

PARA TÍTULOS PROFESIONALES DE LICENCIATURA (TERCER NIVEL)

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

DECLARACIÓN y AUTORIZACIÓN

Yo, **DANIEL SANTIAGO JOCKWICH MARTÍNEZ** con Cédula de Identidad No. **172454500-7**, autor del trabajo de graduación intitulado: **"EL INFINITO EN LA OBRA DE GEORG CANTOR"**, previa a la obtención del título profesional de **LICENCIADO EN FILOSOFÍA** en la Facultad Eclesiástica de **Ciencias Filosófico-Teológicas**:

1.- Declaro tener pleno conocimiento de la obligación que tiene la Pontificia Universidad Católica del Ecuador, de conformidad con el artículo 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior, de entregar a la SENESCYT en formato digital una copia del referido trabajo de graduación para que sea integrado al Sistema Nacional de Información de la Educación Superior del Ecuador para su difusión pública respetando los derechos de autor.

2.- Autorizo a la Pontificia Universidad Católica del Ecuador a difundir a través de sitio web de la Biblioteca de la PUCE el referido trabajo de graduación, respetando las políticas de propiedad intelectual de Universidad.

Quito, 7 de julio de 2016



Daniel Santiago Jockwich Martínez
C.I. 172454500-7

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR
FACULTAD DE CIENCIAS FILOSÓFICO TEOLÓGICAS
ESCUELA DE FILOSOFÍA**

**DISERTACIÓN PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FILOSOFÍA**

EL INFINITO EN LA OBRA DE GEORG CANTOR

AUTOR: DANIEL SANTIAGO JOCKWICH MARTÍNEZ

DIRECTOR: ALFONSO MONTALVO ZUMÁRRAGA

QUITO, 2016.

RESUMEN

Este trabajo estudia la fundamentación matemático-filosófica del infinito actual en la obra de Georg Cantor. Esto implica, por un lado, un análisis detallado de sus ideas matemáticas que le llevaron desde la teoría de funciones y el descubrimiento de los números transfinitos, a la consolidación y sistematización de la teoría de conjuntos. Por otro lado, se hace una revisión histórica de los argumentos filosófico-teológicos en contra del uso del infinito actual, desde los antiguos griegos hasta el idealismo de Kant. Finalmente, se concluye el trabajo con la defensa filosófica de Cantor, en la que demuestra que el concepto del infinito actual se puede introducir en la filosofía sin contradicciones.

Palabras claves: Georg Cantor, números transfinitos, teoría de conjuntos, filosofía de la matemática, infinito actual.

ABSTRACT

This work studies the mathematical-philosophical foundation of the actual infinite in the intellectual production of Georg Cantor. This requires by one way a precious study of the mathematical ideas that led Cantor, from the theory of functions and the discovery of transfinite numbers, to the consolidation and sistematization of modern set theory. On the other side, there will be ofered a historical revision of the philosophical-theological arguments against the use of the actual infinite, from the ancient Greeks untill the idealism of Kant. Finally, this investigation concludes with the philosophical defense from Cantor to demonstrate that the concept of the actual infinite can be introduced into philosophy without contradictions.

Key words: Georg Cantor, transfinite numbers, set theory, philosophy of mathematics, actual infinite.

ÍNDICE

Resumen.....	iii
Abstract.....	iv
Introducción.....	1
1. EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.....	3
1.1. La postura filosófica del joven Cantor (1868-1869).....	3
1.2. Los aportes de Cantor en la teoría de funciones.....	6
1.2.1. La unicidad de una función trigonométrica respecto una función $f(x)$	6
1.3. El puente entre la teoría de funciones y la teoría de conjuntos.....	9
1.4. Los números reales y el axioma Cantor-Dedekind.....	11
1.5. Conjuntos derivados y números ordinales transfinitos.....	13
1.6. El descubrimiento de los números cardinales transfinitos.....	17

2.	EL INFINITO COMO PROBLEMA FILOSÓFICO.....	24
2.1.	El infinito en la antigua Grecia.....	24
2.2.	El infinito en la modernidad.....	28
2.2.1.	El infinito en la obra de Kant.....	29
2.2.2.	El infinito en la obra pre-crítica de Kant (1746-1770).....	29
2.2.3.	El infinito en la <i>Kritik der reinen Vernunft</i> (1781).....	31
2.2.4.	El infinito como antinomia de la razón pura.....	33
2.3.	EL infinito en la obra de Cantor.....	36
2.3.1.	Defensa filosófica del infinito actual.....	37
2.3.2.	Los principios filosóficos de la matemática de Cantor.....	40
2.3.3.	Lo transfinito en la naturaleza.....	42
2.3.4.	Clasificación de los distintos puntos de vista alrededor del infinito actual.....	44
2.3.5.	Recepción católica del infinito actual.....	45
	Conclusiones.....	49
	Bibliografía.....	52

INTRODUCCIÓN

El tema principal de esta disertación es el infinito en la obra de Georg Cantor. La pregunta que se tiene por objetivo responder es la siguiente: ¿de qué forma se deduce el concepto del infinito actual, por vía de la matemática y de la filosofía? La hipótesis principal que guía este trabajo es que el infinito actual se introduce en la matemática a través de los primeros números ordinales transfinitos (1872), y de forma implícita a través de los números cardinales transfinitos, en el descubrimiento de la sobre-enumerabilidad de los números reales (1874).

A su vez, se legitima el infinito actual en la filosofía, gracias al constante debate de Cantor con los argumentos principales de Aristóteles, de los pensadores escolásticos, de Giordano Bruno, Locke, Hume, Kant, Spinoza, Hegel y Bolzano.

El tratamiento exhaustivo del infinito por parte de Cantor, revela claramente una relación intrínseca entre la filosofía y la matemática. Los métodos formales de la matemática, de la lógica simbólica, de la teoría de conjuntos, de la teoría de pruebas, de la teoría de modelos, del cálculo de probabilidades y de los modelos estadísticos, pueden contribuir en el análisis crítico de problemas filosóficos. Y a su vez, el debate filosófico de problemas científicos retroalimenta a la investigación matemática.

Esta “forma” de hacer filosofía se orienta por la metodología de la filosofía de la matemática, que se propone estudiar problemas filosóficos a través del uso de métodos formales. En un futuro, esta rama de la filosofía se ha propuesto responder las principales preguntas de la epistemología, estética, y ética, por medio de nuevos modelos matemáticos. En este sentido esta disertación se considera un aporte a la filosofía de la matemática, al desvelar los prejuicios metafísicos, emocionales y anticientíficos, ante el concepto del infinito, utilizando los resultados básicos de la teoría de conjuntos.

Debido a esta orientación, la metodología de esta disertación pretende seguir el siguiente esquema: primero se introduce de forma básica la obra matemática de Cantor y luego sus reflexiones filosóficas acerca infinito actual. En ese orden, el primer capítulo presenta los inicios de la teoría de conjuntos a partir de problemas de la teoría de funciones (1870-1874), y en el segundo capítulo se introduce la discusión filosófica acerca del infinito, desde la Antigua Grecia hasta el idealismo alemán del siglo XVIII, culminando con la propia postura de Cantor.

La fuente principal utilizada de esta disertación es la obra completa en alemán de Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, recopilada por su alumno Ernst Zermelo y publicada por la editorial Springer en 1930. Aunque existen varias traducciones de textos particulares en inglés y en castellano, no existe ninguna traducción entera de la obra completa de Cantor a ningún otro idioma del mundo. En esta disertación se ha optado por seguir su línea de pensamiento y su nomenclatura original. Por ejemplo, en lugar de encontrar a la “n” como variable para cualquier número natural (para representar a un índice finito), se utiliza en muchos casos la “v”. En todas las definiciones y demostraciones se ha mantenido completamente el lenguaje formal de Cantor.

El contenido completo de esta disertación, no es más que una introducción breve, tanto a la investigación matemática de los conjuntos, como al debate acerca del problema filosófico-teológico del infinito.

1. EL NACIMIENTO DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1. LA POSTURA FILOSÓFICA DEL JOVEN CANTOR (1868-1869)

El primer trabajo de Cantor con tintes filosóficos es la disertación *De aequationibus secundi gradus indeterminatis*, entregada en Berlín el 14 diciembre del año 1867, con la que adquiere su doctorado por un estudio exhaustivo de la teoría de números de Lagrange y de las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss.

El estudio es considerado una *dissertatio docta et ingeniosa* por su maestro Weierstrass, y obtiene la calificación *magna cum laude* en su prueba oral, donde defiende las siguientes tesis que ya evidencian su postura filosófica respecto de los números:

- I. Num spatii ac temporis realitas absoluta sit, propter ipsam controversiae naturam dijudicari non potest. (Si el espacio y el tiempo son realidades absolutas, es a causa de que la naturaleza no puede disputar con ella misma).
- II. In re mathematica ars propendi quaestionem pluris facienda esta quam solvendi. (En cuestiones matemáticas es más importante el arte de preguntar que la solución) (Cantor, 1932, p. 31).

En estas dos tesis ya se puede intuir la concepción de Cantor acerca de la *naturaleza de los números* que va a ser clave para poder entender la existencia en *concreto* del infinito actual. Cantor asume que los números no solo son una mera abstracción o herramienta humana para describir al mundo, sino cree en la existencia autónoma de los números, independiente del ser humano. Los números son *reales* para Cantor, existen propiamente en la realidad y tienen una fuerza que ejercen sobre ella.

Cantor toma aquí una postura clásica frente el problema filosófico de la naturaleza de los números. Él postula un realismo platónico donde los números vienen a ser una realidad independiente y que permiten reconocer el mundo verdaderamente. Los números según eso

son *descubiertos* y no inventados, ya que el ser humano solo revela los principios objetivos que subyacen en la naturaleza.

En la primavera de 1869 Cantor logra habilitarse con el escrito *De transformatione formarum ternariarum*, sobre las posibles transformaciones que puede poseer una forma cuadrática ternaria. Al igual que en la disertación, se puede encontrar indicios de su postura filosófica en las tesis que defiende al final de su habilitación:

- I. Iure Spinoza mathesi eam vit tribut, ut hominibus norma et regula veri in omnibus rebus indagandi sit. (Con razón Spinoza atribuye a la matemática el poder de ser la pauta y norma del aprendizaje de la verdad en todas las cosas).
- II. Eodem modo literis atque arte animos declatori posee. (De la misma manera las letras y el arte poseen un deleite para el alma) (Cantor, 1932, p. 62).

La primera tesis da cuenta del valor que tiene la matemática para aproximarnos a la verdad. La matemática es según Cantor el acceso a las verdades perenes y eternas que existen independiente del ser humano. Para Cantor no existen solamente los números como objetos reales sino son una posibilidad de apropiarse racionalmente de la realidad y liberarnos de nuestras incertidumbres. Es esto lo que Cantor debía tener en mente cuando formulaba las palabras hoy en día famosas: “porque la esencia de la matemática se encuentra precisamente en su libertad” (Cantor, 1932, p. 479).

La matemática es libre porque posee la capacidad de emancipar al ser humano de su ignorancia, por un lado, y sobre todo es libre porque es un acto de la fantasía, cuyos conceptos, aunque existan realmente, no tienen que ser verificados empíricamente. Esto no le quita nada a la tesis realista de los objetos matemáticos, simplemente argumenta que la coherencia interna de la misma matemática hace superflua la necesidad de verificarla experimentalmente.

La segunda tesis da cuenta del gusto estético que asocia Cantor con las letras, o con los números más particularmente. Para Cantor la matemática no solo es el paradigma de todo conocimiento verdadero y del acto creador de la fantasía, sino sobre todo del modelo para la belleza y el orden.

Se podría entonces decir que un aporte esencial de la época estudiantil de Cantor es la postura filosófica y teológica que va a sostener frente los números toda su vida; un realismo radical. Lo mismo sostiene Fraenkel:

No obstante esta dedicación con la teoría de números propuesta inicialmente por Kronecker no fue un asunto casual, sino que la pureza y belleza lo cautivo profundamente, esto se demuestra además en la tercera tesis que defendió en su habilitación: *Numeros integros simili modo atque corpora coestium totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere*. (Los números enteros forman, al igual que los cuerpos celestes, un todo compuesto por leyes y relaciones armoniosas) (Cantor, 1932, pág. 454).

El mismo Fraenkel comenta, en la versión reducida de la biografía de Cantor, llamada *Das Leben Georg Cantors*, que su convicción platónica no solo le ayudó a seguir creyendo, casi en completa soledad y fervientemente, en la existencia del infinito actual, sino que también tuvo una influencia positiva en el trato mismo de los problemas matemáticos. De esta manera no nos puede sorprender de que Cantor inicia su obra principal *Über unendliche lineare Mannigfaltigkeiten*, Parte 5, con las palabras: “Er habe wesentlich für Zwei Leserkreise geschrieben; für Philosophen, welche der Entwicklung der Mathematik bis in die neuste Zeit gefolgt, und für Mathematiker, die mit den wichtigsten Itern und neueren Erscheinung der Philosophie vertraut sind.” (Cantor, 1932, pág. 478)¹.

El aporte más importante de los trabajos en la teoría de números, para el desarrollo posterior del pensamiento de Cantor, es su posición filosófico- teológica, que se caracteriza principalmente por ser *romántica*, que la ganó en los primeros años de su vida intelectual, y luego mantuvo durante toda su vida.

¹ “Escribo para dos públicos; para los filósofos que siguieron el desarrollo de la matemática hasta el tiempo actual, y para los matemáticos que están familiarizados con las ideas antiguas y nuevas de la filosofía.” (Traducción personal)

1.2 . LOS APORTES DE CANTOR EN EL ÁMBITO DE LA TEORÍA DE FUNCIONES

La ocupación de Cantor con la teoría de funciones se inspira de seguro en las investigaciones de Heinrich Eduard Heine, sobre series trigonométricas y su representabilidad, alrededor de 1869 en Halle (Dauben, 1990, pág. 30). Las series trigonométricas se caracterizan con la siguiente formula:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)$$

Donde a_n y $b_n \in \mathbb{R}$. Muchos matemáticos como Bernhard Riemann, Charles Fourier, Hermann Hankel, y Gustav Dirichlet estudiaron durante más de 150 años, si es posible representar una función cualquiera (continua o discontinua) $f(x)$ mediante el uso de una serie trigonométrica. Esta investigación tiene su origen histórico en los estudios acerca la vibración de cuerdas de Jean le Rond d'Alambert (1739) y se encuentra resumida ampliamente en la obra *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (1854) de Bernhard Riemann.

Mientras que Riemann trataba de comprobar exitosamente la posibilidad de representar a cualquier función mediante una serie trigonométrica, Eduard Heine y Cantor se interesaban por la *cantidad* de posibles representaciones. Su tesis era que solo la unicidad (*Eindeutigkeit*) de estas representaciones puede asegurar un uso riguroso de esta herramienta matemática.

1.2.1. LA UNICIDAD DE UNA SERIE TRIGONOMÉTRICA RESPECTO A UNA FUNCIÓN $f(x)$

Heine es el primero en enunciar el teorema de la unicidad, en marzo de 1870, pocos meses antes de la demostración de Cantor. El teorema de Heine, sin embargo, no es lo suficientemente general, porque solo se aplica a funciones continuas y además requiere que todas las funciones converjan de forma uniforme (una condición que muchas funciones no cumplen). Es por eso que el teorema de Heine invita a ser ampliado y generalizado de muchas formas.

Cantor demuestra la unicidad de la representación de una función, con cualquier valor real, mediante una serie trigonométrica, en el año 1870, en un artículo publicado en el *Crelles Journal* nr. 72 con el título *Beweis, das eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt.*

Al comienzo del artículo arriba mencionado, Cantor se plantea la pregunta si existen dos series trigonométricas que pueden representar a la misma función $f(x)$ y converger hacia el mismo valor de x . Según Cantor ésta es una pregunta que ha ganado cada vez más importancia y es él quien por primera vez va encontrar una respuesta definitiva al problema de la unicidad, inspirado en las obras de Bernhard Riemann, Eduard Heine y H.A Schwarz, con solamente veinticinco años de edad.

Supone que dos series trigonométricas diferentes $\sum(an x^n)$ y $\sum(bn x^n)$ convergen ambas a los mismos valores de una sola función $f(x)$. Cantor (1932, pág. 81) ahora resta ambas series para demostrar que son la misma serie. Es decir, si ambas series convergen a exactamente los mismos valores, entonces su resta debe ser para todos los valores igual a cero. Por lo tanto, si se logra demostrar que la serie $0 = C_1 + C_2 + \dots + C_n$, donde C_i es el resultado de $(a_i - b_i)$, converge de manera uniforme² al cero, se puede deducir que la representación de una función trigonométrica es *única*.

Esta serie se deja convertir según, las tesis desarrolladas en la habilitación *Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen* de 1854 de Riemann, en la función $f(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \dots - \frac{C_n}{nn}$. Esta función, según el primer *Lehrsatz* o el primer principio que introduce Riemann en el octavo párrafo de *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch trigonometrische Reihen*, posee dos propiedades:

² La convergencia uniforme es una ampliación de la convergencia puntual. Se dice que una serie de funciones converge de forma puntual, si para un elemento de su dominio $x_1 \in D$, $f_n : D \rightarrow R$, se cumple que $f(x_1) = \lim f_n(x_1)$. Es decir, si $x_1 \in D$, entonces para todo $\forall \varepsilon > 0$ existe un algún índice $\exists N_1$ a partir del cual $\forall n \geq N_1 |f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon$. En el caso de que se pueda demostrar la convergencia puntual para todos los elementos del dominio $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n \in D$ a partir del mismo índice N_1 , entonces la serie de funciones converge uniformemente. (Heuser, 2009, pág. 545) (Forster, 2013, pág.255).

- (I) La función $f(x)$ es *stetig*, o continua, para todos los valores de $x \in (0, 2\pi)$, y
- (II) que su segunda derivada $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x+\alpha) - f(x-\alpha) - 2f(x)}{\alpha^2}$ es igual a cero, para todos los valores de $x \in (0, 2\pi)$, cuando α disminuye.

Esto es importante ya que, si Cantor logra demostrar que $f(x)$ es lineal, entonces es fácil demostrar la unicidad de la representación de esta función y por lo tanto, un teorema de la unicidad más general que el de Heine. La demostración que busca Cantor la realizará su amigo H.A. Schwarz, a comienzos del año 1870. Esto se evidencia en una carta del 30 de marzo de ese año, donde Cantor pide permiso a Schwarz para utilizar su demostración:

Bevor ich an die Ausarbeitung gehe, muss ich von Dir erfahren, ob du damit einverstanden bist, wenn ich deinen Beweiss ebenfalls in den Text mit aufnehme; ich würde ihn, ohne sachliches dabei zu ändern, eine meinen Zwecken und dem Zusammenhange entsprechende Darstellung geben und es wird darin heissen “dieser Beweis ist von Herrn Schwarz in Zürich” (Meschkowski, 1991, pág. 24).³

Debido a que la segunda derivada de la función $f(x)$ es igual a cero, se puede concluir, gracias a la demostración de Schwarz, que $f(x) = xc + c'$, es decir la función es lineal. Si sustituimos ahora $f(x)$ por $xc + c'$ en la función $f(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \dots - \frac{C_n}{nn}$, nos quedamos con la siguiente expresión $C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{2^2} + \dots + \frac{C_n}{n^2}$ (Cantor, 1932, pág. 83).

El lado derecho de esta ecuación $C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{2^2} + \dots + \frac{C_n}{n^2}$, es una serie periódica con la frecuencia 2π , lo cual implica que el lado izquierdo de la ecuación también debe ser periódico. La única forma posible de que el lado derecho sea igual a cero y periódico (Dauben, 1990, pág. 31) (Puckert, 1987, pág. 35), es que los coeficientes de lado izquierdo, C_0 y c , sean igual a cero. Sustituyendo a C_0 y c por cero se obtiene la siguiente ecuación $c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \dots + \frac{C_n}{n^2}$.

³ Antes de que prosiga a la elaboración final, debo saber de ti, si estás de acuerdo en que incluya tu demostración en mi texto; le daría, sin cambiar nada esencial, una presentación que concuerde con mis fines y el contexto correspondiente, y ahí diría “esta demostración es del Señor Schwarz en Zürich” (Traducción personal).

Esta serie posee la propiedad de ser convergente de forma uniforme. La convergencia uniforme es necesaria para mostrar la unicidad de las series trigonométricas. Porque nos asegura que todos los miembros tienen la misma distancia hacia la función límite y, por lo tanto, es la única manera de mostrar que todos los valores convergen al mismo valor x , o en nuestro caso al cero.

La convergencia uniforme permite que la serie, al multiplicarse por $\cos n(x-t)$, sea integrable, miembro por miembro, de 0 hasta 2π , lo cual sería igual a $c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0$, donde t puede ser un número real cualquiera, y consecuentemente que $d_n = 0$ y $c_n = 0$ (Cantor, 1932, pág. 83).

Esto nos da el resultado de que la función $f(x) = 0$, con cualquier valor real para x , solo es representable por una serie trigonométrica que tenga los coeficientes d_0, c_n y d_n igual a cero (Dauben, 1990, pág. 34). Esto a su vez le permite a Cantor formular el teorema de la unicidad (1870) con las menores hipótesis posibles: “Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergiert und die nämlich Funktion $f(x)$ darstellt.” (Cantor, 1932, pág. 83).

4

1.3. EL PUENTE ENTRE LA TEORÍA DE FUNCIONES Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

El primer texto de los trabajos en la teoría de funciones, donde ya se puede notar evidentemente la emergencia de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos, es en las *Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, publicado en 1872 en la Revista de Crelle (*Journal für reine und angewandete Mathematik*), dos años después de la demostración de la unicidad de la representación de una función $f(x)$ por medio de una serie trigonométrica (1870).

⁴ “Si para una función $f(x)$, con una variable real (x), está dada una serie trigonométrica que converge hacia todos los valores de $f(x)$, no puede haber otra serie trigonométrica que represente la misma función $f(x)$.” (Traducción personal)

El título de este último artículo de Cantor, del año 1872, insinúa en su idioma original la expansión de un teorema acerca de las series trigonométricas. El teorema al que se hace referencia es justamente la conclusión del trabajo de Cantor de 1870, expuesto aquí al final del subcapítulo 1.2: el teorema de la unicidad. Cantor va eliminar la condición de que todos los valores de la serie trigonométrica tengan que converger hacia la función $f(x)$. Esto lo hace por primera vez en un escrito corto llamado *Notiz ueber den Aufsatz: Beweis, das...* (1871); la unicidad como propiedad de las series trigonométricas sigue intacta, aunque exista una cantidad finita de los valores de la serie trigonométrica no convergen hacia $f(x)$ (convergencia casi en todas partes). Estos puntos que no convergen hacia $f(x)$ se conocen como *puntos de discontinuidad* o *Unstetigkeitsstellen*.

Cantor, en su escrito del años 1872, aumenta esta expansión y postula, en la introducción del artículo *Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, que *el teorema de la unicidad* se mantiene aunque hay un conjunto infinito de valores de la serie trigonométrica que no convergen hacia $f(x)$. “Die hier beabsichtige Ausdehnung besteht darin das für eine unendliche Anzahl von Werten de x im Intervalle $]0, 2\pi[$ auf die Konergenz verzichten oder auf die Übereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne da die Gültigkeit des Satzes aufhört.” (Cantor, 1932, pág. 92)⁵

Para lograr esta expansión, Cantor primero se vio forzado a desarrollar un método para poder identificar con precisión distribuciones de puntos en el continuo geométrico. Esto requiere por un lado una definición rigurosa de los dominios numéricos del continuo geométrico, es decir una fundamentación precisa de los números reales, y, por otro lado, de un axioma que asegura la existencia de todos los números reales en el continuo geométrico. A partir de ahí, Cantor se ve en una posición donde puede introducir un concepto fundamental para la teoría de conjuntos: los conjuntos derivados de primera categoría, y luego los conjuntos derivados de segunda categoría.

Estos últimos conjuntos llevan directamente a los números ordinales transfinitos, e inspiran su siguiente trabajo, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes der reelen algebraischen Zahlen*

⁵ “La aquí deseada expansión, consiste en que renunciamos a la convergencia de la suma de series de una cantidad infinita de los valores de x en el intervalo $]0, 2\pi[$ sin que se pierda la validez del teorema. (Traducción personal)

(1874). La motivación consiste justamente en comparar el “tamaño” de los diferentes conjuntos derivados (Dauben, 1990, pág. 49). Con esta publicación, Cantor finalmente comienza a centrarse en el estudio particular de conjuntos, e introduce los primeros números cardinales transfinitos. Es de esta forma como se da la transición entre la teoría de funciones (1870-1872) a la teoría de conjuntos (1872-1899), en la investigación matemática de Cantor.

1.4. LOS NÚMEROS REALES Y EL AXIOMA DE CANTOR-DEDEKIND

Como ya se había mencionado, Cantor no está satisfecho con la fundamentación aritmética de los números reales de sus contemporáneos, porque estos cometen el error lógico de presumir al *denfinitum* (los números reales) para su propia definición. Por eso se ve forzado a dedicar el primer párrafo de su artículo a demostrar su propia teoría de números reales. “Zu dem Ende bin ich aber genötigt, wenn auch zum größten Teile nur andeutungsweise, Erörterungen vorzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Anzahl gegeben sind (...)”. (Cantor, 1932, Idem.)⁶

Cantor sigue los pasos de Weierstrass y parte del dominio de los números racionales A . De ahí, utiliza a los números racionales en forma de sucesiones $\{a_n\}$ para aproximarse a los números irracionales y completar la formalización de los números reales.

El procedimiento de Cantor se conoce hoy en día como *series fundamentales* (Fundamentalreihen) o series de Cauchy, y junto con los cortes de Dedekind, en *Irrationale Zahlen und Stetigkeit* (1872) son la primera teoría consistente de los números irracionales en la historia de la humanidad. Ambos llegan a los mismos resultados paralelamente, dando lugar a una amigable y fructífera correspondencia de cartas que durará desde 1872 hasta 1882.

⁶ “Me veo forzado a adelantar unas conceptualizaciones, aunque solo de manera superficial, cuyo fin es clarificar las relaciones que surgen cuando los números están dados como cantidades finitas o infinitas (...). (Traducción personal)

Se define a una sucesión fundamental⁷ o sucesión de Cauchy como aquellas sucesiones $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ que poseen la propiedad de que la diferencia entre sus elementos $a_{n+m} - a_n$ se va haciendo más pequeña mientras que n crece indefinidamente. En otras palabras (Cantor, 1932, pág. 93), se puede hablar de un sucesión fundamental, si existe un número entero N , de tal manera que para todo valor positivo y racional de ε , $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, para cualesquier m y $n > N$.

A cada sucesión fundamental le corresponde un “límite” b . Sin embargo, esto no significa que b sea el límite de hecho de la sucesión fundamental, sino es simplemente la asociación de un símbolo (*Zeichen*) con una determinada sucesión $\{a_n\}$. Posteriormente, Cantor (1932, *idem.*) aclara que utiliza valor, número y límite en este caso como sinónimos.

De ahí, se introduce la noción de orden entre los límites de las distintas sucesiones fundamentales. Cantor nota que solo se pueden dar tres casos entre dos sucesiones fundamentales $b > b'$, $b < b'$ y $b = b'$. Estos resultados permiten extender las operaciones aritméticas al ámbito de los nuevos símbolos b . Es en este momento cuando Cantor (1932, pág. 94) decide ya no considerar a los “límites” b como símbolos sino como *números* (*Zahlengrößen*). De esta forma, la colección de todos los “límites” de todas las sucesiones fundamentales $\{a_n\}$ constituye un nuevo campo numérico B .

De la misma forma se obtiene el campo numérico C a partir de las sucesiones fundamentales $\{b_n\}$ de B . Repitiendo este proceso λ – veces, Cantor finalmente llega al dominio L , que incluye tanto a los números racionales A y a los números irracionales, como resultado de λ –sucesivas generalizaciones del dominio A . Esta es la primera formalización matemática del conjunto completo de los números reales, y es también conocida como la teoría de los números irracionales de Cantor.

A partir de este hallazgo histórico, Cantor comienza a asignar puntos del continuo geométrico a los nuevos dominios de números y postula por primera vez el axioma de Cantor-Dedekind (1872):

⁷ La definición de las sucesiones fundamentales que encontramos en el artículo de Cantor se ha mantenido casi idéntico en los libros de análisis de hoy en día, como lo evidencia el libro *Analysis I* de Otto Forster y el *Analysis I* de Harro Heuser.

Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in §1 definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein Axiom hinzufügen, welches einfach darin besteht, das auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße. (Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, 1932)⁸

Este axioma implica una simetría que buscaba Cantor, entre los nuevos dominios numéricos y el continuo geométrico. Finalmente, esto le permitía generar conjuntos derivados de primera categoría (*Abgeleitete Punktmengen erster Gattung*) para poder comprobar el teorema de la unicidad para series trigonométricos con infinitos puntos de discontinuidad (1872).

But above all, Cantor has devised a scheme whereby it was possible to identify with precision and rigor complicated configurations of points distributed in certain specific ways on the geometric continuum. He was at last in a position to introduce one of his most innovative concepts: derived sets of the first species. (Dauben, 1990)⁹

1.5. CONJUNTOS DERIVADOS Y NÚMEROS ORDINALES TRANSFINITOS

Debido al axioma Cantor-Dedekind (1872), Cantor comienza a resaltar que a toda acumulación de puntos le corresponde necesariamente un valor numérico. De ahí, define a las colecciones de puntos dados en cantidades finitas o infinitas como *conjunto de puntos* y de forma análoga, identifica a las colecciones finitas o infinitas de valores numéricos como *conjunto de valores*. Esto le permite operar a Cantor con conjuntos de puntos como si fueran valores numéricos. “Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen

⁸ “Pero para completar la conexión expuesta en este § entre los dominios numéricos definidos en el §1 con la geometría de línea recta, es solo necesario agregar un axioma, que simplemente consiste en que también a la inversa, a cada valor numérico le corresponde un punto de la recta, cuya coordenada es igual al valor numérico.” (Traducción personal)

⁹ “Pero encima de todo, Cantor había diseñado un esquema con el que fue posible identificar con precisión y rigor complicadas configuraciones de puntos distribuidas en una manera específica en el continuo geométrico. Finalmente, él estaba en la posición de poder introducir uno de sus conceptos más innovadores: conjuntos derivados de primera categoría.” (Traducción personal)

nenne ich der Kürze halber eine Wertmenge und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine Punktmenge.” (Cantor, 1932, pág. 97)¹⁰

Desde aquí, Cantor comienza a explorar las propiedades de los conjuntos de puntos. Él supone que cada uno de estos conjuntos de puntos puede llevar dentro de sí otro conjunto de puntos y así de manera sucesiva. La posibilidad de determinar si un conjunto está adentro de otro o no, es ahora posible a partir de los *puntos de acumulación* de un conjunto.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definieren, haben wir den Begriff Grenzpunkt [“Häufigungspunkt”] vorauszuschicken. Unter einem Grenzpunkt einer Punktmenge P verstehe ich einen Punkt von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter “Umgebung eines Punktes” sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches de Punkt in seinem Innern hat. (Cantor, 1932, pág. 97-98)¹¹

Cantor acaba de encontrar un método, esencial en la topología, para vincular a un conjunto P dado, con cualquier punto de la línea real. O un punto cualquiera de la recta es un punto de acumulación del conjunto P o no es un punto de R . Junto con el teorema de Bolzano-Weierstrass, Cantor podía concluir que todos los conjuntos infinitos de puntos poseen al menos un punto de acumulación. El conjunto de puntos de acumulación de un conjunto P es lo que Cantor define como el primer conjunto derivado de puntos P' (*erste abgeleitete Punktmenge*) y se conoce hoy en día como la clausura topológica \bar{P} de P .

Por ejemplo, el conjunto de puntos A de todos los números racionales, tiene infinitos puntos de acumulación. La clausura de A sería igual al conjunto de los números reales $\bar{A} = R$.

¹⁰ “El conjunto dado de cantidades finitas o infinitas de Zahlengroessen los llama más cortamente *conjunto de valores* y de manera correspondiente una cantidad finita o infinita de puntos en una recta *conjunto de puntos*.” (Traducción personal)

¹¹ “Para entender la definición de la derivación de un conjunto de puntos tenemos que anticipar el concepto *punto de acumulación de un conjunto de puntos*. Bajo el punto de acumulación de un conjunto de puntos P entiendo un punto de la recta de tal posición, que en todas sus cercanías hay infinitos puntos de P y puede ocurrir que el punto mismo se parte del conjunto. Bajo “cercanías” del punto entendemos aquí todos los intervalos en los que el punto *está adentro*. Según esto es fácil comprobar que un conjunto de punto que consiste en cantidades infinitas de puntos, contiene al menos un punto de límite. “(Traducción personal)

Cuando el conjunto derivado no es finito, se puede derivar otra vez sus puntos de acumulación y de esta manera se obtiene la segunda clausura del conjunto. Este procedimiento se puede repetir según Cantor (1932, pág. 98) v –veces (algún número finito) hasta obtener la clausura P^v del conjuntos de puntos P .

En general, una clausura con una cantidad finita de puntos de acumulación no puede tener ninguna siguiente clausura. A todos los conjuntos de puntos con una cantidad finita de puntos de acumulación después de v -clausuras se las denomina conjuntos derivados del tipo- v . Esta colección de todos los conjuntos derivados del tipo- v , la llama Cantor, *conjuntos derivados de primera categoría*.

A todos los conjuntos de puntos de la primera categoría se les caracteriza con la siguiente formula $P^{v+1} = \emptyset$. Esta fórmula es recién del año 1879, de la primera parte de *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, sin embargo, formaliza de manera sencilla e intuitiva la idea de que después de una cantidad finita de clausuras $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^v$ no hay más puntos de acumulación. En conclusión, Cantor había logrado definir los conjuntos infinitos de puntos con propiedades muy particulares, ajustadas a los infinitos puntos de discontinuidad requeridos para la demostración del teorema de la unicidad de 1872.

Cantor en ese año parece aún no dar el paso de derivar infinitamente un conjunto de puntos P . En su publicación del mismo año solo aplica cantidades finitas de clausuras a un conjunto de puntos. La propia construcción de los números ordinales transfinitos a partir de infinitas clausuras es publicada, por primera vez, siete años después, en la segunda parte (1879) de *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Sin embargo, resulta evidente que Cantor en esta época ya parece haber pensado en ampliar las clausuras de un conjunto a cantidades infinitas, para dar lugar a los *conjuntos derivados de segunda categoría*.

But it was clear, even from its own remarks, that by 1872 he had proceeded well beyond the simple sequence of derived sets of the first species $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^v$, to consider the entire sequence of derived sets of the second species as well, those sets for which $P^v = \emptyset$ for no finite value of v , however large. (Dauben, 1990)¹²

¹² Sin embargo, era evidente incluso desde sus propias notas al pie de página, que alrededor de 1872 ya había avanzado más allá de la simple secuencia de conjuntos derivados de la primera categoría $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^v$, a

Esto sostiene incluso el propio Cantor en la tercera parte (1882) de *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, donde comenta, después de la derivación de los números ordinales transfinitos $P^\infty, P^{\infty+1}, \dots, P^{\infty^2}, \dots$, lo siguiente: “Zu demselben bin ich vor nun zehn Jahren gelangt; bei Gelegenheit einer eigenthümlichen Darstellung des Zahlbegriffs (Mathematischen Annalen Band V) habe ich entfernt darauf hingewiesen.” (Purkert, 1987, pág. 39)¹³.

Aquellos conjuntos de puntos que pueden ser derivados continuamente sin que disminuya la cantidad infinita de puntos de acumulación son llamados conjuntos derivados de segunda categoría. O en otras palabras los conjuntos derivados de segunda categoría son aquellos cuya clausura $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^v$ nunca es igual al vacío. Por ejemplo, el conjunto de puntos de los números racionales y algebraicos pertenece a los conjuntos derivados segunda categoría.

Esta clase de conjuntos son la primera representación de los números ordinales transfinitos. Si se continúa el proceso de clausuras más allá de cualquier número natural se obtiene el primer número ordinal transfinito P^∞ . Esta clausura de P se puede continuar derivando y se obtiene los siguientes números ordinales transfinitos $P^{\infty+1}, P^{\infty+2}, P^{\infty+3} \dots P^{\infty+n}$.

En conclusión, Cantor define al número transfinito ordinal más pequeño como la clausura de P de orden infinito P^∞ , que es igual al conjunto que contiene todos los puntos de acumulación que tienen en común las anteriores clausuras. Posteriormente sustituye el símbolo ∞ debido a su asociación con el infinito potencial por el símbolo griego ω en el año 1883.

Gehrt P zur zweiten Gattung, so wird P' sich aus Zwei verschiedenen Punktmengen Q und R zusammensetzen, so daß $\bar{P} = \{Q, R\}$ die eine Q besteht aus denjenigen Punkten von \bar{P} , welche bei hinreichendem Fortschreiten in der Folge $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^v$ verloren gehen, die andere R umfaßt diejenigen Punkte, welchen in allen Gliedern

considerar también a la secuencia completa de conjuntos derivados de segunda categoría, aquellos conjuntos para los cuales $P^v = \emptyset$ para ningún índice finito de v , sin importar su tamaño.

¹³ “A este resultado ya había llegado hace diez años; en la oportunidad de representar a los números de manera propia en el *Mathematischen Annalen Band V*, señalé estos resultados indirectamente.”(Traducción personal)

der Folge $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^\nu$ erhalten bleibe, es ist also R definiert durch die Formel $R = \mathcal{D}(\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots)$ und allgemein $R = \mathcal{D}(P^{n_1}, P^{n_2}, P^{n_3}, \dots)$, wo n_1, n_2, n_3, \dots irgend eine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer, positiver Zahlen ist. Diese aus der Menge P hervorgehende Punktmenge R werde nun durch das Zeichen P^∞ ausgedrückt und "Ableitung von P der Ordnung ∞ " genannt. (Cantor, 1932, pág. 147) ¹⁴

Es de esta forma como Cantor deriva por primera vez los números ordinales transfinitos como respuesta a sus investigaciones en el ámbito del análisis. Particularmente su ocupación con el teorema de la unicidad y sus ampliaciones durante 1870-1872, le forzaron a ocuparse de conjuntos infinitos de puntos en forma de conjuntos derivados. La especificación y descripción exacta de estos conjuntos derivados, finalmente genera *dialécticamente* el concepto de los números ordinales transfinitos (Cfr., Cantor, 1932, pág. 138).

1.6. DESCUBRIMIENTO DE LOS NÚMEROS CARDINALES TRANSFINITOS

Inspirado por el gran éxito de su teorema de la unicidad "ampliado", Cantor decide estudiar las diferencias entre dominios continuos y discretos. Este interés se originó en la búsqueda de identificar las propiedades principales del conjunto de todas las derivaciones de primera categoría y del conjunto de las derivaciones de segunda categoría. La sospecha de Cantor, aproximadamente en el año 1873, es que estos dos conjuntos son radicalmente distintos por su *extensión*. El 29 de noviembre de 1873, formula su hipótesis en forma de una pregunta en una carta a Richard Dedekind:

Gestatten Sie mir, ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es (...). Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) , ferner denke man sich etwa den Inbegriff

¹⁴ Si P pertenece a la segunda categoría, entonces \bar{P} se descompone en la intersección de Q y R . Así que $\bar{P} = \{Q, R\}$, donde Q es el conjunto de puntos de \bar{P} que se van perdiendo cada vez que avance la $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^\nu$, el otro conjunto R en cambio contiene los puntos que se mantienen en todos los elementos de la serie $\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots, P^\nu$. Así que R está definido por la fórmula $R = \mathcal{D}(\bar{P}, \bar{\bar{P}}, \bar{\bar{\bar{P}}}, \dots)$ y de manera más general $R = \mathcal{D}(P^{n_1}, P^{n_2}, P^{n_3}, \dots)$, donde n_1, n_2, n_3, \dots son números enteros positivos que aumentan al infinito. Este conjunto de puntos R que resulta del conjunto de puntos P , se expresa ahora con el símbolo P^∞ y se denomina "Derivación de P del orden ∞ ". (Traducción personal)

aller positiven reelen Zahlengrößen x und bezeichne sie mit (x) , so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, das zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört? (Meschkowski, 1991)¹⁵

Todos los conjuntos que se pueden poner en una correspondencia uno a uno con el conjunto de los conjuntos naturales son denominados “numerables” (*abzählbar*). Cantor ya había demostrado que los números racionales, al igual que los algebraicos, son numerables. ¿Era este el mismo caso con los números reales que son mucho más densos que el conjunto de los números racionales? Cantor descubre la respuesta negativa a penas ocho días después (Meschkowski, 1991, pág. 35) y desarrolla durante el mes de diciembre un trabajo con la demostración de la innumerabilidad de los números reales.

El resultado de estas investigaciones se llama *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes der reellen algebraischen Zahlen* (1874) y es el primer texto de Cantor dedicado a la teoría de conjuntos, que aún se encontraba en vías de desarrollo.

Cantor (1932, pág. 116) demuestra en el primer párrafo de este texto que existe una correspondencia uno-a-uno entre los números algebraicos reales y los números naturales. Cabe mencionar que el primer párrafo tenía la función de encontrar una aplicación concreta de su trabajo que se pueda publicar. Otra de las razones, que incluso explica la elección del título, es que Cantor tenía que camuflar sus resultados pocos ortodoxos del ojo de uno de los editores del *Crelles Journal*, Kroenecker (Dauben, 1990, pág. 68). Esta aplicación es la demostración de la existencia de infinitos números trascendentes de Louisville en cualquier intervalo $(a \dots b)$.

El conjunto de los números algebraicos reales se compone de los números algebraicos racionales y de los números algebraico irracionales. Un número ω es un número algebraico, si y solo si es capaz de satisfacer a un polinomio de la siguiente forma $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} +$

¹⁵ “Permítame usted presentarle una pregunta, que posee para mí un cierto interés teórico, pero que no he podido responder, quizá usted sí es capaz de hacerlo (...). Uno toma la colección de todos los individuos enteros positivos n y los denomina (n) , adicionalmente uno se imagina la colección de todos los números reales positivos x y los llama (x) , ahora la pregunta es simplemente, si (n) se puede asignar a (x) de la forma que a todo individuo de una colección, solo le corresponde uno y únicamente un elemento de la otra colección”. (Traducción personal)

$\dots + a_n = 0$. Donde los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n y su grado n son números naturales incluyendo al cero, pero $a_0 \neq 0$.

Dos ejemplos:

(1) $4x - 5 = 0, x = \frac{5}{4}$ es un número algebraico racional.

(2) $x^2 - 2 = 0, x = \sqrt{2}$ es un número algebraico irracional.

De ahí, se puede deducir que todos los números algebraicos reales corresponden a un cierta "altura" N . Se calcula así $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$. Esta ¹⁶altura N es igual a un número entero positivo para todos los números algebraico reales ω y, al revés, existe para cada número entero solo una cantidad finita de números algebraicos reales con la altura N . Este último conjunto se denomina $\varphi(N)$ y determina la cantidad de números algebraicos que le corresponde a cada altura (N). Por ejemplo; $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 4$, etc. A partir de esta regularidad, Cantor enuncia una correspondencia uno a uno entre los número algebraicos reales (ω) y los números naturales (v).

Se elige como primer número ω_1 al número que tenga la altura $N = 1$, siguen los dos números que corresponden a la altura $N = 2$, que se definen como ω_2, ω_3 . De la misma forma se unen los cuatro números que corresponden a la altura $N = 3$, según su respectivo tamaño y se obtiene $\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$.

Generalizando estos resultados se puede asignar a todos los números (ω) un número natural hasta llegar a una cierta altura $N = N_1$, a partir de ahí se utiliza inducción y siguen los números algebraicos reales con la altura $N = N_1 + 1$. Al continuar este método se obtiene el conjunto de todos los números reales algebraicos en la forma $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v$, con respecto a esta correspondencia se puede hablar del v -ésimo número algebraico real y por supuesto no falta ningún número del conjunto (ω). Por lo tanto, existe una función biyectiva, uno-a-uno, entre los números algebraicos reales y los números naturales.

¹⁶ Actualmente suele encontrarse más comúnmente la formula $N = n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$, sin embargo esta resulta menos general que la original de Cantor, ya que solo funciona a partir de $N > 2$.

En el segundo párrafo de 1874, Cantor demuestra la innumerabilidad de los números reales, a través de una reducción *ad absurdum*, esto significa que propone una premisa de la cual deriva una contradicción lógica para concluir que la premisa es equivocada. En este caso, presupone que *sí* existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los números naturales. Esta correspondencia se puede representar mediante una serie infinita de números reales con un número natural. La contradicción, ahora consiste en que Cantor (1932, pág. 118) logra demostrar que la correspondencia *siempre* es incompleta.

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebene unendliche Reihe voneinander verschiedener reeller Zahlgrößen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_v$ vorliegt, so läßt sich in jedem vorgebenen Intervalle $(\alpha \dots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden. (Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, 1932)¹⁷

Para demostrar la existencia de estos números η Cantor (1932, pág. 117) supone un intervalo cualquiera $(\alpha \dots \beta)$ donde $\alpha < \beta$. Los dos primeros números de la serie de números reales $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_v$ que caen adentro de este intervalo, con excepción de los límites, se designan α', β' y forman un nuevo intervalo $(\alpha' \dots \beta')$ donde $\alpha' < \beta'$. De la misma forma se busca los dos primeros números de la serie de números reales que pertenecen al intervalo $\alpha' < \beta'$ y se obtiene el intervalo $(\alpha'' \dots \beta'')$. Este procedimiento se puede aplicar continuamente y se consigue $(\alpha''' \dots \beta''')$, $(\alpha'''' \dots \beta''''')$, etc. Este procedimiento se conoce hoy en día como método de los intervalos encajados. Ahora se pueden dar dos casos.

Entweder die Anzahl der so gebildeten Intervalle ist Endlich, das letzte von ihnen sei $(\alpha^v \dots \beta^v)$; im Inneren desselben höchstens eine Zahl der Reihe liegen kann, so kann eine Zahl η in diesem Intervalle angenommen werden, welche nicht in der Reihe

¹⁷ “En el caso de que encontramos una serie infinita de números reales de diferentes tamaños entre sí, formada según alguna ley $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_v$, entonces siempre podemos determinar en cada intervalo dado $(\alpha \dots \beta)$ un número η que no se encuentre en esta serie, esto debe ser probado ahora.”(Traducción personal) Este último teorema se basa en que los números reales cumplen con el *axioma de Arquímedes*.

enthalten ist und es ist somit der Satz für diesen Fall bewiesen. (Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, 1932)¹⁸

En el caso de que la cantidad de los intervalos formados es finita, es fácil demostrar que en el último intervalo $(\alpha^v \dots \beta^v)$ existen números η que no están enlistados en la serie de números reales. Esto se explica porque solo puede haber un elemento dentro del intervalo $(\alpha^v \dots \beta^v)$, sin embargo, existen infinitos números reales en cada intervalo $(\alpha \dots \beta)$. Por lo tanto, se ha demostrado que la serie de números reales $\{\omega_v\}$ es incompleta, en el caso en que la cantidad de intervalos es finita.

Oder die Anzahl der gebildeten Intervalle ist unendlich groß, dann haben die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ weil sie fortwährend ihrer Grösse nach zunehmen, ohne ins Unendliche zu wachsen einen bestimmten Grenzwert α^∞ ; ein gleiches gilt für die Zahlen $\beta, \beta', \beta'', \dots$ weil sie fortwährend ihrer Grösse nach abnehmen, ihr Grenzwert sei β^∞ ; ist $\alpha^\infty = \beta^\infty$, so überzeugt man sich leicht, wenn man nur auf die Definition der Intervalle zurückblickt, daß die Zahl $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ nicht in unserer Reihe enthalten sein kann. (Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, 1932)¹⁹

En el segundo caso la cantidad de intervalos es infinita, sin embargo, debido a la densidad de los números reales, se puede suponer que los intervalos van a converger hacia un mismo número $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ que representa el valor límite tanto de los valores ascendientes de α , como de los valores descendientes de β . Este número η no puede estar en la serie de los números reales.

¹⁸ “O la cantidad de intervalos formados de esta manera es finita; sea el último de ellos $(\alpha^v \dots \beta^v)$; debido a que adentro del intervalo puede estar máximo un número de la serie de números reales, entonces podemos asumir que existe al menos un número η dentro del intervalo que no está contenido en la serie de números reales y el teorema queda comprobado para este caso.” (Traducción personal)

¹⁹ “O la cantidad de intervalos es infinitamente grande; debido a que el valor de los números $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ aumenta constantemente sin crecer hacia lo infinito, entonces tiene el límite determinado α^∞ ; de la misma manera el valor de los números $\beta, \beta', \beta'', \dots$ baja constantemente y tienen el valor límite β^∞ , $\alpha^\infty = \beta^\infty$; de esta manera recordando la definición de los intervalos, uno se convence fácilmente de que el número $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ no está contenido en nuestra serie.” (Traducción personal)

Si el número η perteneciera a la serie de los números reales, este número tuviera que ser un elemento de la serie de número reales con un índice determinado, de la forma que $\eta = \omega_p$. Esto, sin embargo, no es posible ya que η está contenido según su definición en el conjunto $(\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$, pero ω_p no. ²⁰

Finalmente podemos enunciar la conclusión deseada por Cantor de que en cualquier serie que intente enumerar a los números reales va faltar un número η o una cantidad infinita de números η . El conjunto de los números reales es innumerable (*über-abzählbar*). No es posible encontrar una correspondencia uno a uno entre los números reales y los números naturales.

En este breve trabajo del año 1874, se encuentra la primera demostración histórica de que existen diversos infinitos o varios números cardinales transfinitos, lo cual es el paso decisivo para la desmitificación del concepto del infinito. Lo mismo menciona Walter Puckert (1987, pág. 46):

In dieser Arbeit erfuhr die mathematische Öffentlichkeit erstmals die überraschende Tatsache, das es verschiedene Stufen des Unendlichen gibt, die einer mathematischen Analyse zugänglich sind. Das beinhaltete eine endgültige und höchst produktive Anerkennung aktual unendlicher Mengen in der Mathematik. ²¹

Finalmente me gustaría concluir este capítulo señalando que los conceptos básicos de la teoría de conjuntos de Cantor, surgieron como respuesta a problemas provenientes del Análisis. En este pequeño seguimiento de los trabajos de Cantor sobre series trigonométricas hemos encontrado, por un lado la primera definición de los números ordinales transfinitos

²⁰ Es obvia la razón de porqué el número η está contenido en el conjunto $(\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$, es justamente porque η por su misma definición está contenido en todos los intervalos derivables del intervalo inicial, sin embargo, es imposible que ω_p este contenido en el intervalo por la formación de los intervalos. El décimo número nunca va estar en el décimo intervalo sino en el quinto. Cantor demuestra de esta manera que si suponemos de que $\omega_p = \eta$, llegamos a la contradicción de que $\eta \in (\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$ y a la vez $\eta (= \omega_p) \notin (\alpha^{(p)} \dots \beta^{(p)})$. En conclusión el número η no puede estar en el intervalo.

²¹ “En este trabajo se enteró el público matemático por primera vez del sorprendente hecho de que existían diversas clases del infinito que son accesibles al análisis matemático. Esto lleva consigo mismo un reconocimiento absoluto y muy fructífero de los conjuntos infinitos actuales en la matemática.”(Traducción personal)

como la *derivada mayor* de un conjunto de puntos iterado infinitas veces, y por otro lado, a los números cardinales transfinitos, a partir de la correspondencia uno a uno entre conjuntos discretos y continuos.

Die grundlegenden Ideen, die am Beginn von CANTORs Weg zur Mengenlehre standen, sind die Idee der transfiniten Ordinalzahl- zunächst in der Gestalt von Ableitungsordnungen von Punktmengen –und die Idee der Klassifizierung von Mengen nach dem Prinzip der eindeutigen Zuordnung, d. h. die Idee der transfiniten Kardinalzahl in impliziter Form. (Puckert, 1987) ²²

Se han deducido los dos conceptos básicos- número ordinal y cardinal transfinito- que constituyen el fundamento de la teoría de conjuntos, estableciendo el puente entre las ocupaciones de Cantor (1870-1874) en el ámbito de la teoría de funciones, con el resto de los trabajos de Cantor, ya únicamente centrados en la teoría de conjuntos o *Mannigfaltigkeitslehre*.

2. EL INFINITO COMO PROBLEMA FILOSÓFICO

2.1. EL INFINITO EN LA GRECIA ANTIGUA

²² “Las ideas fundamentales que llevaron a Cantor al comienzo de la teoría de conjuntos es la idea del número ordinal transfinito- primero en forma de órdenes de derivación de un conjunto de puntos – y la idea de la clasificación de conjuntos bajo el principio de la correspondencia unívoca, esto significa la idea del número cardinal en forma implícita.

Anaximandro de Mileto fue probablemente el primer filósofo griego en afirmar que la substancia última que subyace al universo es ilimitada (Cohn, 1983, pág. 14). Él define esta substancia como *τό άπειρον*, lo no-limitado que abarca y guía a todo el Ser. Según eso, tanto la materia del que se compone el mundo, al igual que el espacio son cuantitativamente ilimitados o infinitos. Otros autores como Teichmüller (1874, págs. 52-54) objetan que Anaximandro solo quiso describir la indeterminación cualitativa del *arjé*.

Sin embargo, la obra de Anaximandro y su comentario por parte de Aristóteles dan a entender que lo “no-limitado” hace referencia tanto a la materia como al espacio del que está compuesto el universo. Esto tiene una considerable influencia en la obra de Anaxímenes y Diógenes de Apolonia, ambos optan por una substancia última infinita, el aire. Heráclito creía en el proceso infinito del devenir continuo y en una sucesión infinita de mundos (Zeller, 1878, pág. 688).

De la misma forma las “homeomerías” de Anaxágoras son infinitas en cantidad y variedad. Estas homeomerías, a diferencia de los átomos, pueden ser divididas continuamente. Aunque el mundo para este pensador es limitado, no lo es la materia que lo rodea (Ibid, pág. 1007). Esta doctrina se profundiza en la escuela atomista como lo evidencia la “mecánica” de Leucipo de Mileto y de Demócrito. Para todos los pensadores anteriores, y en general para la mayoría de los filósofos de la naturaleza, “lo infinito” es un atributo común y corriente, predicable sobre la materia que constituye al mundo físico.

Es la orden pitagórica la que por primera vez problematiza al infinito a partir del descubrimiento de la incomparabilidad o inconmensurabilidad del primer número irracional $\sqrt{2}$. Al medir las distancias de un pentágono regular, símbolo representativo de la orden, se descubre que no existe una proporción racional entre la diagonal d y la longitud de cualquier lado a .

En otras palabras, no existe un coeficiente racional que pueda expresar la relación entre estas dos longitudes $\frac{p}{q} \neq \sqrt{2}$, ($p, q \in Q$). Es una conclusión incomprensible para los pitagóricos, ya que en su cosmovisión armónica del universo todos los objetos deben corresponder a una mediada racional.

Es así como fue descubierto el primer número irracional $\sqrt{2}$, al que corresponde una serie decimal irregular que se puede expandir indefinidamente. El infinito surge por primera vez como algo “problemático” en la filosofía antigua. Este va ser el punto de partida para la postulación del monismo de Parménides y de las aporías de Zenón de Elea.

Parménides de Elea, hijo de Pitodoro y nacido probablemente en 515 a.C., fue alumno de Jenófanes de Colofón, aunque se le asocia más a las ideas del pitagórico Aminias (Diógenes Laercio, 1991, pág). La influencia pitagórica, es notable en el pensamiento de Parménides. En su poema *Sobre la naturaleza (Περὶ φύσεως)*, se evidencia el misticismo religioso en forma de la “Diosa” que revela a Parménides sus secretos, para que este pueda racionalmente elevarse a la vía de la verdad. Pero sobre todo se pone en evidencia la aspiración de que el ser humano pueda conocer la ley divina y entender racionalmente el universo.

Para Parménides el Ser es algo inmóvil, acabado, que excluye la posibilidad de movimiento y cambio. Aunque en el mundo sensible se observa claramente la existencia del movimiento, según Parménides, estos sucesos en el mundo sensorial son meramente una “apariencia” (φαινόμενον), una “opinión” (δόξα) opuesta a vía de la verdad. El Ser es “una” sola masa, continua y homogénea. Sin creador ni finalidad última que determine los sucesos del mundo. Sobre todo, el “ser es igual al pensar” (Fragmentos de Parménides, 1981, pág. 65), lo que es la primera identificación del ser con un principio abstracto. De esta forma, la omnipresencia del ser agota al universo sin dejar espacio para el no-ser. El no-ser resulta impensable e inentendible para Parménides.

Zenón de Elea, nacido aproximadamente en 489 a.C., es alumno de Parménides y es el primero en defender las ideas de su maestro, en contra de los argumentos pluralistas del Ser. Platón señala esto en su *Parménides*:

Comprendo ahora, Parménides, observo Sócrates, que Zenón no solo no quiere prescindir de tu amistad sino también de tu obra. Es realmente tu propio pensamiento lo que repite, aunque por el giro que le da, intenta hacernos creer que dice otra cosa. Pues tú, en tu poema afirmas que el Todo es Uno y nos ofreces hermosas pruebas de ello; y él, por su parte, dice que lo múltiple no existe y presenta en tal sentido muchas pruebas. (Platón, 1969, pág. 948)

Zenón de Elea es indiscutiblemente el fundador del método dialéctico, que constituye un precedente primitivo de la lógica aristotélica. Este método se basa en el uso de la reducción *ad absurdum* para evaluar la validez lógica de ciertos argumentos. De esta forma, es Zenón quien por primera vez en la humanidad introduce el principio de no-contradicción y la demostración por reducción al absurdo en la filosofía (Colli, 2006, págs. 44-45).

El método *reductio ad absurdum* consiste en derivar conclusiones contradictorias a partir de ciertas premisas, para demostrar la falsedad de tales premisas. Esto permite criticar a una de las premisas iniciales, aunque Zenón probablemente se contentaba en señalar las conclusiones ridículas obtenidas a partir de ella.

Zenón de Elea desarrolla cuatro argumentos basados en el principio lógico de la reducción *ad absurdum* para demostrar la no existencia del movimiento. Estos argumentos son hoy en día conocidos como las “paradojas del movimiento” de Zenón de Elea. La paradoja que resulta particularmente interesante para el análisis posterior de la concepción del infinito en la obra de Aristóteles, es la paradoja de Aquiles y la tortuga.

Aquiles, el hombre más veloz de la faz de la tierra, compite en una carrera imaginaria con una tortuga, probablemente uno de los animales más lentos que existe. Al iniciar la carrera, se le concede una ligera ventaja x_1 a la tortuga, mientras que Aquiles arranca en el punto de inicio x_0 . Cuando Aquiles recorre la distancia entre x_0 a x_1 , la tortuga habrá avanzado a un punto posterior x_2 . Este procedimiento puede continuar *ad infinitum*, por lo tanto la ubicación de Aquiles x_{n-1} siempre estará detrás de la posición de la tortuga x_n . La conclusión es obviamente contradictoria, ya que Aquiles no puede ser más lento que una tortuga. Según Zenón de Elea, esta contradicción evidencia la falsedad de la premisa inicial que presuponía la existencia del movimiento.

Una forma de “solucionar” esta aporía consiste en reconocer que la suma de infinitos valores puede tener un resultado finito. Esto se evidencia muy claramente a través de series convergentes, como $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots = 2$ o también esta $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \varphi$ (número áureo). En general, las series convergentes y las series geométricas demuestran fácilmente la falsedad del argumento que subyace a la paradoja de Aquiles y la tortuga (Murillo, 2015, págs.40- 45).

La mente observadora de Aristóteles, sin embargo, no poseía los conocimientos matemáticos del siglo XVII, pero estaba convencido de la existencia del movimiento. Es el primero que va someter al infinito a un análisis filosófico riguroso, a diferencia de los autores anteriores.

Aristóteles estudia en su *Física* a los conceptos que subyacen a los fenómenos naturales. A parte de un análisis exhaustivo del movimiento, examina lo infinito en forma de lo “continuo” *συνεχές* y de lo “ilimitado” *άπειρον*. Para Aristóteles, tanto la afirmación de que existe lo infinito, como su negación, traen dificultades consigo mismo (Cohn, 1983, pág. 37).

La afirmación de la existencia de lo infinito entra en conflicto con el concepto de los *cuerpos* que siempre están limitados por superficies, y con el de los *números* que siempre deben enumerar una cierta cantidad limitada. En cambio, la negación completa de la existencia del infinito implica que el tiempo tenga un comienzo y un fin, que el contar tenga un límite y que los números no pueden dividirse continuamente. Conclusiones absolutamente absurdas.

Aristóteles resuelve el problema considerando a lo infinito meramente como un posible “estado” de un número o de una extensión, pero nunca como una substancia misma. Es un atributo para un proceso hipotéticamente interminable. Como la sucesión de números naturales, a las que siempre se puede agregar otra unidad.

Por lo tanto, para Aristóteles no existe el infinito como un ente acabado, como *infinito actual*, sino meramente como un *infinito potencial*. Esto también lo comenta en su tercer libro de la física: “Das Unendliche aber existiert teils durch ein Hinzusetzen, Teils durch ein Wegnehmen. Da aber die Größe nicht aktuell unendlich ist, (...) bleibt nur übrig, dass das Unendliche der Potenz nach sei (Bedürftig, 2012, pág. 150)”.²³

Sin embargo, el infinito “potencial” (*δυνάμει*) no hace referencia a una posible propiedad que pueda poseer un ente, sino a un proceso inacabado o interminable. Para Aristóteles el infinito existe de la misma forma como el tiempo, es el suceso ilimitado de momentos finitos.

²³ “Lo infinito existe solo a través del añadir continuo, o del restar. Debido a que el infinito no es una magnitud actual, solo resta la posibilidad que el infinito sea potencial.” (Traducción personal)

Aunque cada momento particular es finito, se puede continuar la suma completa de todos los momentos indefinidamente, *ad infinitum*.

En conclusión, Aristóteles marca fuertemente la comprensión del infinito en la antigua Grecia. Tanto, que incluso en la edad medieval, en la modernidad y en la época contemporánea, se acepta la división entre infinito potencial/actual. Esta idea debía haber sido igual de dañina que el resto de los principios aristotélicos para la física moderna. La prohibición de la existencia del infinito actual fue uno de los mayores prejuicios que detuvieron el desarrollo de la investigación matemática (Cfr., Cantor, 1932, pág. 186).

Cabe mencionar que en el medioevo se identifica a Dios con el infinito actual, en las obras de Santo Tomás y de San Agustín. Posteriormente, en el Renacimiento, con autores como Giordano Bruno, la infinitud actual de Dios se transfiere al mundo (Lorenzen, 1957, pág.4). Sin embargo, el infinito actual como objeto matemáticamente determinable, no ha sido aceptado ni por matemáticos, ni por filósofos o teólogos hasta el siglo XIX.

2.2. EL INFINITO EN LA MODERNIDAD

En la modernidad, desde el siglo XVII hasta el siglo XIX, existe una mayor apertura hacia la cuestión del infinito actual, ya que este se emancipa de su envoltura religiosa y vuelve a ser principalmente un problema filosófico. Aún así, sigue habiendo una prohibición total de su inclusión en la matemática. Las palabras de Carl Friedrich Gauss a su amigo Heinrich Cristian Schumacher recogen esta postura histórica de forma paradigmática;

So protestiere ich gegen den Gebrauch einer unendlichen Grössen als einer *Vollendeten*, welcher in der Mathematik niemals erlaubt sind. Das Unendliche ist nur eine *façon de parler*, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstatet ist. (Heuser, 2008, pág. 218)²⁴

²⁴ “Así protesto en contra del uso del infinito como cantidades terminadas, cuya existencia nunca están permitidas en la matemática. El infinito es solo “una manera de hablar”, cuando realmente se quiere hablar de límites, a los que se acercan arbitrariamente ciertas proporciones, mientras que a otras les es permitido crecer sin restricciones.”(Traducción personal)

A pesar del rechazo al infinito actual como objeto matemáticamente determinable, se acepta el infinito actual *in concreto* en casi todos los filósofos modernos. Esto se evidencia en la escuela racionalista, en el pensamiento de Descartes en sus *Principios de la filosofía*, parte II, § 24, de Nicolas Malebranche en *De la recherche de la vérité* (Libro 3, Parte 2, Capítulo 6-7), de Gottfried Wilhelm Leibniz en *Opera philosophica* (Sección LIX, Capítulo XVII “De l’infinité”) y de Baruch Spinoza en su *Cogitata Metaphysica* (Parte I, Capítulo I – VII).

Lo mismo ocurre en la tradición empirista, donde destaca George Berkeley (*Treatise on human knowledge*, Parte I, § 128-131) y Locke, quien dedica el capítulo XVII del libro 2 del *Ensayo sobre el entendimiento* al infinito. El ser humano y su mente “finita” no es capaz de utilizar cantidades realmente infinitas. Esto implica que se reconoce la validez del al infinito en *concreto* pero no en *abstracto*.

2.2.1. EL INFINITO EN LA OBRA DE KANT

Kant evidencia una sorprendente fascinación por el infinito en casi todos sus trabajos filosóficos, es por eso que antes de exponer sobre el infinito de forma sistemática en el culmen de la filosofía trascendental, como antinomia de la razón humana, se hará una breve exposición del uso del infinito en las obras de la época pre-crítica de Kant, en la *crítica a la razón pura* (1781) en general, y finalmente como antinomia de la razón pura (*Antinomie der reinen Vernunft*).

2.2.2. LOS ESCRITOS PRE-CRITICOS DE KANT (1746-1770)

En su primer escrito filosófico *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte* (1746), Kant tiene una postura muy positiva hacia la existencia del infinito. Atribuye a la creación de Dios todas las diversidades y propiedades posibles. Pocos años después, en *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* (1755) declara de forma concreta que la extensión del universo es infinita:

Man kommt der Schopfungskraft Gottes nicht näher, wenn man denn Raum ihrer Offenbarung in einer Sphäre mit dem Radius der Milchstraße beschrieben,

einschließt, als wenn man ihn in eine Kugel beschränken will, die einen Zoll im Durchmesser hat. (Cohn, pág. 232)²⁵

Kant, en este aspecto, no solo sigue a Giordano Bruno en el sentido de que trata de derivar la infinitud del mundo físico de la infinitud perfecta de Dios, sino también acoge su afecto hacia el poder creador. Admira profundamente la infinitud del ser y de la naturaleza, que elevan la mente a un asombro casi “divino”. Cabe destacar la profunda re-valorización emocional hacia el infinito, que se lleva a cabo desde los griegos, donde se vincula el infinito con la imperfección, hasta los autores modernos, donde se resalta la perfección de la creación.

Esta discusión acerca de la infinitud de la naturaleza constituye la base para la primera antinomia de la razón pura. En la *Monadologia Physica* (1756), en cambio se propone de forma primitiva la segunda antinomia, que se ocupa de la pregunta por la división infinita. Esta contradicción resulta entre la metafísica racionalista de Leibniz y la geometría euclidiana. La metafísica sostiene que los cuerpos están formados por mónadas, por otro lado, la geometría demuestra que el espacio es infinitamente divisible. Sin embargo, ¿cómo es posible que el espacio se componga de cuerpos y que a la vez sea infinitamente divisible?

La respuesta de Kant es que las mónadas poseen un *spatium activitatis*, un campo de fuerza que impide que una substancia invada el espacio que ocupa otra substancia vecina. De esta forma las substancias “ocupan” el espacio sin ser realmente parte de este. En ese sentido el espacio es algo independiente de las substancias y estas ocupan el espacio de forma relacional, dando lugar a lo que se conoce como *fenómeno*. Es decir, aunque el espacio no es algo absolutamente independiente de los cuerpos, es una entidad previa a cualquier substancia. Por lo tanto, alguien que divida el espacio infinitamente, solo divide el espacio que ocupa un cuerpo, pero no al cuerpo mismo (Cfr., La aporía de la división en Kant, Gustavo Sarmiento, pág. 131).

En conclusión, Kant en su época pre-crítica es un gran seguidor del infinito, en cuanto que este constituye la extensión del universo y caracteriza particularmente a la continuidad del

²⁵ “Uno no se acerca a la fuerza creadora de Dios, si se describe al espacio de la creación encerrada en una esfera con el radio de la vía láctea, como si se quisiera limitarla en una bola de una pulgada.”(Traducción personal)

espacio. Sin embargo, al igual que sus contemporáneos, trata de explicar al infinito basándose en las intuiciones empíricas u ordinarias (*Gewöhnliche Anschauungen*). Esto lleva a Kant a reconocer que esta vía de respuesta es insuficiente, lo cual le motiva a abandonar este punto de vista en su época crítica.

2.2.3. EL INFINITO EN LA *KRITIK DER REINEN VERNUNFT* (1781)

Cabe señalar que el infinito tiene algunas funciones en la crítica de la razón pura, antes de llegar a las antinomias de la razón pura, que representan la parte culminante de la filosofía trascendental. En este trabajo se presentan solo dos de ellas: su lugar en la estética trascendental y su rol en la anticipación de la percepción (*Wahrnehmung*).

Tanto el último argumento del tiempo, al igual que su cuarto argumento, hacen uso del infinito. Con respecto al argumento del tiempo, Kant sostiene que la infinita extensión del espacio demuestra que este no es un concepto (*Begriff*) sino una intuición (*Anschauung*). Un concepto general no puede manifestar algo sobre el “tamaño” del espacio, sin embargo, el espacio es una entidad que es dada como infinita. Por lo tanto, el espacio no puede ser un concepto, sino debe ser una intuición pura. En la primera edición de la *Crítica*, Kant expone este razonamiento como el quinto argumento del espacio:

5. Der Raum wird als eine unendliche Größe gegeben vorgestellt. Ein allgemeiner Begriff vom Raum (der sowohl in dem Fuße, als einer Elle gemein ist,) kann in Ansehung der Größe nichts bestimmen. Wäre es nicht die Grenzenlosigkeit im Fortgange der Anschauung, so würde kein Begriff von Verhältnissen ein Principium der Unendlichkeit derselben bei sich führen.²⁶(Kant, 2010, pág. 87)

De forma parecida, la ilimitada sucesión del tiempo juega un rol importante en la argumentación del tiempo, el quinto argumento del tiempo, se basa en que la concepción de un tiempo limitado solo es posible a partir de la subyacente intuición de un solo tiempo infinito.

²⁶ “El espacio es imaginado como una cantidad infinita. Un concepto general del espacio (común en un codo o un pie) no puede manifestar nada con respecto al tamaño. Si no fuera por la ilimitación en la marcha de la intuición, ningún concepto de proporciones estuviera acompañado con un principio de la infinitud de las mismas.”(Traducción personal)

5. Die Unendlichkeit der Zeit bedeutet nichts weiter, als daß alle bestimmte Größe der Zeit nur durch Einschränkungen einer einigen zum Grunde liegenden Zeit möglich sei. Daher muß die ursprüngliche Vorstellung *Zeit* als uneingeschränkt gegeben sein. Wovon aber die Teile selbst, und jede Größe eines Gegenstandes, nur durch Einschränkung bestimmt vorgestellt werden können, da muß die ganze Vorstellung nicht durch Begriffe gegeben sein, (denn da gehen die Teilvorstellungen vorher,) sondern es muß ihre unmittelbare Anschauung zum Grunde liegen.²⁷ (Ibid., págs. 95-96)

Kant, sin embargo, le asigna una función aún más importante al infinito en el proceso de la percepción. Al tratar de caracterizar a las condiciones del conocimiento científico, también encuentra una máxima que se anticipa a la experiencia sensorial. Esta máxima es que toda experiencia es mediada por grados de intensidad, que inician en cero y pueden aumentar continuamente. A la variación de cada grado le corresponde un “momento”, este momento es percibido de golpe y no de forma sucesiva. Por lo tanto, el momento es una magnitud continua (*Stetige Größe*) que no se compone de partes discontinuas. El ser humano, de esta forma, *siempre* percibe un cierto grado de intensidad de alguna sensación. Para Kant esto significa que la propiedad principal de una sensación (*Empfindung*), no solo es poseer una realidad espacial y temporal, sino un determinado grado de intensidad.

En conclusión, Kant utiliza el infinito en los argumentos del espacio y del tiempo, para sostener que son intuiciones y no conceptos. Además caracteriza a la percepción de las sensaciones a través de niveles de intensidad, que constituyen cantidades continuas compuestas por infinitos “momentos” posibles. Esto le permite determinar de forma a-priori a todas las experiencias sensoriales, a parte de las intuiciones del espacio y del tiempo. En otras obras, como la *Kritik der Urteilskraft* (1790), se aplica el infinito en cuanto ilimitada potencia de los fenómenos naturales, para luego describir lo sublime (*das Erhabene*) como idea de la razón.

²⁷ “La infinitud del tiempo no significa otra cosa sino que toda magnitud determinada del tiempo es sólo posible mediante limitaciones de un tiempo único fundamental. Por eso la representación primaria tiempo tiene que ser dada como ilimitada. Pero cuando hay algo en lo cual las partes mismas y toda magnitud de un objeto solo pueden ser representadas determinadamente, mediante limitación, entonces, la representación total no puede ser dada por conceptos (pues éstos sólo contienen representaciones parciales) sino que ha de fundarse en una intuición inmediata.”(Traducción personal)

2.2.4. EL INFINITO COMO ANTINOMIA DE LA RAZÓN PURA

Las antinomias de la razón pura constituyen la segunda parte principal del segundo libro de la dialéctica trascendental y examina un tipo particular de conclusiones de la razón (*Vernunftsschlüssen*). Estas conclusiones *hipotéticas* se aplican a la síntesis objetiva de los fenómenos, es decir al mundo como totalidad (*das Weltganze*). Sin embargo, estos juicios conducen a tales contradicciones, que la razón se ve forzada a abandonarlos.

Hier zeigt sich nämlich ein neues Phänomen der menschlichen Vernunft, nämlich: eine ganz natürliche Antithetik, auf die keiner zu grübeln und künstlich Schlingen zu legen braucht, sondern in welche die Vernunft von selbst und zwar unvermeidlich gerät, und dadurch zwar vor den Schlämmer einer eingebildeten Überzeugung, den ein bloß einseitiger Schein hervorbringt, verwahrt, aber zugleich in Versuchung gebracht wird, sich entweder einer skeptischen Hoffnungslosigkeit zu überlassen, oder einen dogmatischen Trotz anzunehmen und den Kopf steif auf gewisse Behauptungen zu setzen, ohne den Gründen des Gegenteils Gehör und Gerechtigkeit widerfahren zu lassen. Beides ist der Tod einer gesunden Philosophie, wiewohl jener allenfalls noch die **Euthanasie** der reinen Vernunft genannt werden könnte. (Kant, 2010, pág. 450)²⁸

Estas antinomias no son un “error” de la mente, sino que reflejan la necesidad intrínseca de la razón humana para ampliar su validez a ámbitos cada vez mayores. En orden de esto trata de comprender al mundo como una unidad y describir sus propiedades. Sin embargo, esta indagación siempre conduce a la ruptura de leyes de la razón pura (*anti-nomias*). Por lo tanto, la razón humana, se encuentra en una encrucijada; por un lado no puede reducirse a estudiar lo limitado, pero tampoco es capaz de entender racionalmente lo ilimitado.

²⁸ “Pues aquí se manifiesta un nuevo fenómeno de la razón humana, a saber: una antitética enteramente natural, para la cual no se precisa cavilar ni tender lazos artificiosos, sino que la razón cae por sí misma en ella, y de manera inevitable; por ella, ciertamente, queda preservada del sopor de una convicción imaginaria, producido por una apariencia ilusoria meramente unilateral; pero a la vez es inducida a la tentación, ya de entregarse a una desesperanza escéptica, ya de adoptar un empeñamiento dogmático, poniéndose rígidamente en la cabeza ciertas afirmaciones, sin prestar oídos ni hacer justicia a los fundamentos de la parte contraria. Las dos [posiciones] son la muerte de una filosofía sana, si bien aquélla podría llamarse también, en verdad, la eutanasia de la razón pura.”(Trad. Mario Caimi, Editorial Losada)

Kant, en total, nombra cuatro antinomias de la razón pura, junto con su respectiva tesis y antítesis. Todas y cada una de ellas son reforzadas con una corta demostración indirecta. Aunque las cuatro antinomias analizan la idea cosmológica del “mundo entero” (*Weltganze*), se diferencian bastante en su contenido. Mientras que la primera antinomia tiene como objeto la infinitud de la extensión del mundo y la segunda antinomia la infinitud de la división de las partes que componen el mundo, la tercera y cuarta antinomias, en cambio, analizan por un lado, el rol de la causalidad en descripción de los fenómenos de la naturaleza, y por otro, la existencia de una razón última del mundo (*Weltgrund*). Solo las dos primeras antinomias se vinculan con el infinito y, por lo tanto, solo ellas serán expuestas aquí.

La primera antinomia de las ideas trascendentales (*Erster Widerstreit der transzendentalen Ideen*) es sobre la extensión del espacio y del tiempo. Kant propone primero la tesis de que el mundo posee de hecho un comienzo y que el espacio es igualmente limitado. “Die Welt hat einen Anfang in der Zeit, und ist dem Raum nach auch in Grenzen eingeschlossen.”²⁹(Kant, pág. 468).

La antítesis, en cambio, que propone Kant sostiene que tanto la extensión del espacio como del tiempo no posee ningún tipo de limitación: “Die Welt hat keinen Anfang, und keine Grenzen im Raume, sondern ist, sowohl in Ansehung der Zeit, als des Raumes, unendlich.”³⁰(Kant, *Ibid.*, pág. 469).

La segunda antinomia de las ideas trascendentales (*Zweiter Widerstreit der transzendentalen Ideen*) revela la contradicción de las sustancias compuestas. Es decir, se cuestiona por la infinita divisibilidad del mundo: ¿existen partes *simples* que limitan su división o no? Kant (2010, págs. 478-479) formula la *tesis* correspondiente de la siguiente forma: “Eine jede zusammengesetzte Substanz in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts als das Einfache, oder das, was aus diesem zusammengesetzt ist.”³¹ Seguida de la antítesis de la segunda antinomia, que sostiene que no existe ningún tipo de partes simples:

²⁹ “El mundo tiene un comienzo en el tiempo y es limitado en su extensión.” (Traducción personal)

³⁰ “El mundo no tiene comienzo, y no tiene límites en el espacio, sino es infinito con respecto del tiempo y del espacio.”(Traducción personal)

³¹ “Toda substancia compuesta en el mundo está compuesta por partes simples, y no existe más en todo lado que lo simple o aquello compuesto a partir de lo simple.” (Traducción personal)

“Kein zusammengesetztes Ding in der Welt besteht aus einfachen Teilen, und es existiert überall nichts Einfaches in derselben.”³² (Kant, 2010, Idem.).

En todas las antinomias, las tesis representan el punto de vista dogmático y las antítesis la perspectiva científico-empirista. Aunque ambas perspectivas reflejan la intención fallida de la razón pura de captar al mundo en su “totalidad”, la filosofía trascendental *tiene* que dar una respuesta a las antinomias (Cohn, pág. 249).

La respuesta a estas preguntas cosmológicas, sin embargo, no se puede obtener a través de la experiencia o estudiando los hechos, ya que las antinomias preguntan por la totalidad de los hechos. Estas preguntas únicamente se pueden resolver a partir del análisis teórico de la pregunta, al igual que los problemas matemáticos o los problemas de la moral pura. Justamente por eso Kant decide enfatizar su postura escéptica frente a las antinomias, desarrollada en el *fünften Abschnitt der Antinomie der reinen Vernunft*. Mientras que el mundo resulta muy pequeño para la mente siguiendo la tesis, el mundo es demasiado grande para la antítesis. En otras palabras, la razón humana no puede quedarse con lo limitado (*Bedingte*), pero tampoco es capaz de comprender a lo ilimitado (*Unbedingte*).

Posteriormente, Kant argumenta en el *sechsten Abschnitt der Antinomie der reinen Vernunft* que solo el idealismo trascendental puede generar una respuesta definitiva a las antinomias. En el fondo, ambas tesis y antítesis son equivocadas, ya que utilizan al *Weltganze* como si fuera una cosa-en-sí (*Ding-an-sich*), en lugar de tratarlo como un fenómeno (*Erscheinung*). Es decir, el mundo no es ni una cosa-en-sí finita, ni cosa-en-sí infinita, sino que el mundo simplemente no es una cosa-en-sí en general. Esto significa que ser infinito o finito, constituyen propiedades contrarias de un fenómeno y no propiedades contradictorias, como lo pretende transmitir la antinomia. A la vez, el hecho de que la suposición del mundo como cosa-en-sí conduce a contradicciones, demuestra claramente que el mundo debe ser un fenómeno.

En conclusión, para Kant la diferencia entre fenómeno y noúmeno (cosa-en-sí), es la clave para “resolver” a las antinomias de la razón pura. Sin embargo, de ninguna forma se acepta el infinito actual ni *in concreto* ni *in abstracto*. Es más, Kant utiliza la imposibilidad del

³² “Ninguna cosa compuesta en el mundo consiste en partes simples, y no existe en toda la parte algo compuesto por partes simples.” (Traducción personal)

infinito actual en sus demostraciones indirectas de la primera antítesis. Por lo tanto, incluso para Kant, y en general para todo el idealismo alemán, el infinito actual permanece incomprendido.

2.3. EL INFINITO EN LA OBRA DE CANTOR

Este subcapítulo se compone del análisis filosófico-teológico al que Cantor somete al infinito actual, en varias de sus obras. Especialmente los párrafos § 4-8 de las *Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen* (1883b), ofrecen una buena base para exponer la defensa filosófica del infinito actual en contra de todos los argumentos antiguos y modernos. Esto incluye una refutación completa de los argumentos aristotélicos, escolásticos, materialistas, positivistas, psicologistas y criticistas.

A continuación se dará un breve resumen de los principios filosóficos de la investigación matemática de Cantor. Estos contienen su postura ontológica frente a los objetos matemáticos, la relación peculiar entre la metafísica y la matemática, y finalmente el criterio de verdad para las definiciones matemáticas. Esta última postura puede ser considerada un precedente al formalismo de David Hilbert.

Adicionalmente se ofrece una breve síntesis sobre los distintos puntos de vistas acerca del infinito actual, que se han dado históricamente, retomando el texto *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche* (1885) de Cantor.

Para concluir este subcapítulo se hará una pequeña vinculación entre la actividad académica de Cantor y su relación con la iglesia católica. Aunque tuvo un trato muy cercano con algunos importantes jesuitas, debe defenderse ante la acusación de ser “hereje”. Cantor no solo responde ante estas acusaciones, sino que encuentra razones teológicas, expuestas en las *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten* (1887) y en los *Briefe* (1991), que comprueban la existencia del infinito actual.

2.3.1. DEFENSA FILOSÓFICA DEL INFINITO ACTUAL

Para Cantor (1932, pág. 372), el rechazo al infinito actual entre los filósofos, matemáticos y teólogos se basa en el error principal, un “*πρώτος φεύδος*”, que consiste en exigir que los números infinitos poseen *exactamente* las mismas propiedades que los números finitos. Este error tiene su origen en Aristóteles, su dogma “*infinitum actu non datur*” persiste en la obra de casi todos los pensadores escolásticos y modernos.

Sin embargo, el argumento principal de Aristóteles (Metafísica, Libro XI, cap.10) para la negación del infinito actual, está basado en una *petitio principii* ya que presupone de antemano que el concepto de los números se reduce a enumerar cantidades finitas. Cantor demuestra en ese trabajo que se puede “enumerar” u “ordenar” tanto conjunto finitos como conjuntos infinitos. Adicionalmente, el trabajo de 1874 demuestra que los conjuntos infinitos son matemáticamente determinables.

Otro argumento de Aristóteles, muy popular en la escolástica, es la “aniquilación de los números finitos” (Dauben, 1990, pág. 123). Según este argumento cualquier cantidad finita sería absorbida por una cantidad infinita. Por ejemplo, si a y b , son dos números donde $a < b$, y b fuera un número infinito “ ∞ ”, entonces a queda absorbido, ya que $a + \infty = \infty$. Este argumento es incorrecto, debido a los resultados de su teoría de tipos de orden, que demuestra claramente que se puede modificar un número transfinito al añadir un número finito, sin que este último sea “destruido”, $0,1,2, \dots, \omega, 1 \neq \omega$. Mientras que lo mismo no se aplica al posicionar un número transfinito después de una sucesión de números finitos, así que $0,1,2, \dots, \omega = \omega$. Aristóteles desconoce por completo este hecho, que caracteriza a los conjuntos infinitos. Para Cantor (1932, pág. 175) esta propiedad del infinito actual debe servir de estímulo, tanto en la matemática como en las ciencias naturales.

Después de Aristóteles, los argumentos más eficaces en contra del infinito actual fueron desarrollados durante el siglo XVII, en la obra de René Descartes, Thomas Hobbes, John Locke, George Berkeley, Baruch Spinoza y Gottfried W. Leibniz. Aunque sus sistemas de pensamiento divergen bastante, coinciden en su opinión acerca de lo infinito: al concepto de número siempre le debe corresponder una cantidad finita, y que el infinito actual solo se encuentra realizado, de forma no-modificable, en Dios o en el Absoluto.

Esta forma de infinito absoluto, resulta incomprensible para la mente humana. Por lo tanto, estos autores, especialmente Spinoza y Leibniz, excluyen completamente la posibilidad de números “infinitos”, ya que el infinito solo se encuentra, de forma “misteriosa” en Dios.

Cantor no está de acuerdo con eso, ya que con sus trabajos anteriores ha demostrado que, aparte de cantidades finitas, existen cantidades infinitas, lo “transfinito” o “suprafinito”, a las que les corresponden números definidos. Esto significa que las cantidades definibles no se agotan con los números finitos y que existen cantidades infinitas modificables. Por eso, Cantor (1932, pág. 176) sustituye el lema aristotélico “*infinitum actu non datur*” por su propio lema; “*Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt*”³³.

Uno de los mayores argumentos de los empiristas y racionalistas consiste en apelar a la “mente finita” (*endlicher Verstand*). El entendimiento humano está condicionado por su finitud, y puede pensar solo en números y cantidades finitas. Cantor (Idem.), de nuevo vuelve a encontrar la misma *petitio principii* en este argumento, que en el primer argumento de Aristóteles. De antemano, la mente esta “determinada” a solo poder pensar números finitos, sin dejar espacio para posibles números transfinitos.

Cantor responde, ante esto, que él ha demostrado que el ser humano es capaz, a pesar de sus limitaciones, de poder definir números transfinitos. Por lo tanto, sugiere, se debería ampliar el concepto de “mente limitada” o sustituirlo por “mente infinita”, significando con esto que el ser humano tiene la disposición ilimitada para generar progresivamente nuevos conjuntos infinitos de mayor cardinalidad.

De ahí, sigue un argumento de mayor índole matemático, los números transfinitos poseen propiedades que son disyuntas para números finitos. Por ejemplo, un número finito nunca puede ser par e impar a la vez, los números transfinitos en cambio son ambos. Esto para muchos matemáticos, como Kroenecker, es una razón de negar la existencia de los números transfinitos.

³³ Todas las formas finitas o infinitas son definidas y, con excepción de Dios, pueden ser intelectualmente determinables. (Traducción personal)

Cantor (1932, pág. 178) señala que nuevos números u objetos matemáticos no necesariamente deben tener las mismas propiedades que los números finitos. Los números complejos (compuestos de uno real y otro imaginario), por ejemplo, no tienen la propiedad de ser pares o impares, sin embargo, esto no es una razón para oponerse a su introducción en el análisis matemático. En cambio, una de las mayores diferencias entre números transfinitos y números finitos, está constituida por el hecho de que las operaciones aritméticas entre números transfinitos no son conmutativas.

Otra escuela que Cantor critica fuertemente es la doctrina panteísta de Spinoza y Hegel. Ambos cometen el error de confundir lo transfinito con lo Absoluto. De esta forma, no se distingue entre lo transfinito modificable como se presenta en la naturaleza y el infinito no-modificable realizado en Dios. Finalmente, Kant tampoco logra captar la posición correcta del infinito actual, pues describe lo Absoluto como si fuera el límite ideal de lo finito, mientras que este límite es meramente un *transfinitum*, al que le corresponde el menor número ordinal transfinito ω . Adicionalmente, Cantor (1932, pág. 174) opina que el tratamiento del infinito en las “antinomias de la razón”, es totalmente relativista y el punto más “bajo” de la filosofía trascendental.

Puede parecer que Cantor fue el único en defender la existencia del infinito actual, pero de hecho tuvo dos antecesores: G.W. Leibniz y Bernhard Bolzano. Aunque anteriormente se había nombrado a Leibniz como un autor que niega el infinito actual, también posee varios pasajes donde se pronuncia a favor del infinito actual:

Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur.³⁴ (Cantor, 1932, pág. 179).

Otro autor que se anticipaba significativamente a la postura de Cantor, es el matemático y filósofo alemán B. Bolzano. En su obra *Paradoxien der Unendlichkeit* (1851) analiza las dificultades lógicas vinculadas con el concepto del infinito. Según él, un análisis riguroso revela que todas las paradojas acerca de este tema son únicamente contradicciones aparentes.

³⁴ Yo estoy tan a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como es dicho vulgarmente, yo sostengo que el infinito actual la afecta en todas sus partes, en orden de demostrar más efectivamente las perfecciones de su autor. (Traducción personal)

Cantor destaca de esta obra la precisa distinción entre el infinito potencial, como “sincategoremático” y el infinito actual, como “categoremático”. Las propias *Grundlagen* ponen mucho énfasis en esta distinción, ya que algunos autores modernos fueron incapaces de comprenderla. A causa de eso, la mayoría de pensadores del siglo XIX como Wilhelm Wundt, Johann Friedrich Herbart, Karl Eugen Dühring e Immanuel Kant, solo aprecian al infinito potencial como algo valioso.

Bolzano es el primer autor de la modernidad que acepta “números infinitos” que puedan poseer la propiedad de ser actualmente infinitos. Sin embargo, Cantor crítica la forma como Bolzano manipula estos números sin ninguna rigurosidad lógica. Estos carecen de una fundamentación sólida. Por lo tanto, los párrafos § 29-33, donde se introduce el cálculo con números infinitos, resultan equivocados y sin sentido (Cantor, 1932, pág. 180).

A Bolzano le falta el concepto de la cardinalidad (*Mächtigkeitbegriff*) y de orden (*Anzahlbegriff*), para poder definir correctamente cantidades infinitas. Según Cantor, no se puede avanzar en la teoría de conjuntos, ni en la teoría del conocimiento, ni en lógica, sin estos dos conceptos fundamentales.

A pesar de estas diferencias, Cantor elogia repetidamente la exactitud de las ideas matemáticas y filosóficas de Bolzano acerca del infinito. Incluso su definición del continuo numérico como un conjunto “perfecto” es particularmente correcto, aunque insuficiente. Para Cantor, el continuo tiene un predicado más: es un conjunto “perfecto” y “conexo”. Aun así debe destacarse la agudeza de los pensamientos de Bolzano, como único verdadero antecesor de Cantor.

2.3.2. LOS PRINCIPIOS FILOSÓFICOS DE LA MATEMÁTICA DE CANTOR

Cantor (1932, pág. 181) adscribe a los números enteros, finitos o transfinitos, dos tipos de realidad. Estos números poseen una realidad “inmanente” o “intrasubjetiva”, en cuanto que son conceptos de nuestro entendimiento obtenidos a través de definiciones e inferencias lógicas. De esta forma, los números son objetos *abstractos* bien distinguidos que modifican el espíritu.

A parte de la realidad “inmanente” los números e ideas matemáticas, poseen también una realidad “transcendente” o “trans-subjetiva”. Esto significa que los números no solo son objetos abstractos, sino objetos *concretos* que se representan en la naturaleza. Así, las diversas clases de números (I), (II), (III), ... son representaciones de potencias que se encuentran realizadas en la naturaleza.

Cantor, considera esta postura ontológica totalmente “realista”, por un lado, e “idealista”, por otro lado. Los números son objetos reales del mundo, pero co-existen en forma de conceptos abstractos accesible por el entendimiento humano. Sin embargo, ambos tipos de realidades siempre se encuentran unidos en un ser, ya que si existe algún concepto matemático, también debe tener algún correlato en el mundo físico.

La tarea de encontrar este correlato le corresponde, según Cantor (1932, Ibid.), indiscutiblemente a la *metafísica*. Este principio de conocimiento coincide con el sistema filosófico de Platón, Hegel y Spinoza. En palabras de este último, citadas de la *Ética demostrada según el orden geométrico* (Parte II, Proposición VII): “ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum”³⁵.

Para Cantor existe una relación intrínseca entre la metafísica y la matemática. Los descubrimientos de la matemática inspiran constantemente a las tareas de la metafísica. Sin embargo, la matemática no depende de la metafísica, ya que en la construcción de sus ideas solo tiene que respetar la realidad inmanente. Esto privilegia a la matemática frente a las ciencias naturales, que dependen claramente de los hechos de la realidad trascendente. Es por eso, que según Cantor (1932, pág. 182), a la matemática pura se le debería llamar “matemática libre” (*freien Mathematik*).

Una teoría matemática es “verdadera” cuando sus términos y definiciones no son contradictorios. Es decir, los nuevos conceptos que se desean introducir en la matemática deben ser coherentes con los conceptos y principios ya existentes. Los números que cumplen con esta condición pueden ser considerados “verdaderos” y “reales” en la matemática. De esta forma los números complejos, números irracionales y los números transfinitos poseen el mismo nivel ontológico que los números finitos.

³⁵ “El orden y las conexiones de las ideas, es el mismo que el orden y las conexiones entre las cosas”.

La introducción de un nuevo concepto matemático procede generalmente de la siguiente forma: se comienza con un “signo” A, al que se atribuyen propiedades ya definidas. Después se establecen las relaciones que posee este signo con los objetos ya existentes y se asegura que no existen contradicciones. De esta forma el “signo” A se convierte en el “concepto” A, completamente definido.

Muchos de los grandes hallazgos de Bernhard Riemann, Niels H. Abel, Augustin L. Cauchy, Carl F. Gauss, Carl G. J. Jacobi, Peter G. L. Dirichlet, Charles Hermite y Karl Weierstraß, no pudieron haber dado lugar a la fundación moderna de la teoría de funciones, si se hubiera buscado la constante confirmación metafísica de sus ideas innovadoras. Es más, aunque estos conceptos fueron desarrollados sin tomar en cuenta la realidad trascendente, ya encontraron incontables aplicaciones en la mecánica, astronomía y física (Cantor, 1932, pág. 182). Lo mismo ocurre con los avances en la teoría de ecuaciones diferenciales, gracias a los trabajos de Lazarus Fuchs y Henri Poincaré. Finalmente, no hubieran sido posibles los trabajos magistrales de Julius W. R. Dedekind y de Leopold Kronecker en el ámbito del álgebra, sin la introducción de los números “ideales” por parte de Ernst Kummer.

Aunque la matemática se encuentra emancipada de las “ataduras” metafísicas, la matemática aplicada, es según su fundamento (*Grundlagen*) y fines (*Zielen*) esencialmente metafísica. Solo gracias a estas orientaciones tiene la fuerza de ser capaz de la explicación y averiguación (*Ergründung*) de los fenómenos naturales.

2.3.3. LO TRANSFINITO EN LA NATURALEZA

Cantor distingue precisamente entre números reales (*reellen Zahlen*) y los números *reales*. Cantor estaba convencido que sus números transfinitos, no solo son formales, sino números *reales*. Esta distinción se pierde en las traducciones al inglés y al francés, sin embargo, es importante ya que los números reales (*reellen Zahlen*) describen un conjunto de números que se delimita del conjunto de los números complejos. Los números *reales* en cambio describen una propiedad ontológica de los números (Dauben, 1990, pág. 126).

A finales de 1884, el matemático sueco Gösta Mittag-Leffler se dirige a Cantor en una carta, con el pedido de mostrar algunas aplicaciones de los números transfinitos en otras ramas

científicas. Debido a eso, en 1885, publica *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n -fach ausgedehnten stetigen Raume G_n* , donde defiende dos hipótesis muy interesantes acerca de la materia y el éter.

Retomando el lenguaje de la *Monadologie* de Leibniz, manifestó dos preguntas: ¿Qué potencia tiene el conjunto de todas las mónadas materiales (*Körpermaterie*)?, ¿qué potencia posee el conjunto de todas las mónadas del éter (*Äthermaterie*)? Su respuesta es la siguiente: “In dieser Beziehung habe ich mir schon vor Jahren die Hypothese gebildet, daß die Mächtigkeit der *Körpermaterie*, welche in meinen Untersuchungen die *erste* Mächtigkeit nenne, daß dagegen die Mächtigkeit der *Äthermaterie* die *zweite* ist.”(Cantor, 1932, pág. 276).³⁶

Aunque Cantor no demuestra estas hipótesis, sugiere que la teoría de conjuntos aplicada de esta forma a la naturaleza, puede contribuir enormemente a la física y puede ayudar a explicar fenómenos naturales, incluyendo las propiedades químicas de la materia, la luz, el calor, la electricidad y el magnetismo.

De la misma forma como los números irracionales se vuelven algo “concreto”, a través de su representación geométrica ($\sqrt{2}$, por ejemplo, como diagonal de una cuadrado unitario), los números transfinitos habrían ganado un nuevo nivel de objetividad, por medio de sus representaciones como conjuntos infinitos de mónadas corporales o mónadas de éter. Es más, según Cantor, la mera posibilidad de poder aplicar los números transfinitos a términos físicos evidencia claramente su propia existencia.

Otra forma de afirmar la existencia *in concreto* de los números transfinitos, es utilizando el “finitismo” de Kroenecker. Este sostiene que solo los números naturales existen realmente, ya que en el mundo físico se encuentran objetos de los que se puede abstraer estos números. Por lo tanto, el conjunto completo de los números naturales N , el “*transfinitum*”, posee el mismo estatus ontológico que cualquier número finito n .

³⁶ Con respecto a esta relación, hace ya varios años he desarrollado la hipótesis que la cardinalidad (potencia) de la *materia corporal* es igual a lo que yo llamo en mis investigaciones la *primera cardinalidad transfinita*, en cambio la cardinalidad de la materia del *éter* es la segunda.

2.3.4. CLASIFICACIÓN DE LOS DISTINTOS PUNTOS DE VISTA ACERCA DEL INFINITO ACTUAL

En una carta al matemático G. Erneström de 1885, *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*, Cantor resume los distintos puntos de vista acerca del infinito actual que se han dado en la historia de la humanidad. Según Cantor (1932, pág. 372), se puede cuestionar al infinito actual de tres formas distintas:

1. Como “*Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*” o como lo Absoluto.
2. Como “*concreto seu natura naturata*” o como “*Transfinitum*”.
3. Como “*abstracto*” o en forma de los números transfinitos.

Si primero uno se enfoca en los últimos dos puntos, se pueden caracterizar cuatro posiciones frente al infinito actual. La primera posición consiste en la negación tanto del infinito actual *in concreto* como *in abstracto*. Seguidores de esta orientación son Abbé Moigno, Augustin Cauchy, Hyacinthe-Sigismond Gerdil, los positivistas del siglo XIX y los materialistas del siglo XVIII.

La segunda postura consiste en la aceptación del infinito actual *in concreto* pero no *in abstracto*. Locke, Spinoza, Leibniz, Descartes y Hermann Lotze pueden ser considerados representantes de esta postura. Mientras que la tercera postura, es al revés, afirma la existencia del infinito actual *in abstracto*, pero no *in concreto*. A esta postura pertenece la mayoría de pensadores neo-escolásticos del siglo XIX, como Tommaso Maria Zigliara, Louis Billot, Albert Farge, Constantin Gutberlet, inspirados por la encíclica neo-tomista *Aeterni Patris (De philosophia Cristiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda)* (1879) del papa León XIII.

La cuarta postura que se puede deducir, afirma el infinito actual tanto *in concreto* al igual que *in abstracto*. Para Cantor (1932, pág. 373) esta postura es la única correcta y verdadera de las cuatro opciones. Además, él es el primero en la historia del pensamiento que defiende abiertamente esta postura. Finalmente, si también se toma en cuenta la pregunta por el infinito actual en forma de lo Absoluto, se obtiene ocho distintos puntos de vista acerca de la existencia del infinito actual. En conclusión, todas las ocho posturas se encuentran

defendidas por ciertas escuelas filosóficas, aunque Cantor añade críticamente que en ciertos pensadores no es posible asignarles a ninguna de las clases, porque no toman una postura explícita frente al problema del infinito.

2.3.5. LA RECEPCIÓN CATÓLICA DEL INFINITO ACTUAL

Debido a la encíclica *Aeterni Patris* de León XIII, que buscaba una reconciliación entre la ciencia moderna y los principios del cristianismo, se dio una apertura para la teoría cantoriana del infinito, entre los pensadores católicos neo-tomistas. Uno de sus representantes principales en Alemania era el teólogo y filósofo Constantin Gutberlet.

Este publica en 1886 *Das Problem des Unendlichen*, donde manifiesta que el debate acerca del infinito ha alcanzado una nueva fase gracias a los trabajos filosófico-matemáticos de Cantor. Su preocupación principal es explicar correctamente el reto que significan los números transfinitos frente a lo absolutamente infinito, Dios. Cantor le sugiere a Gutberlet que los números transfinitos no cuestionan la autoridad de Dios, sino, al contrario, evidencian su perfección.

Gutberlet fusiona las ideas matemáticas de Cantor, con su propia doctrina teológica. De esta forma surge un argumento muy interesante en defensa del infinito actual, haciendo uso de la idea de Berkeley de que Dios es garantía de la realidad externa. En pocas palabras, él sostiene que Dios mismo asegura la existencia de los números transfinitos de Cantor (Dauben, 1932, pág. 143).

De la misma forma Dios confirma la existencia de los números irracionales, de los números complejos, del valor exacto de π o e , etc. Y no solo eso, Dios posee las soluciones a todos los posibles problemas matemáticos, como el de la hipótesis del continuo. Gutberlet añade que incluso el intelecto de Dios, partiendo de la premisa que la mente de Dios es inmóvil, constituye un conjunto infinito acabado de pensamientos. De esta forma, una persona debe aceptar la existencia del infinito actual, o está obligada a abandonar la idea de la eternidad e infinitud de la mente absoluta de Dios.

A parte de la relación epistolar con Gutberlet, Cantor estaba en contacto con muchos pensadores católicos, en su mayoría jesuitas, como Tilmann Pesch, Thomas Esser, Joseph

Hontheim, Ignatius Jeiler y el cardenal Johannes Franzelin. Todo ellos coinciden en su interés por revivir a la filosofía escolástica en el sentido de la *Aeterni Patris*. Es por eso que estudian en detalle a los avances de las ciencias exactas del siglo XIX, y con particularidad la teoría de conjuntos de Cantor. Una de las mayores cuestiones problemáticas de la teoría de conjuntos para estos pensadores, es la afirmación de la existencia del infinito actual *in concreto* o como *natura naturata*. Principalmente el cardenal Franzelin ve en la afirmación del infinito actual *in concreto*, el peligro de caer en el panteísmo, que es condenado formalmente por el Vaticano a partir del año 1867.

Es por eso que Cantor manda una carta a Franzelin, el 17 de diciembre de 1886, con un “pequeño ensayo”, para aclarar las diferencias entre el infinito actual *in concreto* y lo absoluto. Este “pequeño ensayo” es *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche* (1885), donde Cantor recupera la distinción tomista *natura naturata* para designar al mundo creado, y *natura naturans* para distinguir al creador del mundo. Franzelin responde en una carta del 25 de diciembre, agradecido por las aclaraciones de Cantor y admite que el “infinito actual” toma una postura favorable frente al catolicismo. Lo único que sigue molestando a Franzelin es la defensa del *transfinitum in natura naturata*, insostenible para este, debido a que parece cometer el “error” del panteísmo (Meschkowski, 1991, pág. 252). Finalmente, Franzelin exige a Cantor que profundice las características que distinguen a las diferentes manifestaciones del infinito actual. Cantor responde el 22 de enero con las siguientes precisiones: “Dementsprechend unterscheide ich ein “Infinitum aeternum increatum sive Absolutum”, dass sich auf Gott und seine Attribute bezieht, und ein “Infinitum creatum sive Transfinitum”, dass überall dort ausgesagt wird, wo in der natura creata ein actual Unendliches constatiert werden muß (...).” (Meschkowski, 1991, pág. 254)

³⁷.

Cantor sigue en su argumentación y da dos razones por las cuales se debe aceptar la existencia del “*Infinitum creatum*”. El primer argumento, a-piori, parte de la premisa que a partir de la perfección de Dios se puede deducir la *posibilidad* de la creación de los números transfinitos. Finalmente, por la omnipresencia (*Allgüte*) y majestuosidad (*Herrlichkeit*) de Dios, se concluye la *necesidad* de la creación del *transfinitum*. El segundo argumento es a-

³⁷ “De forma correspondiente diferencio entre un “Infinitum aeternum increatum sive Absolutum”, que se refiere a Dios y sus atributos, y un “Infinitum creatum sive Transfinitum”, que se declara en todas aquellas partes donde se manifiesta el infinito actual en la natura creata.” (Traducción personal)

posteriori y consiste en la suposición de que los fenómenos de la naturaleza se pueden explicar, con mayor precisión, con la hipótesis de la existencia del *transfinitum*, que sin esta. Por lo tanto, conviene aceptar al infinito actual *in concreto*.

El cardenal Franzelin responde ante estas aclaraciones en una carta del 26 de enero de 1886, de forma muy complacida porque el *transfinitum* “no representa ningún peligro para las verdades religiosas” (Meschkowski, 1991, pág. 256). Esta aceptación del infinito actual *in concreto* por parte de un cardenal, debió haber sido muy alentador para un hombre tan religioso como Cantor. Aun así, Franzelin critica el argumento de la *necesidad* de la creación de los números transfinitos, puesto que entra en contradicción con una de las propiedades principales de Dios: su *libertad* absoluta en la creación. Se refiere al “argumento a-piori” de Cantor en defensa del infinito actual *in concreto*, aunque acepta provisionalmente la existencia del *transfinitum* en la naturaleza. Cantor responde pocos días después, que nunca cuestionaría la libertad de Dios y que la creación tiene que haber sido libre. Para él no fue necesario el acto metafísico de la creación de los números transfinitos por parte de Dios, sino la captación de estos por la mente de los seres humanos.

En general para Cantor, el pensamiento cristiano y la religión tiene un lugar privilegiado en su investigación científica. En una carta a Mittag-Leffler del 23 de diciembre del año 1883, Cantor le manifiesta que él es netamente “la herramienta de un poder mayor” (*Werkzeug einer höheren Macht*), que se ha manifestado ya hace miles de años en Arquímedes y Euclides. En otra carta al mismo Mittag-Leffler, unos meses después, del 31 de enero de 1884, se considera “un reportero fiel” de Dios que puede decidir únicamente sobre la forma y el estilo de sus trabajos, pero no sobre su contenido.

Cantor no solo creía que la teoría de los conjuntos le había sido revelada directamente por Dios, sino que él es el elegido para cumplir con la tarea de iluminar al resto de la humanidad con la exposición de los números transfinitos (Dauben, 1990, pág.147). Especialmente a la iglesia católica debía ayudarla a evitar cualquier error en la incorporación correcta del infinito a su doctrina. Es por eso que comenta en una carta a Charles Hermite, a comienzos de 1894, que ha sido la gracia de Dios quien le ha guiado desde la investigación matemática a la importancia de asuntos teológicos y filosóficos:

But now I thank God, the all-wise and all-good, that He always denied me the fulfillment of this wish [for a position at university in either Göttingen or Berlin], for He thereby constrained me, through a deeper penetration into theology, to serve Him and His Roman Catholic Church better than I have been able with my exclusive preoccupation with mathematics.(Dauben, Idem.)³⁸

En conclusión, Cantor tiene una relación muy buena con la mayoría de pensadores católicos del siglo XIX, aunque inicialmente se debió defender contra la acusación de ser panteísta, una herejía según el catolicismo. Es tan grande la aceptación, que Cantor encuentra en la iglesia católica, en comparación con el poco reconocimiento entre matemáticos alemanes, que llega a reconocer a la teología como su “verdadera profesión”. Otros autores objetan que la religiosidad de Cantor, en esta parte de su vida, se debe a su frustración con la hipótesis del continuo y a las críticas de Kroenecker. Aun así, debe reconocerse la importancia que posee la fe católica para la vida persona y para la investigación científica de Cantor.

³⁸ “Pero ahora yo agradezco a Dios, el todo-poderoso y todo-bueno, que me ha negado el cumplimiento de mi deseo (de una posición en la Universidad de Göttingen o en la de Berlín), él me ha obligado, a través de un penetración más profundo en la teología, servirle a él y a su iglesia católica romana, mejor de lo que yo he sido capaz con mis preocupaciones exclusivamente matemáticas.” (Traducción personal)

CONCLUSIONES

En un primer punto se evalúa la incidencia de la obra de Cantor en la filosofía y la teología del siglo XX, en el segundo punto se analiza la gran importancia de las investigaciones de Cantor para el ámbito de la matemática, lógica y computación. Específicamente, este trabajo ha logrado verificar la hipótesis central de la disertación: los métodos formales pueden ayudar a responder o a analizar con mayor rigurosidad problemas filosóficos, lo que se ha mostrado a partir de la elaboración matemática del concepto del infinito por parte de Cantor.

1. Las implicaciones de las investigaciones matemático-filosóficas de Cantor en la filosofía y en la teología:

- Gracias a la argumentación filosófica de Cantor, el término del infinito actual *in abstracto* es aceptado universalmente en la filosofía.
- La filosofía de la matemática de Cantor tiene una fuerte influencia en la fundamentación filosófica del formalismo de Hilbert.
- Las consideraciones filosóficas acerca del infinito de Cantor contribuyen esencialmente a la lógica y a la filosofía analítica del siglo XX.
- Cantor logra la aceptación del infinito actual por parte de la iglesia católica.
- Cantor enriquece a la teología con una descripción más exacta de uno de los atributos principales de Dios: la infinitud. Además encuentra argumentos teológicos que afirman hechos científicos.

2. Las implicaciones de las mismas investigaciones para la matemática:

- Las paradojas de la teoría de conjuntos ingenua, como la paradoja Burali-Forti (1897), la paradoja de Russell (1901), o la existencia de conjuntos “inconsistentes” en general, llevaron a la así llamada *Grundlagenkrisis* (crisis de fundamento) de las matemáticas.
- Como respuesta a estas antinomias surge la axiomatización de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos (ZFC), la axiomatización de Neumann-Bernays-Gödel (NBG), y la teoría de tipos de Bertrand Russell desarrollada en los *Principia mathematica*.
- Hilbert presenta en 1900, en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos, su “programa”, que contiene 23 problemas matemáticos que deben resolverse en el

siguiente milenio, para asegurar el progreso de las matemáticas y de las ciencias naturales.

- El primer problema del programa de Hilbert, es el gran problema matemático propuesto y no resuelto por Cantor: la hipótesis del continuo.
- Hilbert desarrolla los primeros criterios meta-matemáticos (consistencia, completitud y decidibilidad). Como respuesta, Gödel, en parte para señalar las limitaciones del programa de Hilbert, demuestra en 1929 la *Vollständigkeit des Logikkalküls* (Completitud de la lógica de predicados) y en 1931 los dos *teoremas de la incompletitud*.
- El primer teorema de la incompletitud, es un directo ataque a los objetivos principales del programa de Hilbert. Sostiene que todo sistema formal F, suficientemente fuerte para representar a la aritmética de Peano, no puede ser libre de contradicciones y completo a la vez. El segundo teorema de incompletitud, le da el golpe final al programa de Hilbert: un sistema formal F no puede demostrar su *Widerspruchsfreiheit* (consistencia) por sí mismo. Por lo tanto, la matemática no puede demostrar que es un sistema formal libre de contradicciones.
- Mientras que Gödel demuestra en 1938 que la afirmación de la hipótesis del continuo es compatible con los axiomas de ZFC, Paul Cohen, a través del método del *forcing* (forcejeo), demuestra en 1963, que también la negación de la hipótesis del continuo se puede añadir a los axiomas de ZFC, sin causar ninguna contradicción. La hipótesis del continuo, al igual que el axioma de elección, es un postulado *independiente* de ZFC.
- Esto significa que Cantor finalmente tuvo razón acerca de la hipótesis del continuo, ya que a partir de los axiomas de ZFC no puede comprobarse la falsedad de esta hipótesis. Cabe mencionar que Cantor probablemente no hubiera entendido esta solución, por su concepción determinista de la matemática.
- Las investigaciones de Gödel inspiran a Alonzo Church y Alan Turing, en 1936, a estudiar el *Entscheidungsproblem* (problema de la decisión), que consiste en la hipótesis de que para todo sistema formal S, existe un método efectivo T, que puede decidir si una fórmula bien formada (según la gramática formal de S) cualquiera pertenece o no a S. Es decir, ¿existe un algoritmo que pueda demostrar que cualquier fórmula bien formada también es un teorema del sistema formal S?
- La respuesta negativa a este problema generó la primera máquina de Turing, una definición exacta de algoritmo y demostró por primera vez los límites de la

- calculabilidad (*Berechenbarkeit*). Estas históricas investigaciones dan lugar a los fundamentos de la teoría de la complejidad, la computación y la teoría de recursión.
- De esta forma, la teoría de conjuntos no solo colaboró en el descubrimiento de la teoría axiomatizada de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, que constituye el fundamento de la matemática moderna, sino que fundamentó indirectamente la meta-matemática, la informática y la computación. Es indudable que las investigaciones de Cantor contribuyeron fundamentalmente al desenvolvimiento de las matemáticas hasta el día de hoy.
 - Es más, casi todas las ramas de la matemática del siglo XX fueron descubiertas o formalizadas a partir de la teoría de conjuntos, como la topología (punto de acumulación), la geometría fractal (dimensión), el análisis (axiomatización de los números reales, y series fundamentales), la teoría de juegos (teorema de Zermelo), la teoría de probabilidades (espacios muestrales enumerables, cuya axiomatización se da partir de ZFC por Kolmogorov) y la matemática intuicionista de L. E. J. Brouwer.
 - En conclusión las ideas matemáticas de Cantor fueron sumamente importante para la matemática contemporánea, además de que muestran una armonía ejemplar entre filosofía y matemática. Por un lado, los números transfinitos resuelven el problema filosófico del infinito, y por otro, las preguntas filosóficas resultantes, las paradojas de la teoría de conjuntos, guiaron esencialmente el desarrollo de las investigaciones matemáticas en los siglos XX y XXI.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C. (2013). *Bezaubernde Beweise*. Heidelberg: Springer.

Aristóteles. (1970). *Metafísica* . Madrid : Gredos .

- Bedürftig, T. (2012). *Philosophie der Mathematik*. Berlin: De Gruyter.
- Berkeley, G. (2002). *Treatise concerning the Principles of Human Knowledge*. Dublin: Trinity College.
- Cohn, J. (1896). *Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant*. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann.
- Cantor, G. (1870a). Über einen die trigonometrischen Reihen die betreffenden Lehrsatz . *Crelles Journal* 72, 130-138.
- Cantor, G. (1870b). Beweis, daß eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt. *Crelles Journal* 72, 139-142.
- Cantor, G. (1872). Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5, 123-132.
- Cantor, G. (1873). Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle*, 34-42.
- Cantor, G. (1874). Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für reine und angewandete Mathematik* 77, 258-262.
- Cantor, G. (1878) *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*. *Crelles Journal* 84, 242-258.
- Cantor, G. (1879a). Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Göttinger Nachrichten*, 127-135.
- Cantor, G. (1879b). *Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten I*. *Mathematische Annalen* Bd. 15, 1-7.
- Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. *Mathematischen Annalen* 21, pág. 453-458.
- Cantor, G. (1885a). *Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche*. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, pág. 224-233.
- Cantor, G. (1885b). *Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n -fach ausgedehnten stetigen Raume G_n* . *Acta mathematica* 7, 105-124.

- Cantor, G. (1887). *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten I*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 81-125.
- Cantor, G. (1890-91). *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung Bd 1, 75-78.
- Cantor, G. (1895). *Beiträge zur Begründung der Mengenlehre*. Mathematische Annalen 46, 481-512.
- Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer Verlag.
- Cohen, P.J. : (1963) *The independence of the continuum hypothesis*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States 50, 1143-1148.
- Colli, G. (2006). *Zénon de Elea*. México D.F. : Sexto piso editorial.
- Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. New Jersey: Princeton University Press.
- Dauben, J. W. (1975). *The invariance of dimension: Problems in the early development of set theory and topology*. Historia Mathematica 2, 273-288.
- Dedekind, R. (2013) *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: Edition Opera-platonis.de .
- Dedekind, R. (2013) *Was sind und was sollen die Zahlen ?* . Braunschweig: Edition Opera-platonis.de .
- Descartes, R. (2009). *Los principios de la filosofía*. Barcelona: Alianza.
- Forster, O.
- Fraenkel, A. (1930). *Georg Cantor*. Jahresbericht der DMV 39, 189-266.
- Fraenkel, A. (1935). *Zum Diagonalverfahren Cantors*. Fundamenta Mathematicae 25, 45-50.
- Fraenkel, A. (1966). *Abstract Set Theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Fraenkel, A. (1976). *Teoría de conjuntos y lógica*. Ciudad de México: UNAM.

- Gödel, K. (1947). "What is Cantor's continuum problem?" *The American Mathematical Monthly* 54, 515–25.
- Gödel, K. (1986). *Russels mathematische Logik*. In: Alfred North Whitehead, Bertrand Russell: *Principia Mathematica*. Vorwort, S. V–XXXIV. Suhrkamp Verlag.
- Grondin, J. (2006). *Introducción a la metafísica*. Barcelona : Herder.
- Gutlerbet, G. (1886). *Das Problem des Unendlichen*. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 88, 179-223.
- Heuser, H. (2008). *Lehrbuch der Analysis I*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Hilbert, D. (1925). *Ueber das Unendliche*. *Mathematischen Annalen* 95, 161-190.
- Hilbert, D. (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie. *Mathematische Annalen* 104, 485-494.
- Hume, D. (1999). *An Enquiry Concerning Human Understanding*. New York: Oxford University Press.
- Hume, D. (1984). *Tratado sobre la naturaleza humana*. Madrid: Orbis .
- Hull, L.W.J.: (2011). *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Crítica.
- Jacobi, C.G.J. (1847). *Notiz u. A.Goepel*. *Crelles Journal* 35, p.314.
- Kant, I. (1996) *Vorkritische Schriften I (1746-1768)*. Berlin: Suhrkamp Verlag.
- Kant, I. (2010). *Kritik der reinen Vernunft*. Stuttgart: Reclam Verlag.
- Kleene, S.C. (1971). *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Laplace, P. S. (1902). *A philosophical Essay about Probabilities*. London : Chapman .
- Lorentzen, P. (1957). *Das Aktual-Unendliche in der Mathematik*. *Philosophia naturalis* 4, 3-11.
- Locke, J. (1999). *An Essay Concerning Human Understanding*. New York: The Pennsylvania State University.
- Martínez, J. (1977). *Aleph cero*. Panamá: Ediciones de la guardia nacional.
- Melguizo, A. (2006). *Estudio sobre Joseph Fourier*. Madrid: UAM.

- Merian, P. (1860). *Die Mathematiker Bernoulli*. Basel: Schweighauresche Buchdruckerei.
- Meschkowski, H. (1991). *Georg Cantor Briefe*. Berlin : Springer Verlag.
- Murillo, J. (2015). *Consideraciones para el analisis lógico de tres paradojas filosóficas*. PUCE: Tesis de disertación.
- Platón (2005). *Parménides*. Madrid: Alianza.
- Puckert, W. (1987). *Vita mathematica Georg Cantor*. Basel: Birkhauser.
- Rickey, F. (2002). *A readers Guide to Eulers introductio*. Euler conference, (págs. 1-17). New York.
- Riemann, B. (1868). *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Göttingen: Dieterischen Buchhandlung.
- Teichmüller, G. (1874). *Studien zur Geschichte der Begriffe*. Berlin: Weidmann.
- Sarmiento, G. (2004). *La aporía de la división en Kant*. Caracas: Ediciones de la universidad Simón Bolívar.
- Schoenflies, A. (1922). *Zur Erinnerung an Georg Cantor*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung Bd 31, 97-106.
- Schoenflies, A. (1927). *Die Krisis in Cantor`s mathematischen Schaffen*. Acta mathematica 50, 1-23.
- Sinkevich, G. (2014). *Georg Cantor Kindheit und Familiengeschichte*. MDMV 22, p.2-3.
- Spinoza, B. (1980). *La ética demostrada según el orden geométrico*. Madrid: Editorial Orbis.
- Von Neumann, J. (1928). *Zur Theorie der Gessellschaftsspiele*. Mathematische Annalen , 296-320 .
- Zeller,E. (1878). *Ueber die Lehre des Aristoteles von der Ewigkeit der Welt*. Berlin: Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften.
- Zermelo, E. (1908). *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*. Mathematische Annalen 65, 261-281.

Zermelo, E. (1913). *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*. Proceeding of the fifth international Congress of Mathematicians, 501-504.