacio, donde esta solamente es posible. Pero la riqueza del legado kantiano no radica en esta afirmación, o solamente en esta afirmación, sobre lo sintético a priori, sino más bien radica en la afirmación, posteriormente desarrollada por las diferentes escuelas que intentaron fundamentar la Matemática , de que: “mathematical propositions are descriptions of space and time.” (Körner, 1986, pág. 28)[52]. Pero este tipo de descripciones no se efectúan por medio de una contemplación pasiva, sino por el contrario, estas proposiciones matemáticas descriptivas presuponen la actividad de una construcción. “To construct a concept is to go beyond proposing or recording its definition; it is to provide it with an a priori object” (Körner, 1986, pág. 28)[53].

La cuestión ahora es determinar qué es la construcción de conceptos, o qué se puede entender por construcción de conceptos. “Das wesentliche und Unterscheidende der reine mathematische Erkenntnis von aller anderen Erkenntnis a priori ist, daβ sie durchaus nicht aus Begriffen, sondern jeder Zeit nur durch die Konstruktion der Begriffe (Kritik S. 713) vor sich gehen muβ” (Kant, 1976, pág. 18) . Esto, y siguiendo la teoría de la Matemática kantiana, que será recuperada muy hábilmente por intuicionistas y formalistas siglo y medio más tarde, se puede entender en las siguientes líneas.

Construir conceptos es exponer a priori la intuición, la forma que les corresponde a esos conceptos: “Zur Konstruktion eines Begriffs wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich, als Anschauung, ein einzelnes Objekt ist, aber nichts destoweniger, als die Konstruktion eines Begriffs (einer allgemeinen Vorstellung), Allgemeingültigkeit

[51] “(a) al describir el espacio y el tiempo, describimos entidades particulares, lo que significa que formamos juicios sintéticos, mientras que (b) al describir el espacio y el tiempo, describimos no impresiones sensibles, sino las matrices permanentes e invariables de las mismas, lo que significa que nuestras descripciones son independientes de las impresiones sensibles, o sea a priori.” Traducción personal.

[52] “las proposiciones matemáticas son descripciones del espacio y del tiempo” Traducción personal.

[53] “Construir un concepto es ir más allá de proponer o consignar su definición: consiste en proveerlo de un objeto a priori”. Traducción personal.

für alle mögliche Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken müβ” (Kant, 2010, pág. 732)[54].

Lo que Kant quiere decir con esto es simplemente la posibilidad de representación de un concepto a priori, naturalmente, en la intuición, pero no en una intuición empírica, por el contrario, esta construcción solamente es posible en la intuición pura, con las formas puras que la conforman, en la que un concepto puede ser intuido y respectivamente construido. Construcción que parte desde la intuición no empírica, pura, como un objeto individual, hasta llegar a la representación y validez universales del mismo concepto. Esto es lo que señala Kant como una condición de posibilidad de la Matemática**,** al construir un concepto y proveerlo de un objeto a priori**.** Esto dado a que la misma funcionalidad de la Matemática se justifica por medio de la construcción de conceptos, al contrario que la Filosofía, al ser ésta un conocimiento racional que funciona por medio de conceptos ya dados.[55]

Una vez más, construir un concepto es dar a este concepto un objeto a priori, pero esto no quiere decir la postulación de un objeto para el mismo concepto. Además, no hay que confundir el concepto de construcción, que es a priori, con la construcción material del mismo concepto, lo primero posibilitará lo segundo, como ya lo veremos, mediante un par de ejemplos extraído de la misma Matemática, para poder dilucidar la teoría kantiana de la Matemática.

Ejemplo 1: enmarcado en el paradigma euclidiano

En primer término se tomará un ejemplo planteado por el mismo Kant, sobre la construcción de un triángulo. Se puede construir un triángulo cuando se expone el objeto a priori correspondiente a este concepto matemático: figura compuesta de tres ángulos y tres lados, esto se puede hacer de dos maneras: la primera, y fundamental, es por medio de la

[54] “Para la construcción de un concepto se exige una intuición no empírica, que por consiguiente, en cuanto intuición, es un objeto individual, y no obstante como construcción de un concepto (de una representación universal) tiene que expresar en la representación la validez universal para todas las posibles intuiciones que pertenezcan al mismo concepto.” Traducción personal.
[55] La Filosofía parte de lo discursivo (*diskursiv*) hacia lo intuitivo (*intuitiv*), esto significa que la Filosofía va de lo universal hacia lo particular; en cambio la matemática construye intuitivamente algo particular, como el triángulo usado como ejemplo, el cual es un triángulo mostrado (*Vorzeig-Dreieck*), hasta llegar a lo universal. Esta universalidad tendría validez general, y es deducida con la ayuda de lo particular a priori.

mera imaginación (*bloβe Einbildung*) en la intuición pura, a priori; y la segunda, por medio de la misma intuición pura, pero sobre el papel, u otro medio de representación, esto es en la empírica, y más bien sirve para expresar el concepto. En ambos casos esta construcción es completamente a priori, aunque la segunda es una consecuencia de la primera y es su manifestación o representación empírica, sin tomar del mundo empírico ningún tipo de experiencia.

> "Die einzelne hingezeichnete Figur ist empirisch, und dient gleichwohl den Begriff, unbeschadet seiner Allgeminheit, auszudrücken, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Konsruktion des Begriffs, welchem viele Bestimmungen, z. E. der Gröβe, der Seiten und der Winkel, ganz gleichgültig sind, gesehen, und also von diesen Verschiedenheiten, die den Begriff des Triangels nicht verändern, abstrahiert wird." (Kant, 2010, pág. 733)[56]

A pesar de que pueda parecer que el dibujo de un triángulo sobre un papel es recurrir al mundo empírico como fuente o fundamento, en verdad en este solamente se da la representación de la construcción, más no la construcción misma, que ya ha sido efectuada a priori y por medio del concepto, el cual es independiente de las diferentes características empíricas, que pueden acompañar a la representación material de un triángulo.

Las proposiciones de la Matemática se dedican a la descripción del espacio y el tiempo. Pero esta descripción requiere inevitablemente la actividad de la construcción, dar objeto a priori a un concepto matemático. El espacio y el tiempo se perciben, no pueden ser pasados por alto nunca cuando se realiza una construcción, esto quiere decir que la construcción debe ser perceptible, si no lo es, no puede ser realizable.

[56] "La figura individual dibujada es empírica y no obstante sirve para expresar el concepto a pesar de la universalidad de éste, porque en esta intuición empírica se contempla solamente el acto de la construcción del concepto, para el cual solo son completamente indiferentes muchas determinaciones, por ejemplo: de la magnitud, de los lados y de los ángulos y, en consecuencia, se prescinden de estas diferencias que no alteran el concepto del triángulo." Traducción personal.

Ejemplo 2: demostrativo, activo, no enmarcado en el paradigma euclidiano

Sea una esfera de n-dimensiones >3, noción generalizada de esfera en espacios vectoriales no euclidianos [57], apenas a partir de 3-dimensiones+1 la representación gráfica es imposible, pero lo curioso es que la definición de esfera sigue sin alterarse, independientemente de la dimensión, pero siempre n-dimensión ≥ 3, en que se la postule, esta es una esfera: sólido geométrico que tiene la propiedad que todos sus puntos equidistan de su centro.

Lo que se quiere decir con este ejemplo es que el concepto de esfera de n-dimensiones >3, es congruente por sí misma, pero por el contrario no es posible su construcción, es decir darle un objeto que le satisfaga, al menos en 3n (en 3-dimensiones+1 solo será posible por analogías, y solo mediante ellas), no se describe el espacio como nos es dado. En este punto es preciso recurrir, para complementar el ejemplo, a otro ejemplo más didáctico, recurriendo a una analogía para reflejar la imposibilidad de construcción de conceptos incongruentes. Para poder llevar a cabo este ejemplo es preciso remitirse al texto de divulgación matemática *Planilandia*[58]. Imagínese una superficie de papel como un mundo de dos dimensiones, llamado Planilandia, en donde se desarrolla la vida de un ente-cuadrado. Este ente-cuadrado conoce a un ente-tridimensional, que ente caso sería una esfera, portador de características divinas según el ente-cuadrado, porque entre sus diversas hazañas está la de tomar objetos de una caja, sin que esta sea abierta, esto es posible gracias a la dimensión extra que este ente-tridimensional posee (puesto que toma o borra a los objetos gracias a que tiene perspectiva de tres dimensiones, frente a la del papel, donde habita el ente-cuadrado, de solo dos). Este ente de características divinas se encuentra sobre Planilandia, y una dimensión por encima de todos sus habitantes, cuestión decisiva.

El ente-tridimensional, al poseer una dimensión extra, es invisible para los entes de tan solo dos dimensiones y atrapados en las mismas, pero puede hacerse presente de una forma particular, al ser una esfera, puede seccionarse en una secuencia de círculos que cambian de tamaño y que se manifiestan sucesivamente, en el proceso de la intersección que se

[57] Es decir que no se satisfacen, o se cumplen, los casos especiales en las dimensiones de espacios euclidianos de 1, 2, 3, a saber: recta y plano, y sólido de tres dimensiones.
[58] De Edwin A. Abbott.

efectúa entre el plano y la esfera. Un ente-cuatridimensional, con una dimensión más, en contacto con nuestro mundo podría ser considerado con las mismas capacidades “divinas” que aquel ente-tridimensional que visitó Planilandia.

Muchos pintores y dibujantes logran crear profundidad tridimensional en los dibujos de tan solo dos dimensiones, de la misma manera se pueden proyectar objetos de tres dimensiones, de manera matemática (geométrica), sin que esto deje de ser una analogía en una cuarta dimensión supuesta. Por ejemplo hipercubos, hiperfiguras, etc. Los matemáticos, o ingenieros informáticos, solo pueden hacer proyecciones, o representaciones, todas congruentes matemáticamente, en papel o en pantallas de computadora, es decir en 2D, proyecciones 3D, de figuras geométricas de 4D, que no son más que representaciones de congruencias de figuras geométricas, que en sí no son construcciones. El pentácoron es un ejemplo más.

Este tipo de ejercicios se proponen para poder facilitar la comprensión de dimensiones superiores, al menos en 4D, como el siguiente. Todo cuadrado es un objeto geométrico de dos dimensiones limitado solamente por cuatro líneas unidimensionales. A su vez un cubo es limitado por seis cuadrados, pues es un objeto tridimensional limitado por superficies tridimensionales. Entonces, de manera análoga, y solo posible de esta manera, se deduce que un cubo de cuatro dimensiones, tendría sus límites en volúmenes de tres dimensiones. Este espécimen fue creado, o descubierto si se recurre al platonismo matemático, por geómetras, es el Teseracto[59] o hipercubo, el mismo que es limitado por ocho cubos.

Este hipercubo[60] está formado por 8 celdas cúbicas, 16 vértices, 24 caras cuadradas, y 32 aristas. Obviamente, es imposible poder llegar a ver un hipercubo[61], ya que el humano está encerrado en tres dimensiones, por lo cual como ya se dijo, solo puede verse la proyección, o representación artística, de lo que sería un hipercubo, pues no tiene construcción. En la representación artística congruente de un hipercubo se lo dibuja como si fuesen dos cubos anidados, el uno dentro del otro, con todos sus vértices respectivos conectados por líneas,

[59] Para un mejor acercamiento a esta temática: Coxeter, *Regular Polytopes*.
[60] Charles Howard Hinton. *A New Era of Thought*. El término “tessaract” nace en este libro.
[61] Si en nuestro universo 3D se pudiese crear una representación material de éste, cosa imposible, pues simplemente no lo podríamos ver, pues no conocemos la 4D en la cual se proyecta. Además hay que añadir que en matemáticas no existe una definición adecuada de dimensión que incluya todas y cada una de las situaciones, es por eso que la definición de dimensión depende mucho del tipo de espacio.

lo sorprendente que este hipercubo, teseracto, “real” en cuatro dimensiones, tendría todos los ángulos rectos y todas las líneas tendrían la misma longitud, algo que no puede construirse. Pero si existiese tal cuarta dimensión, en donde habitasen los hipercubos, su manifestación, o proyección en nuestro universo solo podría verse como un cubo intersecado por un plano, o solo quizá los puntos con los que toca nuestro universo 3D. Igual a la analogía de Planilandia[62].

Describimos por analogías una dimensión, un mundo que no conocemos, o al que no tenemos posibilidad de acceder por las limitaciones, o mejor por las características naturales evolutivas propias. Los ejemplos que se han expuesto tratan de la congruencia y la posibilidad de postular objetos, por analogías, para estos hiperconceptos geométricos, pero que no son construibles, y que no podrán recibir un objeto a priori verdaderamente.

Hay que aclarar, nuevamente, que la posibilidad de la construcción en un espacio tridimensional de una esfera de tres dimensiones, así como también la posibilidad de la construcción una esfera bidimensional, a saber un círculo, solamente se lleva a cabo en la posibilidad de su construcción. Esto es, su posibilidad se fundamenta no solo en la congruencia que poseen tales conceptos, sino además, y fundamentalmente se diría, porque el espacio que percibimos tiene esa constitución que los posibilita. También hay que diferenciar entre la construcción física de un concepto, la construcción de una esfera, de la construcción a priori de dicha esfera. La posibilidad de la construcción a priori de dicha figura sirve como base de la construcción física, en papel por ejemplo, de aquella figura. Una esfera de papel solamente es posible porque es posible su construcción en el espacio.

De la misma manera se puede afirmar respecto de un hipercubo, que su imposibilidad de construirse materialmente, se fundamenta en la imposibilidad de su correspondiente construcción a priori, a pesar de su congruencia. En esto se afirma la diferenciación que se

[62] Parece ser que el ser humano ve, por la capacidad natural de las retinas del ojo, en 2D y ¼, o en 2D y ½. Y no en 3D como se puede pensar, pues vemos dos imágenes en 2D, esto causa un efecto de desenfoque, de doble enfoque, y de doble imagen que hace posible saber dónde están colocadas las cosas, y se crea la ilusión de profundidad, esto no tendría que ver con el 3D. Pues una visión 3D equivale a decir que dicha visión posibilitaría ver todo el universo, todos los puntos del mismo, para lo cual nosotros deberíamos situarnos en una dimensión más, 4D. Entonces, al ser nosotros entes tridimensionales, con la capacidad de ver en dos dimensiones, por analogía un ente de cuatridimensional vería este mundo en 3D, este ente podría ver los seis lados de un cubo opaco, simultáneamente, a la vez que sabría lo que hay dentro del mismo, es decir que podría ver la estructura interna de las cosas tridimensionales.

da entre un concepto matemático, el cual requiere congruencia interna solamente, de su construcción, la cual requiere que el espacio de nuestra sensibilidad, tenga tales y tales características, una determinada estructura.

2.6. Consideraciones finales

En el centro de la revolución copernicana, kantiana, se encuentra el sujeto que conoce, la forma de la apercepción, como fundamento de las categorías. Este sujeto está conformado por las facultades, fuentes del conocimiento: sensibilidad y entendimiento (la primera pasiva, la segunda activa); este sujeto se arroja a conocer el objeto de conocimiento posible, el cual se encuentra conformado por los fenómenos de la naturaleza. Naturaleza en la que todo acaece, para el sujeto, según las reglas lógicas, es decir categorías, y las a priori que son geométricas y aritméticas.

El espacio es la forma de los fenómenos del sentido externo, así como el tiempo es la forma de los fenómenos del sentido interno, lo que le da un grado superior al hacer posible el sentido externo; estas formas de la intuición a priori, terminan por posibilitar el ordenamiento de lo diverso, multiplicidad de fenómenos carentes de estructura. Estas formas son así posibles, porque las mismas no son abstracciones de los fenómenos, sino que dependen de la actividad de tal sujeto, el sujeto transcendental. Entonces espacio y tiempo son formas del sujeto, el que al conocer los fenómenos termina por aportarles la forma espacio-temporal. Esta intuición formal es la misma forma de la sensibilidad (interna y externa) del ser humano; una estructura de la correcta ordenación de fenómenos, es decir que por medio de la misma se puede ordenar la multiplicidad de fenómenos. Es así que los teoremas de la aritmética y de la geometría asumen las características que asoman por medio de la multiplicidad en el espacio y el tiempo, entonces estas características (más evidentes) son tomadas como axiomas, para las posteriores demostraciones matemáticas.

Y entonces al considera al espacio y al tiempo en relación a la construcción matemática en la geometría y aritmética, se deduce de ello que en este sentido la intuición pura del espacio es entendido como el fundamento de la geometría y la intuición pura del tiempo como el fundamento de la aritmética (así como el del concepto de número (*Zahlbegriff*)).

En estas formas puras de la intuición, espacio y tiempo, construye la Matemática todos sus conceptos a priori. De esta manera se entiende gracias a la siguiente cita:

> …sind Raum und Zeit diejenigen Anschauung, welche die reine Mathematik allen ihren Erkenntnissen und Urteilen, die zugleich als apodiktisch und notwendig auftreten, zum Grunde legt; denn Mathematik muβ alle ihre Begriff zuerst in der Anschauung und die reine Mathematik in der reinen Anschaunng darstellen, d. i. sie konstruiren. (Kant, 1976, pág. 35) [63]

Presentar los conceptos en la intuición pura, significa que estos conceptos serán construidos, es decir que no se puede proceder por la descomposición de los conceptos, esto es analíticamente, sin esta misma intuición pura le sería imposible al matemático ejercer su actividad creadora, pues en esta misma intuición pura se da la posibilidad de los juicios sintéticos a priori. Es muy importante tener en cuenta que en Kant, como ya se dijo, la Matemática se compone de la geometría por una parte, la cual se sirve de la intuición pura del espacio, y la aritmética por otra parte, la cual se sirve en cambio de la intuición pura del tiempo. Pero la intuición pura del tiempo a su vez sirve de fundamento a la mecánica pura, es decir a la Física: "Geometrie legt die reine Anschauung des Raums zum Grunde. Arithmetik bringt selbst ihre Zahlbegriffe durch sukzessive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zustande, vornehmlich aber reine Mechanik kann ihre Begriffe von Bewegung nur vermittelst der Vorstellung der Zeit zustande bringen." (Kant, 1976, pág. 35)[64]

De aquí se deduce también que la Matemática es independiente de la Física. Y se reafirma que el conocimiento de la geometría y de la aritmética es el mismo conocimiento del espacio y del tiempo. De aquí también la afirmación de que el conocimiento matemático es a priori, es decir apodíctico y necesario, gracias a que contiene la forma de la sensibilidad, la cual está en mi sujeto y esta antes de toda impresión real, por este medio puedo ser

[63] "…tiempo y espacio son las intuiciones que establece la Matemática pura como base de todos los conocimientos y juicios, los cuales se presentan igualmente como apodícticos y necesarios, pues la matemática debe presentar todos sus conceptos, primero, en la intuición, y la matemática pura en la intuición pura; esto es, construirlos…" Traducción personal.

[64] "La geometría toma por base la intuición pura del espacio. La aritmética misma hace efectivo su concepto de número por la adición sucesiva de la unidad en el tiempo; pero, particularmente, la mecánica pura puede hacer efectivo su concepto de movimiento sólo por medio de la representación de tiempo." Traducción personal.

afectado por los objetos (*Gegenständen*). Esta equivalencia entre geometría y espacio, aritmética y tiempo es finalmente captar las características más relevantes de lo diverso en el espacio y tiempo.

Como la cosa en sí (*Ding an sich*) no se puede llegar a conocer, el mundo de los fenómenos es puesto a disposición de un conocer matemático, es decir queda subyugado a un principio matemático, este mismo principio tiene este rango porque posibilita y constituye la misma experiencia, es decir se conoce el mundo matemáticamente. Si se acepta esto entonces se puede entender una de las partes principales en la teoría Matemática de Kant, es decir los Axiomas de la intuición, y su afirmación principal: "Alle Anschauungen sind extensive Gröβen" (Kant, 2010, pág. 238)[65]. La única forma de poder captar los fenómenos en la conciencia empírica es por medio de la conciencia de la unidad sintética de esta misma variedad fenoménica. Los fenómenos solamente se pueden subsumir en una conciencia que pueda ser capaz de sintetizar la diversidad, a la par que es consciente de sí misma en relación a tal unidad sintética de la diversidad, esta conciencia de la diversidad homogénea, es ya poder saber a priori que una totalidad homogénea está formada por partes. Esta constitución o diversidad es extensa, es decir que todos los fenómenos se nos presentan como magnitudes extensas. La magnitud extensa es la que hace posible que la representación de las partes logre la representación del todo. Es así que el tiempo es pensado como un proceso sucesivo que va de un momento a otro, esto tiene como resultado una determinada magnitud temporal, dado por las partes y su adición. Dado que espacio y tiempo constituyen la intuición de todo fenómeno, se puede deducir que todo fenómeno es magnitud extensiva.

Se necesita de la síntesis del entendimiento para poder llegar a adquirir el conocimiento de espacio y tiempo. La síntesis, la capacidad de juntar, es un efecto de la fuerza de la imaginación (*Einbildungskraft*), de lo cual somos conscientes rara vez. La multiplicidad sensible es determinada por medio del entendimiento cuando a través de los esquemas transcendentales del número se combina lo múltiple en una síntesis, la cual se encuentra sometida a las categorías de cantidad. Por ejemplo, el contar (*Zählen*) y el concepto de número (*Zahlbegriffe*), por el cual se entiende los únicos números (*die einzelnen Zahlen*) y los cuales pertenecen a la categoría de la cantidad (*Kategorie der Quantität*) en la tabla de

[65] "Todas las intuiciones son magnitudes extensivas." Traducción personal.

las categorías del entendimiento (*Tafel der Verstandeskategorien* (Kant, 2010, pág. 105)). Solamente la síntesis de la multiplicidad no es aún ningún conocimiento. Primero el concepto de número que da a la síntesis pura unidad, hace posible el conocimiento de un objeto dado. Aquí se puede resumir lo más característico que Kant presenta sobre el número (*Zahl*). El número es según Kant una estructura a priori del entendimiento:

> Das reine Schema der Gröβe aber (quantitatis), als eines Begriffs des Verstandes ist, die die sukzessive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammenbefaβt. Also ist die Zahl nicht anders, als die Einheit der Synthesisdes Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, daβ ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge. (Kant, 2010)[66]

En la sucesión se muestra la formación de números en la forma de la intuición pura del tiempo. La producción del esquema cognitivo "número" es la síntesis de la multiplicidad de una intuición similar. El esquema permite empatar lo empírico con lo conceptual (se encuentra entre intuible y lo conceptualizable) en cuanto los dos se encuentran bajo una estructura temporal. Se puede decir incluso que las intuiciones son estructuradas por el entendimiento a través de los esquemas (como un modelo para cada intuición), aquí tiene lugar la construcción matemática.

La intuición es expresada por medio del concepto, lo que le da a esta un carácter lógico, no así místico (como algunos críticos la interpretan). Los conceptos de la Matemática llegan a ser construidos por medio de los esquemas transcendentales del tiempo, que representa la forma común que se da entre la intuición y lo empírico. El esquema transcendental del tiempo posibilita que cualquier concepto del entendimiento concorde con cualquier objeto que se encuentre en relación con la cantidad, cualidad, relación o modalidad. Es decir que este esquema forma la imagen pura de cada uno de los objetos, internos o externos, que se les presenten a los sentidos.

[66] "El esquema puro de la cuantidad (quantitatis) como un concepto del entendimiento, es el número, el cual es una representación que comprende la adición sucesiva de uno a uno (de la misma especie). El número no es más que la unidad de la síntesis de lo diverso de una intuición similar en general, gracias a que yo produzco el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición." Traducción personal.

Los esquemas transcendentales son conceptos intuitivos puros, o intuiciones conceptualizables puras, Kant las denomina como determinaciones transcendentales del tiempo (*transzendentale Zeitbestimmungen*). El proceso para llegar hasta aquellas se da primero desde las categorías en las cuales se da la unidad sintética de lo diverso, después esta unidad es producida desde el sentido interior, en un último momento se sabe que la forma de la intuición de lo múltiple del sentido interno se encuentra en el tiempo.

El esquema de la cantidad es el número, es decir que el concepto de número es producido mientras se relacione el concepto de cantidad con la forma de la intuición del tiempo. El esquema transcendental se construye sobre la forma de la intuición pura de la temporalidad, la mera sucesión (*Nacheinander*), es decir no con el tiempo empírico medible. Por eso es independiente en el contar de lo que es contado, la cantidad como sucesión pura: primero uno, entonces aun uno que con el anterior produce dos, entonces aun uno, que juntos producen tres, y así sucesivamente.

CAPÍTULO TERCERO: LAS CARACTERÍSTICAS FILOSÓFICAS DEL INTUICIONISMO EN RELACIÓN CON LA TEORÍA MATEMÁTICA DE KANT.

3.1. Geometría, aritmética y otros tópicos.

El intuicionismo se desarrolló como una corriente esencialmente contraria al formalismo y logicismo, o al menos a las tentativas de reducir la Matemática a la lógica, el tiempo en activo que llevo adelante el fundador de dicha corriente Luitzen Brouwer (1881-1966), y al cual únicamente nos referiremos dejando de lado a sus discípulos y retomando el intuicionismo original, de los años 1907 y 1930. La principal causa por la cual el intuicionismo se origino fue la crítica a la fundamentación de la Matemática de aquella época. Esta crítica se dirigió específicamente a la teoría de conjuntos de Cantor.

Según los intuicionistas afirman que la Matemática comprende una actividad autónoma y autosuficiente, claro está al ser comprendida apropiadamente, es decir del modo intuicionista. Su método fundamental es la intuición. Los intuicionistas tratan de construir una nueva Matemática la cual debe renovarse en todos sus niveles. Brouwer está abiertamente en contra de la tradición nacida en Leibniz, la cual consideraba a la Matemática con un conjunto de proposiciones analíticas, es decir que para demostrar la verdad o falsedad de una proposición bastaba con aplicar los principios de la lógica. Brouwer está convencido de que la Matemática posee un carácter sintético. Siguiendo a Kant, los axiomas de la Matemática son sintéticos a priori, esto significa que son descripciones de la intuición pura de espacio, más adelante se verá que esto no se aplica a este concepto en la teoría matemática de Brouwer, y del tiempo, de la misma manera que las construcciones que se realizan en la intuición.

El intuicionismo, siguiendo a Brouwer, criticó la concepción de Georg Cantor sobre su teoría del infinito, así como también el remplazo que efectuó del continuo lineal por el conjunto de los números reales. En cambio vio, el intuicionismo, en algunos filósofos y matemáticos los precursores de su corriente, los cuales ya habían divisado en la Matemática una ciencia de contenido real y no meramente formal, derivándose la segunda característica de la primera. También se sostuvo que al entendimiento humano se le es dado de inmediato el objeto matemático, y que los juicios sobre los objetos matemáticos son juicios sintéticos a priori. De la última línea se puede decir que el intuicionismo, sobre todo en Brouwer, busca su fundamentación en Kant.

Su Filosofía de la Matemática fue parte de sus observaciones filosóficas generales, de su propia cosmovisión, estos puntos referenciales en torno a su pensamiento ya se pueden encontrar en su primer libro publicado en 1905 *Leven, Kunst, Mystiek* (vida, arte, misterio).

Brouwer se sitúa decididamente en contra de cualquier postura platónica que hubiese podido manifestarse en la Matemática. La tesis principal que rechaza el intuicionismo, por medio de Brouwer es el atribuir a los entes matemáticos una existencia independiente del tiempo, el espacio y del sujeto cognoscente, que al final es el que construye la Matemática. En contra de esto el Intuicionismo se adhiere a la tesis del conceptualismo. Para el conceptualismo la Matemática es una función del intelecto humano, además de una actividad libre del entendimiento. El saber matemático es un producto de esta actividad viva, actividad libre del entendimiento, y no por el contrario como se puede pensar, generalizadamente de la Matemática solamente como una teoría, como un sistema de reglas y principios. Los objetos matemáticos son por el contrario una construcción del pensamiento (*Denkkonstruktionen*) del matemático. En la Matemática solamente existe lo que en el intelecto humano está construido o es construible.

Los objetos matemáticos son esencialmente determinados por medio del pensamiento humano. Su existencia está asegurada en la medida de que se la pueda llegar a ser determinada por medio del pensamiento, a esta le corresponden características en cuanto esta misma por medio del pensamiento le puede llegar a reconocer. Esta posibilidad del conocimiento solamente se nos puede manifestar por medio del mismo conocer. Así la creencia en la existencia que no es respaldada por medio de conceptos debe ser irremediablemente rechazado como un medio de demostración matemática. La consecuencia más notoria que se presenta en la teoría conceptualista es el rechazo del método axiomático como fundamentación de la Matemática. No se admite la postulación de la existencia de cualquier objeto, como normalmente lo hace la axiomática, sin mostrar cómo se lo llego a construir. De igual manera esto vale para las características del objeto matemático. Es por esto que el intuicionismo rechaza la axiomática de la aritmética de los números naturales de Peano, así como también la axiomática de la teoría de conjuntos de Zermelo[67].

El intuicionismo especialmente ataca el axioma de elección (*Auswahlaxiom*). Este axioma es para el intuicionismo un claro ejemplo de la postulación pura de la existencia de un conjunto, que nuestro entendimiento no puede determinar precisamente, ni aun representárselo. Otra consecuencia que conlleva la tesis conceptualista es el irrestricto rechazo del infinito actual (*Aktuale Unendlichkeit*). El intelecto humano puede construir objetos especiales, por ejemplo números, pero no puede introducir construcciones infinitamente. Dado esto se puede afirmar que se puede entender un infinito solamente como una regla o un principio, eso indica como son formados continuamente nuevos elementos. Estos conjuntos finitos son numerables. Por el contrario los conjuntos sobre-numerables (*überabzählbare*) son impensables. Por eso no hay ningún número cardinal transinfinito como $\aleph_0$. El concepto de conjunto en el intuicionismo es completamente diferente al que se utiliza en la teoría de conjuntos de Cantor[68].

El conceptualismo del intuicionismo condujo también al rechazo de todas las pruebas de existencia (*Existenzbeweis)* que no han sido construidas, es decir aquellas pruebas en las cuales no es dada ninguna construcción del objeto postulado. En las pruebas de este tipo vio Brouwer la fuente de las antinomias, paradojas y otros problemas fundamentales que se han producido en la Matemática. El rechazo a las pruebas no constructivas condujo inevitablemente al rechazo de la lógica clásica, en la que cada principio es verdadero o falso. El principio del tercero excluido (*tertium non datur*) $p \vee \sim q$; así como el principio de doble negación (*dúplex negatio affirmat*) $\sim\sim p \leftrightarrow p$, tienen que ser rechazados, o limitados, en la teoría matemática intuicionista dadas las restricciones de su programa. Si estos

[67] Peano, Giuseppe (1858-1932). Matemático nacido en Spinetta, Turín. El trabajo en el análisis matemático, ecuaciones diferenciales y parciales, así como también en los fundamentos de la matemática. Peano creó un simbolismo para la matemática y la lógica. Zermelo, Ernst Friedrich Ferdinand (1871-1953). Matemático alemán. Formuló el axioma de elección (Auswahlaxiom), fue primer autor en axiomatizar la teoría de conjuntos.

[68] Cantor, Georg Ferdinad Ludwig Philip (1845-1918). Matemático alemán. A partir de 1869 y hasta su retiro trabaja en la Universidad de Halle. Entre 1874 y 1897 publicó sus trabajos más conocidos, en los cuales fundo una teoría completamente nueva, la teoría de conjuntos (Mengenlehre).

principios fuesen válidos entonces para la característica p(x), $\exists x\ p(x) \vee \sim\exists x\ p(x)$ Suponemos que la característica p(x) está de tal manera compuesta que las condiciones: $\sim\exists x\ p(x)$ conllevan a una contradicción, entonces sería la otra parte la alternativa correcta, es decir $\exists x\ p(x)$. Aquí se ha sostenido la existencia del objeto x, pero sin haberlo construido. Pruebas de este tipo han parecido continuamente en el ejercicio de la matemática clásica. Brouwer junto con sus seguidores han rechazado este tipo de pruebas como medio para la justificación o validación de un postulado matemático. Para los intuicionistas esto significa la existencia de un objeto x con la característica p, que tal objeto es construible. Esto debido a que solamente puede existir lo que en los pensamientos puede ser construible. La contradicción del principio $\sim\exists x\ p(x)$ no puede ser ninguna prueba del principio $\sim\exists x\ p(x)$.

Hecha una introducción bastante general de la postura intuicionista en cuanto es una teoría filosófica acerca de la Matemática, y como actividad matemática propiamente dicha, es necesario para la conclusión de la presente tesis abordar de manera más detallada las relaciones que se dan entre Kant y Brouwer con respecto a la fundamentación de la Matemática, cosa que preocupo en gran medida a estos dos autores. Esto se llevará a cabo para poder fundamentar la hipótesis que se manejó en el presente trabajo, la afirmación de la influencia kantiana en el intuicionismo matemático. Por medio de la utilización de categorías kantianas que, al intentar fundamentar la Matemática desde los números naturales, Luitzen Brouwer (fundador del intuicionismo, y desde el cual abordaremos íntegramente al intuicionismo) hizo suyas.

Estas categorías, entre otros conceptos kantianos que Brouwer también toma como referencia, son: el tiempo y la intuición pura (a decir verdad el segundo concepto es parte del primero). Se empezará, en un primer momento, con la descripción de la geometría y los puntos comunes que se encuentran entre Kant y Brouwer, mejor la influencia o rechazo que Brouwer hace de la teoría matemática kantiana, y una defensa del punto de vista kantiano. En este punto, como ya se sospechara, se abordara el concepto de espacio y la relación que se establece con la geometría. A continuación, en un segundo momento, se expondrá la descripción de la aritmética y todos los conceptos que puedan acompañarla, sobre todo el concepto de tiempo.

3.2. Geometría

Según Kant, los teoremas de la geometría euclidiana son proposiciones sintéticas a priori, pues son informes de construcciones evidentes en sí mismas en el medio intuitivo del espacio, este espacio vacío de contenido sensible es rechazado por Brouwer. Él descarta el carácter sintético a priori de la geometría euclidiana por considerar poco viable la autoevidencia de las construcciones que según se piensa respaldan a la geometría euclidiana y rechazan la posibilidad de cualquier otra geometría. Es acertado pensar que el descubrimiento de las geometrías no euclidianas favoreció en gran medida a la negación de esta presumible autoevidencia de la que gozó la geometría euclidiana, a esto se atiene Brouwer. Pero como ya se afirmó en el capítulo anterior, Kant diferencia claramente entre la construcción de un objeto y el postulado de su existencia, por ejemplo no se puede construir una esfera de cinco dimensiones, pero por el contrario uno puede postular su existencia. Precisamente esta diferenciación de las condiciones de existencia de un objeto matemático, para lo cual solamente su consistencia es necesaria, y su construcción, que presupone una estructura determinada de la intuición del espacio (*des Anschauungsraumes*), es importante para no llegar a confundir la Filosofía kantiana. Kant no afirmo que nunca fuese posible indicar una geometría consistente que no fuese euclidiana.

Si bien esta parte de la teoría matemática kantiana es rechazada por Brouwer, él mismo en cambio admite el postulado según el que los teoremas de la aritmética elemental son simplemente la expresión de construcciones autoevidentes en el tiempo. Esta aproximación entre los dos autores se verá con mayor detenimiento en la siguiente parte, aritmética. Los trabajos donde se refiere en mayor medida a la fundamentación de la geometría, en general este autor no centro su atención sobre los fundamentos de la geometría, son dos, el primero es la disertación doctoral *On the foundations of mathematics* en el año de 1907, siendo considerado este trabajo como el trabajo precursor y fundador del Intuicionismo, este trabajo si bien es sobre la Matemática, en él se destaca un fuerte contenido filosófico. En este trabajo temprano Brouwer ya se inclinó por el rechazo a la idea kantiana de la intuición pura del espacio como fundamentación de la geometría. Y sobre todo, su segundo trabajo, en *The nature of geometry* del año 1909, lectura inaugural como *privaatdocent* en la Universidad de Ámsterdam. En el cual se puede encontrar la siguiente cita en relación a la geometría comprendida desde la teoría kantiana:

> Kant considered Euclidean geometry as a form of perception, present in the human mind, into which any experiences of an external world muss necessarily enter. Today this conception of space a priori, in the same or related form, is still alive in many philosophers… However, in the course of the last century mathematics has developed in such a way that Kant´s Theory on geometry hat to be refuted, and that the relation of Euclidean geometry to experience was clarified in another manner, this time with perfect certainty. (Brouwer, 1975, pág. 112)[69]

En este último trabajo Brouwer manifiesta también que el desarrollo de las geometrías no-euclidianas consistentes, así como su aplicación al mundo físico termina por derrumbar la teoría kantiana del espacio geométrico. Brouwer empieza por determinar la incompatibilidad de los dos tipos de geometrías, incluso contraponiéndose la una a la otra, e impidiendo que se pueda considerar que la geometría no euclidiana pudiese contener a la geometría euclidiana, esto para acentuar su distinción.

> Thus in coordinate geometry Euclidean and non-Euclidian geometry have equal rights, but they contradict each other, and it can no longer be maintained that the former is a priori in mathematics. At the same time it must be admitted that with respect to physical space, i.e. the space of lightrays and rigid bodies, it is conceivable that more refined measuring instruments would show that it could be mapped with better approximation on a not-Euclidean space with very small curvature than on a Euclidean space. (Brouwer, 1975, pág. 114)[70]

---

[69] "Kant consideró la geometría euclidiana como una forma de la percepción, presente en la mente humana, en la cual todas las experiencias del mundo exterior tenían que entrar necesariamente. Hoy en día esta concepción de un espacio como un a priori, en la misma o en una forma relacionada, sigue vivo en muchos filósofos… Sin embargo en el curso del último siglo, la Matemática se ha desarrollado en tal vía que la teoría de Kant en la geometría tiene que ser refutada, y la relación de la geometría euclidiana a la experiencia fue clarificado de otra manera, esta vez con certeza perfecta." (The nature of geometry.- 1909) Traducción personal.

[70] "Así, en la geometría de coordenadas la geometría euclidiana y la no-euclidiana tienen los mismos derechos, pero se contradicen entre sí, y ya no puede sostenerse que lo anterior es a priori en las matemáticas. Al mismo tiempo hay que admitir que con respecto al espacio físico, es decir, el espacio de rayos de luz y cuerpos rígidos, es concebible que instrumentos con la medición más refinada mostrarían que ello podría ser

Brouwer asienta su crítica sobre todo en la naturaleza de la geometría y su relación con la ciencia experimental, por ejemplo la utilización de la geometría de Riemann en la teoría de la relatividad. De la misma manera Brouwer afirma que el desarrollo de la geometría proyectiva represento un avance hacia el desarrollo de geometrías alternativas a la geometría euclidiana, sobre todo el grupo de transformaciones proyectivas contendría ya los grupos clásicos no-euclidianos. Entonces de esta manera Brouwer no duda en dar igualdad de derechos a estos dos tipos de geometrías, pero al referirse a la teoría de la relatividad dice que el punto de vista de que la geometría euclidiana sosteniendo un apriorismo físico es insostenible. Brouwer rechaza además el punto de vista de que la geometría proyectiva es a priori, mientras la experiencia determina la curvatura y número de dimensiones del espacio. En este punto el autor se adhiere al cambio de la concepción del espacio y tiempo hacia la concepción espacio-temporal, como punto central en el grupo de las transformaciones de Lorenz. En esas circunstancias no se podría considerar la introducción de una tesis a priori del espacio.

A pesar de lo expuesto hasta aquí de la tesis del mismo Brouwer en relación a la teoría de la geometría kantiana, también se podría, solo en principio, sacar algún punto positivo, desde el cual se puede incluso defender el apriorismo kantiano del espacio desde el mismo Brouwer. A pesar de que se mantiene en que el espacio no-euclidiano es consistente, este mismo espacio consistente nunca podría ser aplicado al espacio como se percibe actualmente, como lo captamos. “The argument that, though it be conceded that the axiom of parallels is not a priori in mathematics, our faculty of cognition can assimilate the world of experience only in the form of Euclidean geometry; in this sense Euclidean geometry would conserve physical apriority.” (Brouwer, 1975, pág. 114)[71]

Pero Brouwer al final termina por admitir que lo ocurrido en la teoría de la relatividad. Brouwer hace hincapié en la aportación de Lorentz, termina por dar absoluta validez a la

---

mapeado con una mejor aproximación en un espacio no euclidiano con muy pequeña curvatura que en un espacio euclidiano.” (*The nature of geometry*. 1909) Traducción personal.

[71] “El argumento que, aunque se reconoce que el axioma de las paralelas no es a priori en la Matemática, nuestra facultad de cognición puede asimilar solamente el mundo de la experiencia en la forma en la geometría euclidiana, en este sentido la geometría euclidiana conservaría el apriorismo físico.” (*The nature of geometry*. 1909) Traducción personal.

especificidad espacio-temporal sobre la realidad, y a su aplicabilidad científica. La referencia se hace a la relatividad especial y a sus postulados, así como a las transformaciones de Lorenz. Esto también lleva como consecuencia la negación del a priori en Física, por ende en la mecánica moderna se tiene que:

> The three-dimensional geometry of velocity bodies is not Euclidean, but hyperbolic with a very small curvature. The sphere with the velocity of light as its radius is for the geometry the infinite, thus velocities surpassing the velocity of light cannot be realized. Here the transition from a three-dimensional Euclidean geometry to a non-Euclidean geometry has actually taken place, and therefore it is no longer possible to maintain that the other original Euclidean geometry of experience is a priori in physics. (Brouwer, 1975, pág. 114)[72]

Dicho esto se pudo conocer de mejor manera que es lo que implica la postura de Brouwer con respecto al a priori kantiano del espacio con relación a la geometría y su fundamentación, esto dado a que los acontecimientos, acaecidos en la teoría física, fueron para Brouwer ineludiblemente refutadores del espacio kantiano.

A continuación se presentara en cambio una defensa a la postura kantiana sobre el fundamento de la geometría por medio del espacio, en este apartado se busca clarificar de mejor manera el contexto en el cual se desenvuelve la teoría sobre la geometría de Kant, así como también profundizar sobre esta misma teoría, aclarando varios puntos que podrían ser de interés para el desarrollo del presente trabajo.

3.2.1. Defensa del a priori en la teoría geométrica de Kant

La explicación transcendental del espacio liga al entendimiento de la geometría al de una ciencia, la cual determina las características del espacio de forma sintética y a priori. Como

[72] "La geometría tridimensional de cuerpos de velocidad no es euclidiana, pero hiperbólica con una pequeña curvatura la esfera con la velocidad de la luz como su radio es para la geometría el infinito, entonces las velocidades que superan la velocidad de la luz no pueden ser realizadas. Aquí la transición de una geometría euclidiana tridimensional a una geometría no euclidiana ha tomado lugar actualmente, por lo que ya no es posible mantener que la otra geometría original euclidiana de la experiencia es a priori en la física." (*The nature of geometry*. 1909) Traducción personal.

se vio en el capítulo anterior las características que posee el espacio, para que pueda ser posible el conocimiento del mismo, son: el espacio no debe ser un concepto, debe ser una intuición, esto debido a que solamente por conceptos no se puede llegar a poseer proposiciones sintéticas. El espacio tampoco debe ser una intuición empírica, de lo contrario la geometría no tendría validez a priori. Y por último, la intuición exterior de los objetos solamente es posible cuando la misma proviene del sujeto, y cuando la misma indica la forma de una intuición exterior.

De los tres argumentos anteriores se puede deducir, como se lo hizo en el capítulo anterior, que el resultado de la explicación transcendental del espacio, como una forma subjetiva y pura de la intuición, hace que la geometría sea concebida como un conocimiento sintético y a priori. Porque el espacio es una intuición pura a priori, la geometría es posible. Así como también porque el espacio es la forma que recibe todos los objetos empíricos como nuestras intuiciones, es posible la geometría aplicada. Todo esto fundamentado en el requerimiento y a la vez afirmación común de que el espacio tiene tres dimensiones, así también sostenido por Kant. Para la intuición natural del ser humano, así como para la geometría euclidiana, la única geometría en la época de Kant, esta afirmación es correcta.

Pero con el advenimiento de las geometrías no euclidianas, sobre todo de la geometría estándar para la teoría de la relatividad, la geometría de Riemann, se llega a la obsolescencia de la geometría euclidiana para la Física y Matemática modernas. Con esto también parecería inevitable que la teoría kantiana de la geometría se vea negada. Pero para poder plantear una superación de todas estas contradicciones que surgen a partir de este doble estándar teórico del espacio en dos teorías contrapuestas sobre el mismo, se ha propuesto desde los teóricos kantianos una distinción necesaria para poder conservar la validez teórica de la geometría desde Kant, con la necesidad de algunas restricciones, y evitando caer en contradicción con la teoría geométrica actual. Se ha propuesto por ejemplo, la distinción entre dos tipos de espacio, los cuales no tienen por qué ser contradictorios entre los mismos. El primero sería llamado espacio transcendental, es el espacio dado, tridimensional y euclidiano, con el mismo que toda Física tiene que comenzar. Y el segundo sería llamado espacio empírico, lo cual los físicos pasan por alto en el transcurso de sus experiencias. Lo que se intenta realizar con este refuerzo a la teoría kantiana de la geometría es simplemente suavizar la tesis kantiana de la unidad de la geometría euclidiana hacia una posición transcendental privilegiada.

De igual manera, y de una forma más precisa, se ha intentado hacer notar que la prioridad de la geometría euclidiana no solo toma en cuenta la representación espacial natural, sino también, y esto es importante, la circunstancia de que la geometría euclidiana tridimensional es válida matemáticamente, así como es válida empíricamente también lo es en el ámbito central de la experiencia, o experimentación, entre la Física atómica y la astrofísica. El carácter a priori de la intuición es, en la explicación metafísica, presentado solamente para la forma fundamental de todas las intuiciones exteriores, es decir para todo lo que se presente afuera y uno al lado del otro, sin una característica estructural. Terminológicamente es la intuición exterior concebida como espaciosidad[73]. Es decir como un espacio en general, o total, esta espaciosidad en sí misma no es objeto aún de la geometría. Este objeto geométrico se origina primeramente por medio de la objetivación de la espaciosidad; y por medio de la imaginación presenta la Matemática la mera forma de la intuición como objeto propio con cierta estructura, que en el ámbito de la geometría pura es investigado libre de experiencia.

Los enunciados matemáticos y físicos no tienen un significado transcendental, sino por el contrario, en un nivel más profundo, sus condiciones, que de acuerdo a la revolución copernicana realizada por Kant, yacen las características libres de experiencia del sujeto cognoscente. Por sus posturas principales ni la explicación metafísica, ni la explicación transcendental, del espacio, se encuentran relacionados con una geometría determinada. La obra de Kant permanece en frente de los cambios geométricos invariable y neutral.

Siendo la principal objeción contra la teoría geométrica en Kant, la de que la geometría no posee carácter sintético, sino por el contrario analítico, es preciso también contrarrestar esta postura, afirmando que toda geometría es una ciencia que trata del espacio, y por ende que tiene a la espaciosidad (o tridimensionalidad) como condición previa. La espaciosidad es la forma pura de la intuición exterior, esto lo muestra la exposición metafísica, ella no proviene de la experiencia, ni de los meros conceptos, de las definiciones, y por eso posee un carácter sintético a priori, por consiguiente se puede sostener que la geometría posee un

[73] Del alemán *Räumlichkeit*, que también puede significar tridimensionalidad.

conocimiento sintético a priori, en tanto esta sea vista desde su condición básica, la espaciosidad.

Al tener como objeto de estudio la geometría al espacio, el cual tiene como condición previa a la espaciosidad, la cual es la forma pura de la intuición del sentido externo, puede ser empíricamente valiosa, y prestarse como fundamento para muchas teorías de las ciencias naturales sobre objetos exteriores. Al fundamentar la estética transcendental solamente la espaciosidad, y no la representación de un espacio determinado, no puede señalar la preeminencia de la geometría euclidiana antes de la no euclidiana, ni tampoco puede explicar una determinada geometría matemática como fundamento de las teorías físicas. Entonces se debe distinguir entre tres diferentes niveles: "1) Die transzendentale Räumlichkeit, 2) den mathematische Raum und 3) den physikalischen Raum." (Höffe, 2004)[74]. Cada uno de los niveles depende del anterior sin ser derivable de los mismos.

De todo lo dicho se puede concluir que el carácter a priori de la intuición del espacio en general no da como consecuencia que los axiomas del espacio especiales de una geometría sean sintéticos y a priori. En un modo débil se podría legitimar a la geometría matemática como un conocimiento sintético y a priori, dado que su condición previa no es analítica, es decir su objeto de estudio entendido como la espaciosidad, es más bien sintético y a priori. Pero esta misma condición previa no posee el significado de una premisa dentro de una argumentación geométrica determinada, sino por el contrario es ella el fundamento transcendental de toda geometría facultativa. Además Kant nunca negó la posible existencia de geometrías congruentes, distintas de la geometría euclidiana, lo que no lo contradice con los desarrollos posteriores.

[74] "1) la espaciosidad transcendental, 2) el espacio matemático, y 3) el espacio físico." Traducción personal.

3.3. Aritmética

3.3.1. Tiempo como fundamento de la construcción matemática

El abandono definitivo que efectuó Brouwer del apriorismo del espacio como fundamento de la geometría, se ve superpuesto por la aceptación del a priori del tiempo como fundamento de la aritmética, y es donde se puede ver de forma directa la influencia más palpable de Kant en Brouwer: However weak the position of intuitionism seemed to be after this period of mathematical development, it has recovered by abandoning Kant's apriority of space but adhering the more resolutely to the apriority of time. (Brouwer, 1975, pág. 85)[75]

Brouwer acepta la intuición pura del tiempo, esta sería independiente de la intuición sensible, de cualquier tipo de percepción de símbolos, así como operaciones entre símbolos, en contra de la teoría formalista. El estudio se realiza sobre las construcciones no perceptivas, intuidas, las cuales son autoevidentes solamente en la introspección del sujeto matemático. Pero es pertinente acercarnos antes a la definición echa por Brouwer, este autor define a esta intuición como:

> …the basic intuition of mathematics (and of every intellectual activity) as the substratum, divested of all quality, of any perception of change, a unity of continuity and discreteness, a possibility of thinking together several entities, connected by a 'between', which is never exhausted by the insertion of new entities. (Brouwer, 1975, pág. 17)[76]

Esta intuición básica de la Matemática representa el principio básico en el quehacer matemático. Las construcciones intuitivas son universales y necesarias, sin el empleo de principios de la lógica. Es pues el tiempo donde se origina el quehacer matemático: "From

[75] Sin embargo débilmente la posición del intuicionismo parecía ser después este período de desarrollo matemático, se ha recobrado en el abandonando apriorismo de Kant del espacio pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo de tiempo. (*Intuitionism and formalism*- 1912) Traducción personal.

[76] "…la intuición básica de la Matemática (y de cada actividad intelectual) el sustrato, despojada de toda calidad, de cualquier percepción de cambio, una unidad de continuidad y discontinuidad, una posibilidad de pensar juntos varias entidades, conectadas por "entre", que nunca se agota por la inserción de nuevas entidades." (*On the foundations of mathematics* – 1907) Traducción personal.

this intuition of time, independent of experience, all the mathematical system including spaces with their geometries, have been built up, and subsequently some of these mathematical systems are chosen to catalogue the various phenomena of experience." (Brouwer, 1975, pág. 116)[77]

Como era de esperarse, y siguiendo a Kant, Brouwer otorga una preeminencia indiscutible al tiempo por encima del espacio, en realidad rechaza esta último en su teoría matemática, a la hora de ser el centro mismo de donde se construye la Matemática. Los datos que se adquieren son introspectivos. Aceptando las infinitudes potenciales, niegan las infinitudes reales, es decir que una totalidad infinita completa no se percibe ni se completa introspectivamente. Esto es simplemente poner al alcance, o limitarse, a la utilización de métodos finitos. Todos los cuales tienen como fundamento a la intuición pura, o intuición primigenia según Brouwer (*Urintuition*).

De esta manera es para Brouwer la intuición del tiempo a priori, y esto permite que la misma Matemática en su totalidad llegue a ser construida desde esta intuición. Para Brouwer la intuición del tiempo necesariamente aparece en el receptáculo matemático de la experiencia en cuanto virtud de la organización del intelecto humano. De esta manera se puede entender en la siguiente cita: "Proper to man is a faculty which accompanies all his interactions with nature, namely the faculty of taking a mathematical view of his life, of observing in the world repetitions of sequences of events, i.e. of causal systems in time." (Brouwer, 1975, pág. 53)[78] Se podría pensar que una experiencia fuera del marco temporal también es posible. Sin embargo el propio ser humano tiene la tendencia a tomar un punto de vista matemático de su propia vida, y a adaptar su propia experiencia a este receptáculo matemático. Por lo tanto el tiempo y no el espacio, es parte de este receptáculo matemático.

[77] "A partir de esta intuición del tiempo, independiente de la experiencia, todo el sistema matemático incluyendo los espacios con sus geometrías, se han construido, y posteriormente algunos de estos sistemas matemáticos son elegidos para catalogar los diversos fenómenos de la experiencia." (*The nature of geometry*-1909) Traducción personal.

[78] "Propio del hombre es una facultad la cual acompaña todas sus interacciones con la naturaleza, es decir, la facultad de tomar una visión matemática de su vida, de observar en el mundo, repeticiones de secuencia de eventos, es decir, de los sistemas causales en el tiempo." (*On the foundations of mathematics* – 1907)" Traducción personal.

En la orientación causal uno identifica en la imaginación ciertas series de fenómenos uno con el otro. Este sería entonces el origen de la percepción del mundo de objetos y el uso de medios. Aquí uno produce un fenómeno que será seguido por una determinada serie por el fenómeno deseado, que obviamente no podrá ser directamente producido. Estas secuencias causales solamente existen como correlato de la voluntad humana.

El primer elemento de esta atención es la percepción de un movimiento en el tiempo. El dividirse de un momento de la vida en dos cosas cualitativamente distintas, de las cuales la una se retira antes que la otra, y que sin embargo es aferrado por la memoria. La estructura temporal de la experiencia permite la distinción de las experiencias de cada una y de sí misma. Esta conciencia temporal es importantísima para la Matemática, como una forma de la intuición. La formación de esta conciencia, la del tiempo, para Brouwer se da en la primera fase del desarrollo de la conciencia del ser humano. Una segunda fase se da entonces en la atención causal, la que forma la red de secuencias causales. Finalmente se da la tercera fase, en esta el yo se encuentra en relación cooperativa con otros individuos.

Según Brouwer el primer acto del intuicionismo consiste en separar la Matemática de los fenómenos del lenguaje que son descritos por la lógica teórica. Esto dado a que la Matemática intuicionista es básicamente una actividad sin lenguaje de la mente. La cual halla su origen solamente en la percepción de un movimiento del tiempo, es decir de la misma separación de un momento vivido en:

> …two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, it passes into the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics. (Brouwer, 1975, pág. 510)[79]

Lo que se llama abstracción Matemática consiste en despojar la dualidad (*two-ity*) de su contenido objetual, se arriba entonces al substrato común de las dualidades (*two-ities*), la

[79] "…dos cosas distintas, una de las cuales cede el paso a la otra, pero es retenida por la memoria. Si la así originada se despoja de toda dualidad, queda la forma vacía del sustrato común todas las dualidades. Este sustrato común esta forma vacía, constituye la intuición básica de la Matemática." (*Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism* - 1952) Traducción personal.

cual forma la intuición formal de la Matemática. Entonces el ámbito de la división que un movimiento del tiempo envuelve termina siendo iterable, es decir que tiene la capacidad de repetirse, es decir una experiencia en sí misma puede llegar a ser percibida como un nuevo movimiento del tiempo, así que una dualidad llega a ser una trialidad, tetralidad, etc. (Esto es un tiempo intuitivo, distintivo del métrico).

Algunas veces Brouwer habla de un auto-desarrollo o auto-despliegue (*self-unfolging; Selbstentfaltung*) de esta intuición. Esta iteración o repetición de la división del pasado y futuro sería una instancia, posibilitando la estructura de los números naturales. Esto intenta justificar la teoría de que la Matemática es construida desde la intuición básica. Es así como se obtiene la secuencialidad de los números naturales, y por consiguiente la secuencialidad de los números ordinales[80]. Para poder determinar de la mejor manera posible la definición de los conceptos anteriores, se debe recurrir a un trabajo temprano de Brouwer, en el cual se hace hincapié en lo que en trabajos posteriores también se verá resaltado y que ya ha sido definido de cierto modo ya en el presente trabajo, esto es que las partes cualitativamente diferentes de la vida son reunidas y separadas: "by time as the fundamental phenomenon of the human intellect" (Brouwer, 1975, pág. 127)[81], pasando por medio de la abstracción desde su contenido emocional dentro, o hasta, su fenómeno fundamental del pensamiento matemático, este es, la intuición de la mera dos-unicidad, o dos-unidad (*two-oneness*)[82].

> This intuition of two-oneness, the basal intuition of mathematics, creates not only the numbers one and two, but also all finite ordinal numbers inasmuch as one of the elements of the two-oneness may be thought of as a new two-oneness, which process may be repeated indefinitely; this gives rise still further to the smallest infinite ordinal number ω (Brouwer, 1975, pág. 128)[83]

[80] Hay que recordar que los números ordinales simplemente son una generalización que expande la secuencia de los $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, son conjuntos inductivos, también entendido desde la Teoría de Conjuntos como un conjunto bien ordenado. Los $\mathbb{N}$ son empleados para caracterizar la extensión de un conjunto finito y para llegar a la posición de un elemento, dado en dicha secuencia finita.
[81] "…por medio del tiempo como fenómeno fundamental del intelecto humano." (*Intuitionism and formalism*-1912) Traducción personal.
[82] Se supone que "*two-oneness*" es equivalente, o al menos parecido al "*two-ity*", el primer concepto es expuesto por Brouwer en su trabajo en *Intuitionism and formalism* y el segundo en su trabajo en *Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism*.
[83]. "Esta intuición de dos-unicidad, la intuición basal de la Matemática, crea no sólo los números uno y dos, sino también todos los números ordinales finitos por cuanto uno de los elementos de los dos-unidad puede ser

De esta manera y finalmente (a esta intuición basal de la Matemática, en la que lo comunicado y lo separado, así como lo continuo y lo discreto se unen) surge de inmediato la intuición del continuo lineal, esto quiere decir del “entre” (“*between*”), el cual no se agota en la interposición de nuevas unidades y que por lo tanto nunca puede llegar a ser considerado como una mera colección de unidades. Se ve entonces que la intuición pura del tiempo empleada por Brouwer, proporciona lo discreto, como los números ordinales finitos, y el número infinito más pequeño ω, así como también lo continuo, que en posteriores trabajos será definido en términos de extensión de secuencias infinitamente continuas.

De esta manera se obtienen los números naturales, y el continuo, las geometrías, sean estas la euclidiana o la no euclidiana, en verdad de cualquier tipo, pueden ser introducido usando coordenadas[84]. Otras entidades matemáticas pueden llegar a ser construidas usando esencialmente el mismo proceso, desde las entidades matemáticas ya existentes. Todo conjunto matemático de unidades se puede llegar a desarrollar fuera de la intuición basal, o sea que esta intuición ha posibilitado la construcción inicial y que a partir de ahí, los objetos matemáticos subsiguientes pueden llegar a tener cierta independencia, o ser construidos independientemente de esta intuición básica.

> …and this can only be done by combining of finite number of times the two operations: "to create a finite ordinal number" and "to create the infinite ordinal number ω"; here it is to be understood that for the latter purpose any previously constructed set or any previously performed constructive operation may be taken as a unit. (Brouwer, 1975, pág. 128)[85]

---

pensado como una nueva dos-unicidad, este proceso se puede repetir indefinidamente; esto da lugar además al más pequeño número infinito ordinal ω.” (*Intuitionism and formalism*- 1912) Traducción personal.

[84] En un sistema de coordenadas se emplean números, para determinar la posición de puntos u objetos geométricos.

[85] “…y esto solamente se puede realizar por medio de la combinación de un numero finito de veces, las dos operaciones: <<para crear un numero ordinal finito>> y <<para crear el número infinito ordinal ω>>, aquí se entiende que para el ultimo propósito cualquier conjunto previamente construido o cualquier otra operación constructiva realizada previamente puede ser tomada como una unidad.” (*Intuitionism and formalism*- 1912) Traducción personal.

Entonces en el tiempo se da la intuición de la concepción de los números naturales. Es decir, que el ser humano percibe el número uno (1) y su significado con certeza inmediata, dado que posee una relación directa con los números naturales[86], como un proceso mental natural del ser humano, mediante el que, luego de un primer momento, y por la sucesión[87] del tiempo, se presenta un segundo momento, como repetición del mismo proceso, dando como resultado la construcción de un segundo número, a saber, el número 2, y así sucesivamente se puede representar los siguientes segmentos numéricos naturales. En esta explicación originaria esta la raíz misma, la base de la Matemática, según Brouwer y su respuesta -kantiana- para los fundamentos de la Matemática.

3.3.2. Números naturales como fundamentación de la aritmética

Los *N* como base de la generación de las familias de números

La Matemática intuicionista parte de la sucesión natural de los números; es decir de la noción de entidades abstractas, y en consecuencia de la sucesión de tales entidades. Aquí no hay necesidad de la creación de algún sistema deductivo para la comprensión de la aritmética, y la sucesión que le sirve de base. Es así que para los intuicionistas la axiomática de Peano, es decir las leyes fundamentales de los números naturales axiomatizadas, cinco axiomas, no realiza más que simplemente la formulación de resultados evidentes del proceso de engendramiento o producción de números naturales, aquella idea intuitiva de que estos números se obtienen partiendo de cero, para posteriormente añadir otro número, repitiendo este proceso las veces que se necesite.

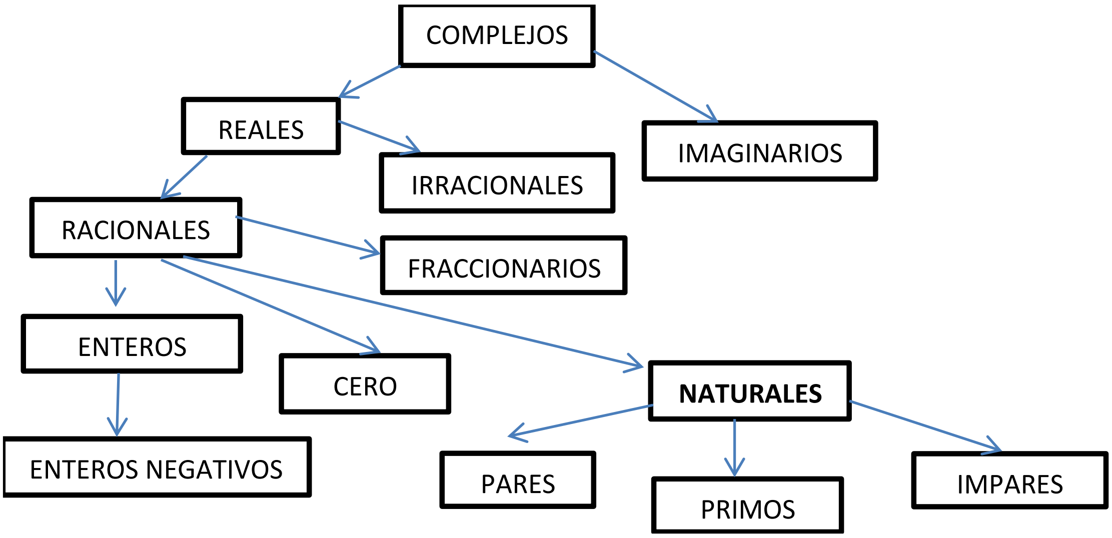
En la parte fundamental del intuicionismo se encuentran los números naturales, los cuales son construidos de forma inmediata en la mente matemática, toda verdad sobre esta misma clase de números se refiere desde la base intuitiva. Desde estos números se parte hacia construcciones posteriores y más complejas. Los objetos matemáticos se dan en la intuición, se construyen desde aquella. Esta construcción mental es lo más fundamental,

[86] Los números naturales son una construcción a-priori. Es la intuición lo que le permite, sin mediación con experiencia alguna, constituir los números naturales.
[87] La sucesión es la que permite la formulación de la categoría de tiempo. En los procesos del entendimiento, hay momentos diversos, no simultáneos, sino sucesivos; ese mismo tipo de diversidad, se aplica a los números

pues no puede ser explicada por medio de conceptos más simples. Entonces se tiene que la afirmación más fuerte del intuicionismo es que la Matemática es una actividad constructiva que solamente es posible en la mente humana. Es así que en la aritmética depende de la posibilidad de la construcción misma. El que la intuición preceda a cualquier estructura axiomática hace que la aritmética no encuentre justificación en un tal fundamento axiomático, esto porque la intuición fundamental de la aritmética es una intuición fundamental (propia de los procesos del entendimiento), aún más fundamental que cualquier construcción matemática.

El que se parta de los números naturales es algo muy importante, pues a partir de estos se puede desarrollar una teoría unificada de los números. Es decir que las teorías más sofisticadas de números pueden reducirse o construirse partiendo desde los números naturales. Este ejercicio constructivo es denominado aritmetización del análisis[88], esto es que a partir de una familia de números básica se pueden construir familias más complejas de números o, por el contrario, la demostración de que las familias más complejas de números se pueden reducir a la familia más básica, para finalmente poder considerar a todas las familias de números como una sola, la que parte desde una familia fundamental. Si bien el siguiente ejemplo no es en un sentido riguroso aritmetización del análisis, por la metodología y el interés de aquel método por los números irracionales, en la literatura moderna de clasificación de numéricos se da un orden y categorización de las diferentes familias de números, esto partiendo desde luego de los números naturales. A la par de la aritmetización del análisis, donde los números complejos se deducían a los números naturales, al ser explicados los números racionales en terminología de los números naturales, como los reales por medio de los racionales, y los complejos por medio de los reales, la clasificación de números presenta también esta tendencia creciente que parte desde los más fundamental, así se presenta en el siguiente ejemplo[89]:

[88] El análisis es el estudio de los números reales, complejos y sus derivaciones.
[89] La presente clasificación se toma de (Cevallos, 2009)



En otras clasificaciones únicamente los enteros se subdividen entre negativos y positivos, los enteros positivos son equivalentes a los naturales; además de que el cero es parte de los números naturales, y los pares, primos e impares, solamente son características o resultados de la clasificación dentro de los mismos naturales y no miembros tomados en cuenta dentro de la misma familia. Estas especificaciones son necesarias para poder dar más claridad a la pasada clasificación. A continuación se presenta una clasificación más clara de la familia de los números partiendo desde los Números Naturales *N*, los cuales surgen del proceso de contar.

$N = \{ 0,1,2,3,4,5,6,\ldots \}$

$Z = \{ \ldots -3,-2,-1,0,1,2,3 \ldots \}$

$Q = \{ x \mid x = p/q ,\ p \wedge q \ \varepsilon\ Z \}$ (se escriben como una fracción de dos enteros)

2=2/1 (Todo entero es racional)

3/7 (Todo número fraccionario ya está expresado como racional)

3,5=7/2 (Cualquier tipo de decimal, exacto y periódico, es racional)

$Q' = \{ \pi = 3{,}141592654\ldots;\ \sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots \}$ (*Q'*: conjunto complemento de *Q*; decimales no periódicos con un número infinito de dígitos que no se pueden expresar en forma de fracción.)

$R = \{ Q \cup Q' \}$

$C = \{ a + bi \mid a,b\ \varepsilon\ R,\ i = \sqrt{-1} \}$

(a: parte real; bi: parte imaginaria; √-1: unidad imaginaria)

$\{ 2-3i;\ 4+2i;\ \sqrt{2}+7/3i;\ -5-6\ \varepsilon\ C \}$

Esta expansión de los números se da desde los naturales *N*, cuando en estos se da la primera operación básica, la suma, así como después la multiplicación. Pero al añadir la substracción, en un primer momento, los números naturales *N* se expanden hacia los enteros *Z*, estos a su vez forman parte de los racionales *Q* (estos son cerrados con respecto a la suma, multiplicación, substracción y división, es decir el resultado es siempre un número racional *Q*) los cuales también incluyen a los fraccionarios y decimales exactos y periódicos (por medio de las conversiones). Después se dan los irracionales *Q'* como un complemento de los racionales *Q*, al no poder aquellos ser escritos como una fracción de dos enteros. El complemento total de racionales *Q* más irracionales Q' da como resultado los reales *R*. Y por último se dan los complejos *C* como una extensión de los reales *R* al poder ser representados los complejos *C* como una suma de un número real *C* y un número imaginario *b1* (el cual es una parte del complejo *C*, es decir que todo número complejo *C* tiene una parte imaginaria).

Todo este desarrollo de la gran familia de los números tiene como único fin el mostrar que todas las familias superiores de números se desarrollan y pueden ser definidos a partir de los números naturales. Entonces a partir de esto se puede centrar la atención por los números naturales desde los cuales, como ya se demostró, se desprenden las otras familias de números.

La suma como primer ejercicio matemático

Según Kant las leyes de los números (partiendo de los *N)* son sintéticas y a priori, nuestro conocimiento de los números tiene como base una conciencia del tiempo, como una forma pura de la intuición y a la vez en la conciencia de la mente, es decir de su propia capacidad para poder repetir el acto de contar, repetidas veces, una vez tras otra. Al llegar a conocer las leyes de los números bajo las cuales la mente puede adquirir una idea de su propia actividad interna se hace posible lo sintético y a priori, o al menos su conocimiento y determinación. Mediante esta visión sintética a priori es posible el conocimiento de los hechos particulares de los números, por ejemplo 7+5=12 (Kant, 2010, pág. 240); en esta proposición se dice que al añadir 7 unidades a 5 unidades producimos 12 unidades, describe de forma sintética y a priori la su respectiva construcción en el tiempo, es decir mediante la sucesión de unidades y su reunión (no se niega la posibilidad de otras aritméticas, solamente que tales posibles aritméticas no serían descripciones del tiempo perceptible). Las proposiciones de la aritmética son sintéticas porque son acerca de la estructura del tiempo, porque en este pueden ser construidas aquellas; de la misma manera son a priori porque el tiempo es la condición invariable de toda percepción que se da de los objetos materiales. Para algunos autores el ejemplo expuesto de 7+5=12, no llega a ser plausible cuando en otros hechos particulares como este pero referido a números muchos más grandes deben ser demostrados, por lo que aconsejan que sería mejor "…consider is the view that the basic axioms of number theory should be understood and justified according to Kant's philosophy." (Barker, 1964)[90].

La aritmética se basa en la intuición de contar, esto es que la existencia de los números se ve condicionada en cuanto se puede llegar a ellos contando, es decir que el ser las series numéricas se da cuando sus miembros son contados. Una consecuencia de esto es que no hay números infinitos, pues se necesitaría de un tiempo infinito, esto afirma la tesis del infinito potencial, rechazando a su vez el infinito actual o real. Esta postura fue representada primero por Aristóteles, luego por Kant, y finalmente por Brouwer. El mismo Brouwer toma como fundamento de la aritmética a la intuición pura del contar temporal.

El argumento de Cantor de que existen más *R* que *N*, es rechazado por Brouwer y su escuela, así como toda su teoría sobre los números transfinitos (ω, $\aleph_0$). Esto porque las reglas que se dan en la teoría de Cantor no se pueden aplicar para poder crear o construir números en un número finito de pasos, por el contrario se necesitaría un número infinito de pasos, para lo que se requeriría a su vez de un tiempo infinito. El intuicionismo pide que para cualquier afirmación matemática se deba poseer una prueba constructiva, para poder saber que dicha afirmación es cierta. Si tal afirmación matemática se refiere a un número con ciertas características, se debe poder construir tal número con una cantidad finita de pasos.

Otro punto de encuentro filosófico es el que parte desde la teoría del conocimiento de Kant y que Brouwer asume, las leyes de los números pueden ser ciertas solamente de las cosas

[90] "…considerar el punto de vista que los axiomas básicos de la teoría de los números debe ser entendido y justificado según la Filosofía kantiana." Traducción personal.

como la mente las llega a intuir, y no de como las cosas pueden ser en sí mismas, aspecto que queda desconocido. Esto tiene como consecuencia que los números no se pueden aplicar a las cosas como estas serían realmente en sí mismas. El sujeto es quien añade el concepto por medio de las categorías, y así capta el objeto. Esto es lo transcendental, a saber la cosa en si misma incognoscible, y la cosa cognoscible, por medio de lo que el sujeto puede colocar sobre esta, es decir en el objeto es visto por el sujeto de tal modo que coloca sobre él una perspectiva teórica. Por la manera de conocer del sujeto se conoce conocemos el fenómeno y no el noúmeno. Entonces transcendental se podría entender como aquello que el sujeto define del objeto a la vez, y por medio, del mismo acto que llega a conocer al objeto, y porque lo hace a priori (la unidad transcendental es la síntesis que hace posible el sujeto al tomar las características principales de algo dado; así como la apercepción es la conciencia de conocer algo, y de sí mismo).

Para retornar al tema del tiempo es preciso afirmar, de nuevo, que este es el que hace posible los juicios sintéticos a priori, dado que nuestras representaciones están contenidas en el sentido interno y en el tiempo, como forma a priori del primero. A su vez que el tiempo es representado completamente a priori en la mente, al estar libre de lo empírico, y por eso no poseería validez objetiva, si no se demostrara su uso necesario para los objetos de la experiencia. Es así que los juicios sintéticos a priori solamente son posibles cuando por medio de las condiciones formales de la intuición a priori, así como la síntesis de la imaginación y su unidad (esto dado en una apercepción transcendental), se refieren desde el sujeto a un conocimiento de la posibilidad de la experiencia en general.

En el ejemplo de 7+5=12, se sabe que en principio no es como se piensa una proposición analítica, que se deriva del concepto de suma, en este caso de 7 y 5, según el principio de contradicción; pero el concepto de suma no nos dice nada acerca del número que abarca en este caso a 7 y a 5, este concepto solamente se refiere a la unificación de números, en este caso de estos dos números, en un único número. El número 12 no está incluido en el concepto de suma. Es necesario entonces recurrir a la intuición por medio de cinco dedos o cinco puntos que serán añadidos como unidades al 7, entonces surge el 12. Es por esto que las proposiciones de la aritmética son sintéticas y a priori. Sintética porque se debe operar para poder llegar a saber que tal suma tiene como resultado tal cantidad; y es a priori por el concepto de suma. Para comprobarlo basta operar con cantidades mayores (pues en cantidades mayores como por ejemplo 89+37=X, ya no sería tan obvia la respuesta, y no se pensaría de entrada que es una proposición analítica. Al contrario ya no se necesitaría para esta operación los dedos de la mano, sino operar por medio de decenas y unidades para lograr una centena).

Así también se puede considerar el siguiente postulado matemático, Ley de monotonía de la suma: $a > b = a + c > b + c$, c es un número cualquiera. Al demostrar el postulado anterior el matemático realiza un ejercicio sintético, al experimentar la respuesta. Pues amplía el conocimiento al ser un juicio extensivo. La aritmética produce aquellos juicios, a la vez que la misma es obra del sujeto, esto se demuestra en la exposición kantiana de los juicios sintéticos a priori en relación a la estructura cognoscente del sujeto. Tomando a este como fundamento. Es decir que no es suficiente con poder demostrar la existencia de tales juicios si no se demuestra también la existencia de la capacidad cognoscitiva de sujetos que formulan tales juicios.

El sujeto solo conoce mediante juicios, para por medio de estos poder dar una ubicación a los objetos, manera mediata de conocer objetos en contraposición a la intuición empírica o sensible. De esta misma manera y también por medio de juicios se conoce en la aritmética, en la captación de la suma (por naturaleza y de forma histórica es la que primero se da en la comprensión matemática del mundo en el humano) y al realizarla el ser humano emite juicios, juicios universales que se relacionan con la categoría de totalidad. Los juicios sintéticos a priori en la aritmética están vinculados con la cantidad extensiva (la representación de las partes hace posible la representación del todo), es decir que en la aritmética esto plantea la representación de las unidades, como partes, que posibilitan la adquisición de la totalidad de sumandos, como representación del todo. Desde estos principios actúa la intuición (axiomas de la intuición), por medio de la intuición tomamos conciencia de que el contar se procede en el tiempo, es decir esta sucesión de contar se da en el tiempo. Esta sucesión (un modo del tiempo en Kant) es viable en la consecución de los números, uno tras otro; y en caso de la suma la no importancia del orden de los factores al momento de efectuarla, dado que el producto no sufre afección alguna. Al sumar obtenemos un resultado que se da gracias a la continuidad o secuencialidad que se hacen de las cifras o su respectiva reunión.

Al referirnos al ejemplo 7+5=12, y en relación a la tabla de categorías, podemos saber que esto es un juicio de carácter universal, que se relaciona con la primera división de las categorías, específicamente con la de cantidad, y dentro de esta con la de subdivisión de totalidad, porque la totalidad de las veces que se efectué la suma se obtendrá siempre 12. Esta respuesta vale como la reunión de las partes, partes que posibilitan el todo. Para entender mejor esto hay que remontarse a lo que Kant quiere decir con que todas las intuiciones son cantidades extensivas; todos los fenómenos contienen una intuición en el tiempo y el espacio, estos fenómenos a su vez son aprehendidos por la síntesis de lo múltiple, la cual produce una representación en un determinado espacio-tiempo. Esta conciencia de lo múltiple es el concepto de cantidad, y por medio de ella es posible representarse un objeto. Es así que todos los fenómenos son cantidades extensivas, pues estos fenómenos solamente pueden ser conocidos mediante la síntesis sucesiva de una parte a otra en la aprehensión; y de esta manera se define también a la cantidad extensiva como aquella en donde la representación de las partes hace posible la representación de un todo. Es así que en el tiempo y su tránsito en sucesión de un momento hacia otro produce tal cantidad de tiempo. Lo fenómenos son intuidos como agregados en el tiempo, pues varias partes son dadas con anterioridad, esto se da de extensivamente, esto recuerda a la tesis de Brouwer sobre la generación numérica.

Se puede afirmar que magnitud es poseer conciencia de la diversidad homogénea. El fenómeno cae bajo la conciencia que sea capaz de sintetizar lo diverso, y a la vez poder hacer la unidad sintética de tal diversidad. Esta conciencia de lo diverso sabe que al representar las partes, representa el todo, esto a priori. Esto es palpable en la representación del tiempo, al ser éste un todo compuesto por diversos momentos, éste al igual que el espacio, es la posibilidad de la representación fenoménica por medio de la intuición, debe poseer por medio de la intuición también cantidad extensiva. La intuición capta las partes y mediante ellas el todo, o sea que actúa como una y diversa.

Para poder generar experiencia se necesita una conexión necesaria de las percepciones, pero solo si los objetos se combinan en el tiempo es posible tal conexión. Uno de los modos del tiempo según Kant, el de sucesión (los otros dos son el de permanencia y el de simultaneidad) determina que el entendimiento puede saber que todas los cambios suceden por medio de la relación de causa y efecto. Esta relación sirve para que la experiencia sea posible. Esta sucesión temporal se desempeña como fundamento de los cambios de los fenómenos, y es percibida en el sujeto por medio de la imaginación, la cual se encarga de unir las percepciones en sucesión dadas en el tiempo. La imaginación establece que algo va antes y algo después, es decir la sucesión de eventos. Ésta sucesión en la aritmética se presenta cuando se aprende a sumar, parte desde lo empírico cuando es nuestra vista la encargada de captar objetos que han de ser añadidos unos con otros; a partir de la intuición se llega a la captación de este ejercicio en nuestra mente, que se encarga de procesar dicha información para poderla guardar y utilizar posteriormente por medio de la imaginación y con la ayuda del entendimiento, y ya sin objetos perceptibles. Y aquí puede aparecer de nuevo la experiencia en la cual se puede contrastar el resultado deseado. Este contraste se hace desde las partes hacia el todo, de forma sucesiva.

El reunir 7 y 5 en el número 12 se da gracias a la construcción, es decir por medio de un ejercicio sintético. La construcción entonces representa el conteo en una representación a priori, y presenta por medio de ello el reunir o el conjuntar números. Es así que todo número es de naturaleza intuitiva y su construcción se da como una sucesión en el tiempo. Por medio de la intuición se puede aprecia la sucesión del contar producida en el tiempo, de que una cosa va antes y otra después, siguiendo a la anterior, que para llegar a 12 desde 7 tenemos que pasar por 8, 9, 10, 11. Así si sumamos, la segunda cifra o unidad será la continuidad de la primera cifra o unidad, esto como producto de la consecución que experimenta la primera.

3.3.3. Construcción en contraposición al lenguaje

El programa intuicionista es un programa simple, tiene por fin efectuar construcciones matemáticas por medio de la intuición pura, para posteriormente poder comunicar de la manera más sencilla a otros, para que estos puedan repetirlas sin mayor esfuerzo. Esta creación de objetos matemáticos es la mismísima actividad y quehacer último de los intuicionistas, esta actividad creativa es dar existencia matemática, pues solo la construcción de objetos matemáticos legitima su existencia. Construir es dar el ser a una entidad matemática. Esta es la principal preocupación del intuicionista y no, como si lo es en el lógico y en formalista, justificar estas construcciones, estas son legítimas en sí mismas.

Esta construcción de entidades se da en la pura intuición. Se origina desde la noción de una entidad abstracta, posteriormente de la misma sucesión de tales entidades; esto es la sucesión natural de los números. Se desprecia el recurrir a la formulación de sistemas deductivos de la aritmética, pues estos no confieren una evidencia inmediata, además de formar resultados evidentes del proceso al engendrar los números naturales. Esta formulación solo es un reflejo lingüístico.

Como ya se dijo las proposiciones de la Matemática para los intuicionistas son proposiciones que no pertenecen a la lógica ni pueden ser reguladas por medio de ella. Las proposiciones para los intuicionistas proceden desde la construcción de las mismas y luego de su descripción, es decir sus proposiciones son sintéticas. Estas intuiciones solo son posibles en la mente del sujeto matemático, en una introspección libre de la percepción sensible. Es decir a priori. Esta construcción es evidente en si misma además de no ser una percepción externa. Esta teoría matemática acerca de las construcciones intuitivas, tienen como precursor a Kant. Las construcciones matemáticas son experimentadas intersubjetivamente y su evidencia inmediata es intrínseca.

Para Brouwer el ideal de la Matemática pura representa una práctica en soledad: "…pure mathematics, practiced in solitude and without using linguistics signs…" (Brouwer, 1975, pág. 443)[91]. Las construcciones matemáticas carecen de lenguaje. Y este leguaje derivado, solamente es introducido para poder comunicar las construcciones hechas por los mismos matemáticos, entre ellos, además que este tipo de comunicación es imperfecta. Este lenguaje, y todo leguaje según Brouwer, distorsiona todo lo que quiere describir, además de no poder nunca en el ámbito matemático describir exactamente lo que el individuo matemático realiza en sus construcciones mentales[92]. Entonces Brouwer considera que el lenguaje es un medio para comunicar los pensamientos de una persona a otra, aunque de forma limitada.

[91] "…matemática pura, practicada en soledad y sin uso de signos lingüísticos." (*Volition, Knowledge, language*. – 1933) Traducción personal.
[92] Aquí, y en cierto sentido, se puede recordar la frase de Bertrand Russell sobre la Matemática: La Matemática podría definirse como aquello en lo que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que decimos es verdad.

Es así que se debe distinguir entre dos tipos de actividades bastante divergentes entre sí. La primera guarda relación a la construcción de la Matemática; esta construcción es un ejercicio de lo que Kant llamo: las facultades activas de la mente, de la misma manera Brouwer cataloga a este ejercicio como una actividad. La segunda, y totalmente opuesta a la primera, la actividad lingüística. Por actividad lingüística se debe entender a las proposiciones de los resultados de las construcciones así como de las misma aplicaciones a estas mismas proposiciones por medio de principios lógicos. La marcada diferencia entre estas dos actividades lleva a preguntar si la actividad lógica y lingüística es fiel a la construcción, esto es si la actividad de representar por medios lógicos y lingüísticos no sobrepasa la propia actividad de la construcción matemática. Es bastante común, más en Filosofía que en la Matemática, que el lenguaje desborde la propia actividad que intenta describir. A pesar de que se pensaría que en el ámbito matemático la injerencia del lenguaje, lógico y lingüístico, es nulo, Brouwer por el contrario advierte que esta amenaza no solo se encuentra en la Filosofía sino también, y en gran modo, en la Matemática. Es así que todo matemático que usa al principio del tercero excluido, p v ~p (*tertium non datur*)[93], aplicándolo al razonamiento de sistemas infinitos, aplicación hecha a objetos matemáticos, es cuando este lenguaje lógico y lingüístico termina por modificar la verdadera realidad que presenta la Matemática. La razón principal de porqué Brouwer rechaza este principio lógico, es que este mismo principio solamente puede ser aplicado a argumentos formulados en el lenguaje.

Esto se origina, sobre todo como critica dirigida a la Escuela formalista, en la confianza que se tiene en el lenguaje, incluso para su injerencia en la Matemática , pero para Brouwer esto no era nada pertinente y es más consideraba que por lo tanto: "Es gibt also auch für die Mathematik keine sichere Sprache" (Brouwer, 1975, pág. 421)[94]. En la antigüedad, según Brouwer, el ser humano poseía un lenguaje perfecto, lenguaje que hacía referencia solamente a grupos finitos de entes, los cuales yacían en el espacio y el tiempo, separados en substancias y unidades. En donde también el lenguaje de las consideraciones matemáticas era de grupos finitos. Aquí se hace referencia al cosmos finito y bien jerarquizado que poseían los griegos, en donde la concepción de lo infinito fue excluida.

[93] El encargado posteriormente de formular y desarrollar lo que se ha dado en llamar, a contra corriente del fundador del intuicionismo, Lógica Intuicionista fue el disimulo más destacado de Brouwer, el también matemático holandés Arend Heyting, ver: "*Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*"; "*Intuitionism. An introduction*".

[94] "para la Matemática pura no hay un lenguaje seguro." Traducción personal.

Las leyes con las cuales se podían pasar de afirmaciones correctas a otras del mismo tipo eran: "Für diese Sprache bestehen gewisse Formen des Überganges von zutreffenden (d. h. tatsächliche mathematische Betrachtungen andeutenden) Aussagen auf andere zutreffende Aussagen, welche aus Gesetze der Identität, des Widerspruchs, des ausgeschlossenen Dritten und des Syllogismus berzeichnet und unter dem Namen logischer Prinzipien zusammengefaβt wurden." (Brouwer, 1975, pág. 422)[95]

Todo esto en un lenguaje o sistema finito analizado por medio de un sistema de reglas de inferencia, y no un cuerpo axiomático. Estos principios lógicos eran correctos al razonar sobre sistemas finitos (o al hablar del todo y la parte). Esto llevo a que se crea en ellos, sobre todo en el principio del tercero excluido, entendido como una inferencia hecha a la mejor hipótesis posible, en su forma general, presume que un hecho acontece, solamente sobre la imposibilidad para encontrar otra explicación alternativa, para la producción de otro hecho, que le seguiría en la serie temporal. Además de que se enfatiza en las pruebas más que en la verdad, para conjuntos infinitos, en donde este principio falla, al querer aplicar a una proposición para la cual no existe demostración, es decir ni su verdad ni su falsedad, lo contrario se da en conjuntos finitos en donde siempre es posible una verificación.

El mismo ser humano, ha logrado hacerse con el control de los mecanismos del mundo que es percibido, así como también de los objetos observables, cuando son entendidos como eventos y hechos. Tratando la sistematización de estos objetos y mecanismos en el mundo espacio temporal (*Raumzeitwelt*) como parte de un sistema finito de objetos, cuyos miembros se encuentran en relación finita. Pero como ya se explicó, para Brouwer la Matemática correcta es un conjunto de construcciones mentales sin lenguaje realizadas preferentemente en soledad. Al ocuparse solamente con tales construcciones, la pregunta de si una ley lógica particular puede ser aplicada o no, no puede ser planteada. Por esto Brouwer promulga para la Matemática intuicionista la supresión, casi para la totalidad de casos, del principio del tercero excluido para todo conjunto finito. Esto va de la mano con su concepción del lenguaje como una actividad constructiva sin la injerencia del lenguaje.

[95] "Para este lenguaje existen determinadas formas de transición de enunciados acertados (es decir, consideraciones matemáticas reales aludidas) hacia otros enunciados acertados, los cuales describen desde las leyes de identidad, de contradicción, de tercero excluido, y del silogismo; y que son reunidos bajo el nombre de principios lógicos." (*Mathematik, Wissenschaft und Sprache* – 1929) Traducción personal.

Pero dicho esto, también se debe aclara que en el punto de vista de Brouwer se da una correlación entre la construcción mental de las estructuras matemáticas apropiadas y de las estructuras lingüísticas determinadas, es decir las estructuras lingüísticas que se utilizan para describir las construcciones mentales para el beneficio, y el entendimiento, para los otros matemáticos. Entonces la cuestión central en esto sería, la pregunta por la validez de una ley lógica. Se supone que se desarrolla una estructura lingüística particular, usando claro esta una ley lógica, entonces se debe plantear la cuestión de si será la estructura resultante correspondiente a una construcción matemática genuina. Brouwe responde que habrá correspondencia para algunas leyes lógicas pero no para otras. En particular el principio de tercero excluido, para definiciones infinitas, es rechazado, así como *reductio ad absurdum* y *la doble negación*.

En el ámbito de la Matemática se debe entender este rechazo dado el siguiente ejemplo, el cual intentara ilustrar de mejor manera la postura de Brouwer con relación a la aplicación del principio de tercero excluido[96] a entidades infinitas. Antes se debe entender que la lógica intuicionista, no admite un tercer valor de verdad, por el contrario solamente una tercera categoría de proposiciones, aparte de la verdadera y falsa, esta sería aquellas proposiciones de las cuales no tiene se puede decir que sean verdaderas o falsas, solamente indecibles. Es así que no se puede saber la millonésima cifra decimal π, este enunciado es tan carente de significado, así como su negación. También se puede preguntar, si la secuencia 36912 aparece o no aparece en la expansión decimal de π. No se puede afirmar ni negar tal hecho, no existe ni una prueba, ni una refutación. No se puede aplicar el principio de tercero excluido, pues la Matemática necesita de construcciones mentales, para saber si aquella proposición es verdadera o no, se necesita de una demostración de la misma. No basta solamente con definir un número n, como posición donde se da la proposición P (lo cual sería una afirmación platónica, de descubrimiento). Simplemente no hay una construcción que nos indique n, como una afirmación de P.

En sentido estricto lo que hace Brouwer es separar el lenguaje matemático, que no significa construcción matemática en sí mismo, de primer orden, de un lenguaje derribado o complementario, de segundo orden. Según Brouwer el ser humano trata por medio de

[96] Entendido al afirmar que una proposición es verdadera o falsa, sin una tercera opción. Hay que afirmar que este principio habla de valores de verdad, no de dualidades físicas, como blanco o negro.

símbolos y sonidos, de causar o comunicar razonamientos de orden matemático y construcciones, a otros seres humanos. Es así que nace de esto el lenguaje matemático, en especial el lenguaje del razonamiento lógico, en el cual: "one restricts oneself to relations of whole and part" (Brouwer, 1975, pág. 73)[97]. Además de que en el razonamiento lógico no se encuentra una relación muy importante, la cual forma las series de los números naturales: "The successor relation, which is essential in mathematics proper, does not yet occur in the mathematics of logical reasoning." (Brouwer, 1975, pág. 73)[98]

La lógica se ve reducida a una disciplina que solamente puede ser apta para para clasificaciones, o de orden taxonómico, pero por el contrario incapaz de poder expresar el razonamiento matemático. Interesante es que también la Escuela formalista, reconoce esta distinción introducida por Brouwer, entre el lenguaje matemático, y el lenguaje de segundo orden, llamada desde entonces por aquellos como metamatemática.

Entonces se puede afirmar, estableciendo la relación de Kant a Brouwer, que la Matemática presupone de tal intuición. La cual no es igual a la percepción sensible, pues la intuición es la forma invariante de la percepción sensible. Por esto tampoco es igual a las conexiones lógicas entre conceptos. Del mismo modo que caminar no depende en absoluto del lenguaje, las construcciones intuitivas (actividad de la Matemática), no tiene lenguaje. Los principios que rigen la lógica clásica son utilizados para la descripción, y no para la actividad misma de construcción, propia de la Matemática. Así la Matemática es independiente de la lógica y el lenguaje.

[97] "…solamente nos restringimos a hablar del todo y la parte."
[98] "La relación de sucesión, la cual es esencial en la propia matemática, no ocurre sin embargo en las matemáticas del razonamiento lógico" (*On the foundations of mathematics* – 1907) Traducción personal.

3.4. Consecuencias

El problema del infinito

Como ya se ha afirmado, los fundamentos de la Matemática para Kant son las formas de la intuición pura (*die reinen Anschauungsformen*), del espacio y el tiempo. Estas formas le sirven al ser humano para organizar la multiplicidad de los fenómenos en el mundo. Aquí el intelecto proporciona los conceptos matemáticos, como por ejemplo el concepto de número, el cual a través de la síntesis, composición, de lo diverso hace la síntesis del conocimiento a priori.

La síntesis de lo múltiple llega a ser concreta, pero entonces se podría preguntar si esta pluralidad, como conjunto, puede llegar a ser pensada como infinitamente actual. En el problema del infinito (*Unendlichkeit*) en la Matemática Kant diferencia, como ya lo había hecho Aristóteles, entre infinito potencial (*potentielle*) e infinito actual (*aktuele*). Kant afirma, pero a diferencia de Aristóteles, que el infinito actual (*aktuele Unendlichkeit*) no es pensable. Según Kant este es una idea de la razón, que en sí misma está libre de contradicción (*widerpruchsfrei*), pero que a su vez no corresponde a la experiencia empírica, porque su realización no puede ser ni observada, ni construida. La respuesta es negativa, dado que ni en las formas de la intuición pura ni en la pluralidad de los fenómenos puede estar presente algo infinitamente actual. Solamente en un proceso puede ser encontrado, o construido, el infinito potencial, las partes son contenidas en una totalidad dada como agregados, pero no como la totalidad de la secuencia de las partes, como sucesión infinita, o conjunto infinito. También en la división de una totalidad espacial en la intuición la cual es infinitamente divisible, este proceso de división de las partes hacia el infinito esa claramente determinado, pero esto no quiere decir que esta totalidad está compuesta de muchas partes infinitamente.

Se puede realizar por ejemplo el número 7, y esta misma realización puede ser percibida con los sentidos. Incluso se puede realizar el número 10^{100} (téngase en cuenta que el número aproximado de átomos en el universo es de 10^{80}), aunque no se puedan representar delante una cantidad tan grande de lo que se pueda percibir sensitivamente. Pero el infinito actual seguramente no se lo puede ni percibir ni construir.

Para Brouwer, en el mismo sentido que Kant, sí existe una Matemática del infinito potencial, la cual se da para poder evitar toda noción vacía de carácter perceptivo que se da al tratar de representarse totalidades infinitas actuales, que poseen carácter preexistente. Obviamente en los conjuntos finitos Brouwer no encuentra problema, pero en los conjuntos infinitos se da la necesidad de dividirlos, entre conjuntos potenciales infinitos y conjuntos infinitos (o cantidad infinita- *unendliche Unmengen*), es decir que no son pensables. Por ende el intuicionismo acepta solamente los conjuntos infinitos potenciales, que se dan en una secuencia justificada. El intuicionismo consideró a estos conjuntos como infinitamente contables, aunque no posean una realidad concreta, en cambio conjuntos incontables son impensables. El intuicionismo identifica a estos conjuntos infinitos potenciales como elementos del pensamiento, pues estos poseen la característica de ser contables. La imposibilidad de conjuntos infinitos numerables, el equivalente a infinito actual en Kant, es compartido por las diferentes escuelas constructivistas en la Matemática con la máxima de que la existencia de objetos matemáticos solamente llega a estar relacionado de una forma verdadera con su constructibilidad. Aquí se afirma el finitismo moderado, contrapuesto a la noción de infinitos reales, y con esto también se afirma la noción de sucesiones potencialmente infinitas, siempre incompletas.

Matemática pura y aplicada

La concepción de la naturaleza Matemática que se presenta en la teoría matemática de Kant nos permite también poder establecer las diferencias y relaciones que se entablan entre la Matemática pura y la aplicada. Como ya se ha dicho los principios o los juicios que son propios de la Matemática pura son los juicios sintéticos a priori. Ellos son objetivamente válidos. Los juicios de la Matemática aplicada son por el contrario, o juicios sintéticos a posteriori (cuando los mismos tienen contenido empírico) o juicios sintéticos a priori (cuando a los mismos les concierne las formas puras: espacio y tiempo)

La Matemática pura trata sobre el espacio y el tiempo independiente de cualquier condición empírica. La Matemática aplicada está relacionada con los con los estados empíricos los cuales se encuentran en el espacio y el tiempo. Pero entonces se debe poder determinar el porqué del poder descriptivo de las leyes de la Matemática pura son adecuados para la descripción de la realidad empírica. A esta cuestión Kant responde:

> Wenn aber diese Bild oder vielmehr diese formale Anschauung die wesentliche Eigenschaft unserer Sinnlichkeit ist, vermittelst deren uns allein Gegenstände gegeben warden, diese Sinnlichkeit aber nicht Dinge an sich selbst, sondern nur ihre Erscheinungen vorstellt, so ist ganz leicht zu begreifen und zugleich unwidersprechlich bewiesen: daβ alle äuβeren Gegenstände unserer Sinnenwelt notwendig mmit den Sätzen der Geometrie nach aller Pünktlichkeit übereinstimmen müssen, weil die Sinnlichkeit durch ihre Form äuβerer Aschauung (den Raum), womit sich der Geometer beschäftigt, jene Gegenstände als bloβe Erscheinungen selbst allererst möglich macht. (Kant, 1976, pág. 40)[99]

Esta última cita muestra el alcance de la aplicación que solamente y explícitamente está relacionado con los fenómenos de las cosas (*Dinge*). Esta es una consiguiente característica de la teoría del conocimiento crítica de Kant que solamente trata de representaciones y fenómenos (*Vorstellung und Erscheinungen*) y no se llega hasta la cosa en sí, nunca hasta la realidad (*Wirklichkeit*). “Ganz anders würde es sein, wenn die Sinne die Objekte vorstellen müβten, wie sie an sich selbst sind.” (Kant, 1976, pág. 40)[100]. La forma de la intuición sensible se encuentra en nosotros a priori, y esta misma es la que contiene el porqué de la posibilidad de los fenómenos externos, según su forma, la concordancia debe darse de un modo necesario y de manera precisa.

Las proposiciones mismas del matemático, no se obtienen por medio de conceptos inventados, sino por el contrario, por medio de los fundamentos subjetivos mismos de todo fenómeno externo. La Matemática aplicada, o de una manera equivalente las ciencias naturales a priori, son esencialmente la extensión o aplicación de la Matemática pura a la

[99] “…esta intuición formal, es la propiedad esencial de nuestra sensibilidad, no se representa cosas en sí mismas, sino solamente sus fenómenos, es muy fácil comprender e igualmente probar de un modo irrefutable, que todo objeto exterior de nuestro mundo de los sentidos debe concordar necesariamente, con toda exactitud, con las proposiciones de la geometría, porque la sensibilidad, por su forma de intuición externa (el espacio), de la cual se ocupa el geómetra, hace, ante todo, ella misma, posibles aquellos objetos como puros fenómenos.” Traducción personal.

[100] “Una cosa completamente distinta sería si los sentidos hubieran de representarse los objetos tales y como son en sí mismos.” Traducción personal.

materia. En este sentido se puede entender que la ciencia se puede considerar como tal, en cuanto y en tanto se deja aplicar en ella misma el método matemático, característica necesaria de aquella.

En Brouwer, y en general en la corriente intuicionista, se aborda principalmente la Matemática pura, todo lo visto anteriormente sobre la teoría intuicionista es considerado Matemática pura, y tan solo como un subproducto, a lo más, aparece la Matemática aplicada, tendencia parecida y compartida por las otras dos escuelas, formalismo y logicismo. Características principales en estas escuelas son las de considerar a la Matemática pura como fundamento de la aplicada; y considerar a esta misma Matemática aplicada, a diferencia de la Matemática pura, como una Matemática impura, al ser empírica así como falsificable. Dado que tampoco sus teoremas representan construcciones.

CONCLUSIONES

Las preguntas que han guiado el presente trabajo y que en las líneas venideras serán respondidas son: ¿La influencia kantiana en el intuicionismo matemático consiste en la utilización de categorías kantianas? De ser afirmativa la respuesta: ¿cuáles son estas categorías?

Como ya se fue divisando en el transcurso de la disertación, la respuesta es afirmativa, lo que queda es establecer y diferenciar la medida de la influencia o rechazo, de estas categorías o conceptos kantianos, que no se deben confundir con las categorías lógicas kantianas, donde reposa la teoría matemática de Brouwer: el espacio y el tiempo, lo que responde la segunda pregunta.

El tiempo, como fundamento de la aritmética, que se presenta de forma directa, con una influencia evidente y clara. Está íntimamente relacionado con la construcción de conceptos matemáticos (en la aritmética), construcción que presenta de forma distante, es decir, que si bien Kant define tal concepto de construcción, en Brouwer no se presenta suficientemente claro ni definido, y por ende la relación entre las dos definiciones se hace un poco turbia, en contraste con el primer concepto.

El espacio, como fundamento de la geometría, aquí la discrepancia entre los dos autores estudiados es grande, debido a que el paradigma euclidiano de ciencia, especialmente el de la axiomatización de la geometría en relación al estudio del espacio perceptivo, aún persiste en Kant, pero en Brouwer dicho paradigma ya había sido sustituido, sobre todo desde la física moderna. Es decir, el concepto kantiano de espacio es rechazado por Brouwer.

La relación de cercanía o distanciamiento entre los mencionados conceptos kantianos y el pensamiento de Brouwer, se sintetiza a continuación.

Espacio: Para Kant el espacio hace posible las proposiciones sintéticas a priori y por ende la geometría euclidiana, estos juicios o proposiciones son informes de construcciones evidentes en sí mismos por medio del mismo espacio intuido. Pero Brouwer rechaza este carácter sintético a priori de la geometría euclidiana, es decir, su carácter de necesidad y universalidad, puesto que implicarían rechazar cualquier otro tipo de geometría. Esta preeminencia de la geometría euclidiana se vio socavada por el advenimiento de las geometrías no-euclidianas. Es así que, según Brouwer, el desarrollo de las geometrías no-euclidianas consistentes, así como su aplicación al mundo físico termina por derrumbar la teoría kantiana del espacio geométrico. Brouwer empieza por determinar la incompatibilidad de los dos tipos de geometrías, incluso contraponiéndose la una a la otra, e impidiendo que se pueda considerar que la geometría no euclidiana pudiese contener a la geometría euclidiana.

Brouwer asienta su crítica sobre todo en la naturaleza de la geometría y su relación con la ciencia experimental, por ejemplo, la utilización de la geometría de Riemann en la teoría de la relatividad. Su punto de vista aquí es netamente práctico. Pero, como ya se mencionó, Kant diferencia claramente entre la construcción de un objeto y el postulado de su existencia, por ejemplo, no se puede construir una esfera de cinco dimensiones, sin embargo se puede postular su existencia. Kant no negó explícitamente que fuese posible una geometría consistente no euclidiana.

Tiempo como fundamento de la construcción matemática: Kant define al tiempo como una de las dos intuiciones puras de la sensibilidad, llamadas también formas puras, que se encuentran a priori en la mente. Como se recordará, se llega a tales formas puras abstrayendo todo contenido empírico. El tiempo, al ser la condición formal de todos los fenómenos, sean estos externos o internos, es preeminente respecto del espacio, al ser el tiempo la forma del sentido interno. Esta preeminencia interna del tiempo con respecto a la intuición sensible la reconoce Brouwer, y también como la intuición básica de la Matemática, así como de toda actividad intelectual, pues es el sustrato de cualquier percepción de cambio.

La aprioridad del tiempo que Kant postula, y que Brouwer acepta, el cual finalmente es un resultado cosmológico, termina por ser de vital importancia para la aritmética, esto dado que el concepto de número natural, y por ende la operación de contar, es un proceso constante, es decir es un proceso que determina o contiene la sucesividad, la sucesión de momentos disimiles en la vida, los cuales son reunidos en una conciencia, que se da por medio del transcurso, inagotable, del tiempo.

Hay que tener siempre en cuenta la estructura piramidal con la cual se construye la Matemática, con su base hecha de los números naturales, específicamente construidos a partir de la secuencialidad de los mismos, lo cual se da de forma natural en la mente, o el espíritu, del ser humano. De ahí que todo concepto matemático resulta ser una creación del sujeto. Los objetos matemáticos son esencialmente determinados por medio del pensamiento humano. Su existencia está asegurada en la medida de que se la pueda conocer y determinar por medio del pensamiento. Esta posibilidad del conocimiento solamente se nos puede manifestar por medio del mismo conocer. Así, la creencia en la existencia que no es respaldada por medio de conceptos debe ser irremediablemente rechazado, como un medio de demostración matemática.

Brouwer toma como base a los números naturales, los que encuentran su origen en la mente del matemático, en una construcción que hace él mismo de aquellos, por medio de la evidencia intuitiva de la secuencialidad del tiempo. Esta construcción mental es lo más fundamental en la construcción matemática, es una intuición fundamental. La secuencialidad temporal numérica de los números naturales, que parte desde la perspectiva interna del sujeto, hace que en la base de la Matemática se encuentre la aritmética y no otra parte de la Matemática. A esta misma intuición no se le puede anteponer ningún concepto más simple, sencillo o fundamental; por ende lo axiomático viene en un segundo momento.

Para Kant, así como parta Brouwer, las leyes de los números son sintéticas y a priori, nuestro conocimiento de los números tiene como base una conciencia del tiempo, como una forma pura de la intuición y a la vez en la autoconciencia, es decir, de la propia capacidad de la mente para poder repetir el acto de contar, una vez tras otra. Al llegar a conocer las leyes de los números, bajo las cuales la mente puede adquirir una idea de su propia actividad interna, se hace posible lo sintético y a priori, o al menos su conocimiento y determinación. Mediante esta visión sintética a priori es posible el conocimiento de los hechos particulares de los números, por ejemplo 7+5=12. La aritmética se basa en la intuición de contar, esto es que la existencia de los números se ve condicionada en cuanto se puede llegar a ellos contando, es decir, que el ser de las series numéricas se da cuando sus miembros son contados. Una consecuencia de esto es que no hay números infinitos, pues se necesitaría de un tiempo infinito para contarlos, en esto se basa la tesis del infinito potencial, que rechaza a su vez la posibilidad del infinito actual o real.

La intuición pura del tiempo es independiente de la intuición sensible, de cualquier tipo de percepción de símbolos, así como de operaciones entre símbolos, en contra de la teoría formalista. El estudio se realiza sobre las construcciones no perceptivas, intuidas, las cuales son autoevidentes solamente en la introspección del sujeto matemático. Las construcciones intuitivas son universales y necesarias, sin el empleo de los principios de la lógica. Es, pues, el tiempo donde se origina el quehacer matemático.

Brouwer completa y hace más explícito el rol del tiempo en la construcción de la Matemática, añadiendo la esencialidad de los números naturales y por ende de la aritmética. El que se parta de los números naturales es algo muy importante, pues a partir de estos se puede desarrollar una teoría unificada de los números. Es decir, que las teorías más sofisticadas de números pueden reducirse o construirse partiendo desde los números naturales.

El tiempo y la construcción matemática en el mismo es el puente que se ha tendido entre estos dos pensadores, con un más de un siglo de diferencia entre cada uno, es por lo que se recuerda y asocia a los mismos, en la ardua lucha dada y aún viva de lo que se ha dado en llamar fundamentos de la Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Barker, S. (1964). *Philosophy of Mathematics.* Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc. .

Bedürftig, y. M. (2012). *Philosophie der Mathematik.* Berlin: De Gruyter.

Brouwer, L. E. (1975). *Collected Works 1. Philosophy and Foundations of Mathematics.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Cevallos, J. S. (2009). *Álgebra.* Quito: Departamento de Ciencias Exactas, ESPE.

Höffe, O. (2004). *Immanuel Kant.* München: C. H. Beck.

Kant, I. (1976). *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* . Hamburg: Felix Meiner Verlag .

Kant, I. (2010). *Kritik der reinen Vernunft.* Stuttgart: Reclam.

Körner, S. (1976). *¿Qué es fillosofía?* Barcelona: Editorial Ariel.

Körner, S. (1981). *Kant.* Madrid: Alianza Editorial.

Körner, S. (1986). *The Philosophy of Mathematics. An introductory Essay.* New York: Dover Publications, Inc.