

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL



Tema:

Determinación de la ecuación diferencial para el pandeo de columnas no prismáticas de acero ASTM A 588 bajo diferentes condiciones de soporte

AUTOR:

Kevin Alexander Samaniego Quintana

Director: Ing. Mauricio Cely

QUITO DM, NOVIEMBRE 2022

DEDICATORIA

Agradezco a Dios por guiar mis pasos y ser mi fortaleza. A mis padres, Jorge y Jeanneth, por su apoyo tanto económico como moral y por enseñarme los valores de la perseverancia, la humildad y la honestidad; a mi hermana Carolina y a mi novia Jéssica por su apoyo incondicional. A mis abuelitos, Manuel y Nelly, por estar siempre a mi lado y en los momentos más importantes de mi vida, que ahora me cuidan desde el cielo. Así también, agradezco a mis docentes por los conocimientos que me fueron transmitidos, y por las experiencias profesionales y de vida compartidas. A mi tutor, el ingeniero Mauricio Cely, que fue un importante aporte en el desarrollo de mi tesis y mi carrera. Finalmente, a mis amigos y compañeros de estudio, gracias por brindarme su amistad, aquí termina una importante etapa de nuestras vidas.

AGRADECIMIENTO

Dedico mi trabajo y esfuerzo a Dios por permitirme llegar a donde estoy ahora. A mis padres y hermana por ser mis pilares en la vida. A mis abuelitos por su amor incondicional y por dedicar su tiempo a cuidarme. A mi novia por estar siempre presente apoyándome en esta etapa de mi carrera y de vida. A mi familia que se encuentra dentro y fuera del país por los consejos y apoyo brindados. Por último, pero no menos importante, a mis amigos de la Universidad y el Colegio, con quienes he compartido muchos momentos alegres.

RESUMEN

En el presente trabajo de disertación se demostró la procedencia de la carga crítica de pandeo de Euler en elementos barra no prismáticos verticales para siete casos de apoyos en los extremos de los mismos. Como paso previo a las demostraciones se expuso el correspondiente marco teórico con el objeto de dar una amplia y detallada introducción acerca del concepto de pandeo, sus propiedades mecánicas y la incidencia en el desempeño estructural de las columnas. Se presentó además una extensa aplicación referente a las ecuaciones diferenciales debido a que se contó con esta herramienta para la demostración de los modelos matemáticos de la carga crítica de pandeo de Euler en cada uno de los siete casos. Enseguida de haberse expuesto el marco teórico, se procedió a las demostraciones respectivas mediante el empleo de recursos matemáticos y físicos dando en cada una de ellas su correspondiente explicación detallada y precisa. Luego de haberse demostrado las ecuaciones de carga crítica de pandeo se procedió a realizar la respectiva comprobación de efectividad de las mismas no sin antes presentar una amplia introducción acerca la forma como se procedió para realizar el mencionado paso en donde se destacó la aplicación del método AISC para elementos de eje recto sometidos a cargas de compresión, se explicó además la diferencia entre los aceros A 500 y A 588, materiales con los que se llevó a cabo la comprobación. Posteriormente se procedió a realizar la comprobación de los modelos de carga crítica de pandeo, primero de forma convencional, y una vez que se obtuvieron los resultados se procedió a programar hojas electrónicas EXCEL para cada uno de los siete casos con el objetivo de aplicar los conocimientos adquiridos, así como de facilitar y abreviar el trabajo para cada uno de los siete casos y con los dos tipos de aceros. Una vez que se efectuaron la totalidad de las comprobaciones, se resumieron los resultados y se procedió a deducir las respectivas conclusiones para cada uno de los casos analizados para finalmente exponer las conclusiones generales

obtenidas en el trabajo realizado junto con sus correspondientes recomendaciones. Al final, en los anexos se exponen las respectivas tablas de perfiles de acero utilizadas en el proceso de análisis.

Palabras clave. – Acero, análisis, apoyo, carga crítica, columna, comportamiento, compresión, deformación, deflexión, diseño, ecuación diferencial, elástica, esfuerzo, estructura, flexión, fluencia, hoja electrónica, longitud, material, mecánica, modelo matemático, pandeo, perfil, rigidez, resistencia, sección, servicio, sismo, sollicitación.

ABSTRACT

In the present dissertation work, the origin of the critical Euler buckling load in vertical non – prismatic bar elements were demonstrated for seven cases of supports at their ends. As a previous step to the demonstrations, the corresponding theoretical framework was exposed in order to give a broad and detailed introduction about the concept of buckling, its mechanical properties and the incidence on the structural performance of the columns. An extensive application regarding differential equations was also presented because this tool was used to demonstrate the mathematical models of Euler's critical buckling load in each of the seven cases. Immediately after having exposed the theoretical framework, the respective demonstrations were carried out through the use of mathematical and physical resources, giving in each of them its corresponding detailed and precise explanation. After having demonstrated the critical buckling load equations, the respective verification of their effectiveness was carried out, but not before presenting a broad introduction about the way in which the aforementioned step was carried out, where the application of the AISC method was highlighted. for straight-axis elements subjected to compression loads, the difference between A 500 and A 588 steels, materials with which the verification was carried out, was also explained. Subsequently, the critical buckling load models were verified, first conventionally, and once the results were obtained, EXCEL electronic sheets were programmed for each of the seven cases in order to apply the knowledge acquired, as well as to facilitate and shorten the work for each of the seven cases and with the two types of steel. Once all the verifications were carried out, the results were summarized and the respective conclusions were deduced for each of the cases analyzed to finally present the general conclusions obtained in the work carried out together with their corresponding recommendations. At the end, the annexes show the respective tables of steel profiles used in the analysis process.

Key words: Analysis, behavior, buckling, column, critical load, compression, deformation, deflection, design, differential equation, elastic, electronic sheet, length, material, mechanics, mathematical model, profile, request, rigidity, resistance, section, seismic, service, sheet, steel, stress, support, structure, yield.

INDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN.....	iii
ABSTRACT	v
CAPITULO I.....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Justificación	1
1.2. Alcance	3
1.3. Objetivos	4
1.4. Antecedentes	5
CAPITULO II.....	8
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	8
2.1. Ecuaciones diferenciales	8
2.1.1. Concepto y origen de las Ecuaciones Diferenciales	8
2.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias	11
2.1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales	13
2.1.3.1. Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes	15
2.1.3.1.1. Método de resolución de la ecuación homogénea	16
2.2. Definición de columnas	17
2.3. Pandeo de columnas	19
2.4. Tipos de equilibrio en columnas	19
2.5. Efecto de las condiciones de los extremos	23
2.6. Pandeo inelástico	24
2.7. Pandeo local	25
2.8. Curvas de columna.....	25
2.9. Comportamiento de las columnas reales.....	29
2.10. Pandeo de Euler.....	30
CAPÍTULO III.....	42
DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES DE PANDEO	42
3.1. Consideración de grandes deformaciones.....	42
3.2. Columna aislada bi articulada	48
3.3. Columna doblemente empotrada.....	48
3.4. Columna con apoyos empotrado y libre.....	56
3.5. Columna con apoyo empotrado y deslizante	59
3.6. Columna con extremo apoyado – empotrado	63

3.7. Columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga	70
3.8. Columnas doblemente articuladas con geometría inicial no rectilínea	80
CAPITULO IV	87
COMPROBACIÓN DEL MODELO DE ECUACIÓN POR CASO	87
4.1. Longitud de pandeo y la hipérbola de Euler	87
4.2. Acerca del acero ASTM A 588	94
4.3. Comprobación de los modelos de ecuaciones	95
CAPÍTULO V	134
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	134
Conclusiones	134
Recomendaciones	150
BIBLIOGRAFÍA	153
ANEXOS	154

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.- Diferentes tipos de ecuaciones diferenciales con su respectiva solución o primitiva..	10
Tabla 2.- Valores de k para diferentes condiciones de extremos.	23
Tabla 3.- Solución al problema de Euler no lineal	45
Tabla 4.- Limitación de las relaciones espesor-ancho para elementos a compresión.	97
Tabla 5.- Resultados para el perfil cuadrado hueco.	134
Tabla 6.- Resultados para el perfil IPE no rigidizado.	136
Tabla 7.- Resultados para el perfil HEB no rigidizado.	138
Tabla 8.- Resultados para el perfil IPE rigidizado.	139
Tabla 9.- Resultados para el perfil HEB rigidizado.	142
Tabla 10.- Resultados para perfiles huecos redondos.	144
Tabla 11.- Resultados para perfiles T.....	147

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.- Simulación en laboratorio del fenómeno de pandeo en columnas.	5
Figura 2.- Diferentes tipos de falla de columnas luego de un evento de naturaleza sísmica.	7
Figura 3.- Pandeo de una columna articulada en sus dos extremos.	20
Figura 4.- Estados de equilibrio de una columna sujeta a carga axial de compresión: Equilibrio estable (Izquierda), equilibrio inestable (Derecha).	22
Figura 5.- Curva de Esfuerzo-deformación para un material sin punto de fluencia estrictamente definido.	27
Figura 6.- Curva de columna para un material sin punto de fluencia definido.	28
Figura 7.- Curva Esfuerzo-Deformación para un material con punto de fluencia estrictamente definido.	28
Figura 8.- Curva de columna para un material con punto de fluencia definido.	29
Figura 9.- Miembro barra doblemente articulado para plantear el problema de pandeo de Euler.	32

Figura 10.- Modos de pandeo y sus correspondientes cargas de Euler en columna bi articulada.	38
Figura 11.- Columna doblemente articulada bajo deformación no lineal.	43
Figura 12.- Representación gráfica de la solución del problema de Euler: casos lineal y no lineal.	47
Figura 13.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna doblemente empotrada. b) Diagrama de fuerzas en la sección "A"	50
Figura 14.- Comportamiento de la sección central de una columna doblemente empotrada asumiendo que actúa como columna aislada bi articulada.	56
Figura 15.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna con apoyo empotrado – libre. b) Diagrama de fuerzas en la sección "A".	57
Figura 16.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna con apoyo empotrado y deslizante. b) Diagrama de fuerzas en una sección de la columna.	60
Figura 17.- Longitud de pandeo de columna empotrada - libre.	62
Figura 18.- Columna con apoyo empotrado - apoyado.	63
Figura 19.- Método de artificio gráfico de resolución de la ecuación (3).	68
Figura 20.- Longitud de pandeo de columna empotrada - apoyada.	69
Figura 21.- Columna doblemente articulada con carga excéntrica.	70
Figura 22.- Valores de las curvas de carga para diferentes excentricidades de carga. Resultados de la teoría lineal.	78
Figura 23.- Diferencia entre solución lineal y no lineal.	79
Figura 24.- Columna con geometría inicial no rectilínea.	81
Figura 25.- Lugares geométricos de carga para diferentes amplitudes de imperfección geométrica inicial. Resultados de la teoría lineal.	86
Figura 26.- Representación geométrica de la longitud de pandeo.	89
Figura 27.- Representación de los valores del coeficiente β de los cinco casos básicos.	90
Figura 28.- Bosquejo de la curva de diseño combinando la hipérbola de Euler con el límite resistente (Caso de acero $E= 210$ Gpa, $f_y = 235$ Mpa.	93
Figura 29.- Planchas de acero ASTM A 588 y aplicaciones de este material.	95
Figura 30.- Área efectiva típica para el caso a).	108
Figura 31.- Área efectiva típica para el caso b).	109
Figura 32.- Modelo de hoja electrónica para el análisis de selección de perfil. (Ejemplo caso i).	115

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1.- Ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden.	9
Ecuación 2.- Ejemplo de ecuación diferencial de tercer orden.	9
Ecuación 3.- Ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden.	11
Ecuación 4.- Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.	11
Ecuación 5.- Ecuación de flexión de una viga de Bernoulli - Euler.	12
Ecuación 6.- Forma genérica de la EDO lineal con coeficientes constantes.	15
Ecuación 7.- Forma genérica de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes.	15
Ecuación 8.- Resultado de reemplazar $yh(x)$ en la EDO lineal con coeficientes constantes.	15

Ecuación 9.- Resultado de reemplazar $yp(x)$ en la EDO lineal con coeficientes constantes.....	15
Ecuación 10.- Probable función solución de la EDO homogénea.....	16
Ecuación 11.- Derivada genérica de la probable función solución de la EDO homogénea.....	16
Ecuación 12.- Forma genérica de la solución de una EDO lineal homogénea.....	17
Ecuación 13.- Formato genérico de la primitiva de la EDO homogénea con raíces imaginarias.	17
Ecuación 14.- Ecuación de la curva elástica en el estado de flejamiento.....	21
Ecuación 15.- Valor menor de la carga de Euler.....	21
Ecuación 16.- Ecuación del esfuerzo unitario promedio sobre la sección transversal.....	23
Ecuación 17.- Ecuación del efecto de las condiciones de los extremos.....	23
Ecuación 18.- Ecuación de Engesser para los metales en el rango inelástico.....	25
Ecuación 19.- Expresión de la curvatura del elemento barra.....	31
Ecuación 20.- Momentos actuantes en la sección A.....	33
Ecuación 21.- Momento flector genérico de un elemento barra en función de su factor de inercia y su módulo de elasticidad.....	33
Ecuación 22.- Radio de curvatura de una sección del elemento barra.....	33
Ecuación 23.- Momento flector en función del radio de curvatura de una sección del elemento barra.....	33
Ecuación 24.- Momento flector simplificado.....	34
Ecuación 25.- Momento flector en función de la segunda derivada de la curva elástica.....	34
Ecuación 26.- Ecuación diferencial del equilibrio de momentos actuantes en la sección A.....	34
Ecuación 27.- Curvatura de una sección de la columna en estado de deformación no lineal.....	42
Ecuación 28.- Momento flector en función de la curvatura de la sección.....	44
Ecuación 29.- Ecuación de los momentos en una sección de una columna con deformación de tipo no lineal.....	44
Ecuación 30.- Solución de la ecuación 29.....	44
Ecuación 31.- Primitiva de la integral elíptica representada en la ecuación 30.....	44
Ecuación 32.- Parámetro δL de k'	45
Ecuación 33.- Parámetro PPE de k'	45
Ecuación 34.- Límite del parámetro P/PE	46
Ecuación 35.- Ecuación de pandeo para el caso de una columna aislada bi articulada.....	48
Ecuación 36.- Carga crítica de Euler para el caso de columna aislada bi articulada.....	48
Ecuación 37.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna doblemente empotrada.....	49
Ecuación 38.- Ecuación de pandeo para el caso de una columna doblemente empotrada.....	52
Ecuación 39.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado en los dos extremos.....	54
Ecuación 40.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna con apoyo empotrado - libre.	58
Ecuación 41.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado - libre.....	59
Ecuación 42.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado - deslizante.....	61
Ecuación 43.- Ecuación de equilibrio de momentos de una sección en una columna con extremo empotrado - apoyado.....	64
Ecuación 44.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna con extremo apoyado – empotrado.....	64
Ecuación 45.- Ecuación de pandeo para el caso de una columna con extremo empotrado – apoyado.....	66

Ecuación 46.- Ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler para el caso de columnas con extremo apoyado – empotrado.	69
Ecuación 47.- Equilibrio de momentos de una sección en una columna doblemente articulada con carga excéntrica.	71
Ecuación 48.- Ecuación diferencial del pandeo para columnas doblemente articuladas con carga excéntrica.	71
Ecuación 49.- Ecuación del pandeo para el caso de una columna doblemente articulada con carga excéntrica.	73
Ecuación 50.- Equilibrio de momentos en una sección de una columna de geometría inicial no rectilínea.	82
Ecuación 51.- Ecuación del pandeo de columnas con geometría inicial no rectilínea.	83
Ecuación 52.- Solución general de la ecuación de pandeo de columnas con geometría inicial no rectilínea.	84
Ecuación 53.- Ecuación general de la carga crítica de pandeo de Euler.	87
Ecuación 54.- Ecuación de la longitud de pandeo l_k	88
Ecuación 55.- Ecuación de la tensión crítica.	88
Ecuación 56.- Esbeltez mecánica.	89
Ecuación 57.- Esbeltez geométrica.	90
Ecuación 58.- Esbeltez relativa.	91
Ecuación 59.- Razón de deformación.	91
Ecuación 60.- Ecuación de la hipérbola de Euler.	91
Ecuación 61.- Resistencia nominal a la compresión.	103
Ecuación 62.- Esfuerzo crítico para miembros no esbeltos. (Primera condición).....	103
Ecuación 63.- Esfuerzo crítico para miembros no esbeltos. (Segunda condición).....	103
Ecuación 64.- Esfuerzo crítico elástico de pandeo.	103
Ecuación 65.- Resistencia nominal a la compresión.	104
Ecuación 66.- Esfuerzo crítico (Primera condición)	104
Ecuación 67.- Esfuerzo crítico (Segunda condición)	105
Ecuación 68.- Factor Q_s para caso II	106
Ecuación 69.- Factor Q_s para caso III	106
Ecuación 70.- Factor Q_s para caso II	106
Ecuación 71.- Factor Q_s para caso III	106
Ecuación 72.- Factor K_c	107
Ecuación 73.- Determinación de Q_a para elementos rígidos delgados.	107
Ecuación 74.- Factor b_e para caso a).	108
Ecuación 75.- Factor b_c para caso b).	108
Ecuación 76.- Factor f para la ecuación 75.	109
Ecuación 77.- Factor Q para el caso c).....	109
Ecuación 78.- Esfuerzo crítico de pandeo para columnas doblemente empotradas.	117

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Justificación

El fenómeno de pandeo de columnas constituye un factor de primordial importancia en el análisis y diseño estructural debido a que de estos elementos depende directamente la estabilidad y durabilidad de los sistemas estructurales, por lo que se vuelve imprescindible conocer a profundidad los principios que lo gobiernan para de esta forma decidir acerca del dimensionamiento más apropiado con el tipo de material a emplearse.

Las ecuaciones de pandeo de columnas son un recurso analítico que permite conocer con mucha precisión el comportamiento mecánico de los elementos estructurales tipo barra ante las diferentes acciones externas a las que estos se encuentran sometidos. Por medio de las ecuaciones de pandeo es posible prever los estados posibles de falla de tipo inminente que los elementos barra podrían adoptar obteniendo así los parámetros necesarios que permitan realizar el diseño más apropiado para que estos consigan ajustarse a las condiciones externas a las que se encuentren sometidos.

Por el motivo mencionado anteriormente, en el presente trabajo se realizó una investigación formal acerca de las ecuaciones diferenciales del pandeo de columnas bajo diferentes condiciones de soporte para de esta forma estar en condiciones de comprender a profundidad su comportamiento mecánico lo que permitió adquirir los criterios necesarios para lograr diseños garantizados y seguros.

La ingeniería estructural se fundamenta en el comportamiento de los elementos que conforman los pórticos o sistemas estructurales, siendo estos los que determinarán su

eficiencia para que así estén en condiciones de cumplir con su función primordial: proporcionar eficiencia y seguridad tanto a sus usuarios como al entorno exterior que circunda la estructura. Todo sistema aporticado genérico está compuesto por dos elementos básicos, las vigas y las columnas: las vigas son los elementos encargados de receptor toda acción generada por las cargas de servicio absorbidas en las losas mientras que las columnas cumplen con la función de canalizar dichas cargas hacia las cimentaciones y de ahí a su destino final, el suelo. Sin embargo, también puede darse el caso de sistemas estructurales conformados solamente por losas y columnas mas no por vigas en donde las cargas son receptoradas directamente por las columnas hacia las cimentaciones que pueden ser ya sea zapatas o vigas de cimentación.

De acuerdo con todo lo anterior, las columnas cumplen con una función esencial para el buen desempeño de los sistemas estructurales, lo que justifica entonces la necesidad de conocer a profundidad su comportamiento mecánico ante las solicitaciones generadas tanto por las cargas de servicio como por las acciones de naturaleza sísmica y eólica. Y es justamente con respecto a los fenómenos de carácter natural en donde se hace mayor la importancia de determinar la correcta funcionalidad de las columnas ante las solicitaciones originadas por las acciones de naturaleza dinámica debido a que estas vienen siendo los factores responsables tanto de la sustentación como de la estabilidad del sistema estructural.

Luego de haberse resaltado la importancia de la funcionalidad de las columnas en el desempeño del comportamiento estructural de los sistemas aporticados, podrá comprenderse con mayor claridad la necesidad que conlleva realizar el análisis de su comportamiento mecánico puesto que de los resultados que se obtengan deberán de efectuarse tanto el dimensionamiento como el diseño más apropiado junto con la selección adecuada del material de construcción. Para poder lograr todo lo anterior, hubo

de establecerse modelos matemáticos apropiados que permitan describir con exactitud el desempeño de las columnas tanto en estado estático como dinámico siendo este estado de mayor importancia debido a que de su comportamiento ante las acciones de carácter sísmico dependerán en su totalidad el análisis y diseño de estas dando como resultado una estructura de dimensiones satisfactorias, la misma que brindará seguridad absoluta a sus ocupantes permanentes y transitorios.

Por lo tanto, es debido a las razones expuestas anteriormente, que los modelos matemáticos que se llegaron a determinar constituyen un recurso valedero que permite resolver el problema de la optimización del diseño de columnas bajo distintas condiciones de soporte garantizando de esta forma la estabilidad y funcionalidad de los sistemas estructurales de los cuales forman parte.

1.2. Alcance

En el presente trabajo se pretende hallar y determinar un modelo de carácter matemático en formato de ecuación diferencial, el mismo que describa el fenómeno del pandeo presente en las columnas de sección no prismática. En lo referente a las secciones, el alcance de este trabajo se delimitará al análisis de las secciones cuadradas huecas, perfiles de tipo “I”, “T”, “H” y perfiles huecos redondos, descartándose secciones de geometría compleja.

El alcance de este trabajo se centra en los elementos de tipo barra que se encuentren sometidos a la acción de cargas axiales compresivas cuya línea de acción se encuentre fuera de su eje centroidal, por lo tanto, vienen siendo elementos sometidos a sollicitaciones de flexo compresión. En lo que respecta a las condiciones de apoyo, se toman en cuenta dos tipos de apoyo: apoyo articulado y doblemente empotrado.

En lo referente a las teorías de comportamiento elástico, el problema a tratarse dentro del presente trabajo se sustenta en la Teoría lineal de Euler debido a que por medio de esta es posible determinar el valor de la carga crítica por medio de la cual las columnas llegan a un inminente estado de pandeo que las hace pasar de su estado de equilibrio estable a un estado de equilibrio inestable.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

- Determinar el modelo matemático en estado de ecuación diferencial que describa el comportamiento del pandeo de columnas de sección no prismática sometidas a diferentes condiciones de soporte.

1.3.2. Objetivos específicos

- Analizar las ecuaciones de pandeo, así como los tipos de curvaturas que adquirirán las columnas no prismáticas ante las acciones de las cargas externas a las que se encuentran sometidas durante el transcurso de la vida útil de la estructura de la que forman parte junto con las diferentes condiciones de soporte a las que podrían estar regidas.
- Comprobar las expresiones matemáticas obtenidas basadas en el criterio de Euler, las mismas que serán de utilidad en el análisis del comportamiento de columnas ante la acción de las cargas críticas.
- Elaborar hojas electrónicas mediante las cuales sea posible efectuar el análisis de carga al que son sometidas las columnas y de esta forma seleccionar el perfil adecuado.

1.4. Antecedentes

Las columnas cumplen con la función de servir de mecanismos de soporte al sistema estructural aporticado para de esta forma proporcionar seguridad tanto a los usuarios como a los elementos materiales que se albergan en este, además de servir como conducto de transferencia de las cargas de servicio hacia el suelo de fundación en donde se asienta dicho sistema. Una vez que se conocen las funciones de las columnas, se puede entonces ratificar su importancia para un desempeño eficiente y correcto de los sistemas estructurales de los que forman parte siendo por ello imprescindible tener un conocimiento detallado y preciso del comportamiento que estos adoptarán ante los diferentes tipos de solicitaciones.



Figura 1.- Simulación en laboratorio del fenómeno de pandeo en columnas.

Fuente: (Estrada Mejía, 2017, pág. 42)

Un gran número de estructuras, sobre todo en los sectores donde se concentran los estratos medios informales, son construidos sin un soporte técnico adecuado que respalde su diseño y garantice su óptimo funcionamiento trayendo como consecuencia un desempeño sumamente limitado traduciéndose en una alta vulnerabilidad de estas ante las acciones de naturaleza sísmica lo que traerá consigo altos índices de probabilidad de riesgo tanto para sus ocupantes como para el entorno circundante en sus alrededores.

Resulta por demás altamente asombroso como preocupante el hecho de que luego de haber sucedido un evento de carácter sísmico, las estructuras y especialmente las columnas queden completamente destrozadas y en consecuencia inservibles, como se expone en los ejemplos de la figura 2, obligando a que estas sean irremediablemente derrocadas sin posibilidad alguna de ser rehabilitadas y reconstruidas, siendo más lamentable todavía la suerte corrida por sus ocupantes: o bien han perdido su bien inmueble o en el peor de los casos sus propias vidas.





Figura 2.- Diferentes tipos de falla de columnas luego de un evento de naturaleza sísmica.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 18)

Por todo lo anteriormente mencionado, es entonces que se vuelve tan necesario como indispensable efectuar los respectivos análisis del comportamiento estructural de los sistemas estructurales aporticados para en base a los parámetros obtenidos proceder a efectuar los consecuentes diseños determinando así los dimensionamientos apropiados junto con los volúmenes de material necesarios que garantizarán un funcionamiento óptimo y seguro de la estructura durante todo el transcurso de su vida útil.

CAPITULO II

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. Ecuaciones diferenciales

2.1.1. Concepto y origen de las Ecuaciones Diferenciales

“Se denomina ecuación diferencial a toda ecuación cuya incógnita está constituida por una función, pudiendo ser esta función bien de tipo escalar o vectorial. En la ecuación aparece la función incógnita combinada con expresiones que impliquen sus derivadas”. (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 4)

Una ecuación diferencial, por lo tanto, constituye toda expresión de carácter matemático en la que sus incógnitas vienen siendo razones de cambio o derivadas, que, a diferencia de las ecuaciones de tipo algébrico en donde sus variables son fijas, en las ecuaciones diferenciales sus incógnitas son variaciones que una vez despejadas, sus resultados son funciones a las que se les asignará determinados valores a la variable para que satisfaga la o las condiciones que reúne la función resultante. Expresado de otra forma, las soluciones de las ecuaciones diferenciales vienen siendo funciones de variable simple, las mismas que tomarán determinados valores bajo los cuales puedan ser satisfechas dichas funciones.

Según Frank Ayres:

El problema a resolverse en las ecuaciones diferenciales se centra en hallar la primitiva por medio de la cual se originó la ecuación. Expresado de otra forma, resolver una ecuación diferencial de orden n consiste en hallar una relación entre las variables conteniendo n constantes arbitrarias independientes las mismas que, junto con las derivadas obtenidas de ella esté en condiciones de satisfacer la ecuación diferencial. (Ayres JR, 1970, pág. 7)

El orden de una ecuación diferencial viene siendo el orden de su mayor derivada, para aclarar este concepto se presentarán a continuación algunos ejemplos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 1,4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

Ecuación 1.- Ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden.

El ejemplo expuesto en la ecuación 1 corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden puesto que la derivada de mayor orden es justamente de orden dos, mientras que la de menor orden viene siendo de primer orden como se puede apreciar en el modelo matemático del ejemplo.

$$y''' + 2,5 y''^2 + y' - \cos x = 0$$

Ecuación 2.- Ejemplo de ecuación diferencial de tercer orden.

En el ejemplo expuesto en la ecuación 2, la expresión corresponde a una ecuación diferencial de tercer orden u orden tres debido a que la derivada de mayor orden es de orden tres, en tanto que las derivadas de menor orden vienen siendo de segundo y primer orden como se puede apreciar en el modelo matemático. Si se observa de forma detenida la ecuación, se puede apreciar que en el segundo término la variable de segundo orden está elevada al cuadrado por lo que se interpretaría de forma errónea de que el producto entre el índice y el orden de la variable daría como resultado el orden real de la ecuación diferencial, o sea, de sexto orden lo que como se puntualizó viene siendo incorrecto, por lo tanto, el orden de las derivadas de las incógnitas es independiente del exponente al que estas se encuentren elevadas. En lo que respecta al cuarto término de la ecuación diferencial, puede llegar a surgir la inquietud si se la trata como a una variable a considerarse dentro de la solución de la ecuación, este criterio es también errado puesto que dicho término no representa en si una derivada de la variable en cuestión por lo que no se lo tiene que tomar en cuenta al momento de considerar el orden que rige la ecuación.

Una vez que se ha dado a conocer el significado del orden de las ecuaciones diferenciales, se procederá a explicar en base a conceptos propios la consistencia de la resolución de dichas ecuaciones. En la resolución de una ecuación diferencial se debe de encontrar un número de constantes igual al orden de dicha ecuación de modo tal que la expresión resultante tenga un número de términos igual o mayor a dicho orden. A continuación, se darán algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales y sus respectivas primitivas:

Tabla 1.- Diferentes tipos de ecuaciones diferenciales con su respectiva solución o primitiva.

ECUACIÓN DIFERENCIAL	PRIMITIVA
$X^2y'' - 3xy' + 4y = 0$	$Y = C1x^2 + C2x^2 * \ln x$
$x^3y''' + xy' - y = 3x^4$	$Y = C1x + C2x*\ln x + C3x*Ln^2x + \frac{x^4}{9}$
$xy'' - y' + 4x^3y = 0$	$Y = C1*\sin x^2 + C2* \cos x^2$
$y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$	$Y = C1*e^x + C2*e^{2x} + \frac{e^{5x}}{12}$

Se puede observar en el ejemplo expuesto en la tabla 1, que el número de constantes que conforman la solución o primitiva vienen siendo del mismo orden de la ecuación diferencial, por lo que se deduce que el número de soluciones de una ecuación diferencial de orden n tiene que ser igual al valor del mayor orden de las derivadas que la conforman.

El grado de las ecuaciones diferenciales viene siendo la potencia a la cual se encuentra elevada la derivada de mayor orden, por lo que como se expresó anteriormente, y se lo reitera, no hay que multiplicar entre sí el grado con el orden de la derivada de una ecuación diferencial.

$$y''^2 + y'^3 + 4,5y = x^2$$

Ecuación 3.- Ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden.

En el ejemplo expuesto en la ecuación 3, inmediatamente se sugiere que la ecuación diferencial representada es de tercer grado y orden uno, pero la percepción está equivocada puesto que la mayor derivada es de segundo orden y está elevada a la segunda potencia, por lo tanto, la ecuación 3 es de segundo grado y de segundo orden.

2.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Se denominan así a aquellas expresiones en donde la primitiva a ser determinada dependerá exclusivamente de un parámetro, es decir, la función a ser integrada tendrá como variables derivadas de una sola variable dependiente con respecto a una sola variable independiente.

$$\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \cos x \frac{dy(x)}{dx} = f(x)$$

Ecuación 4.- Ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

En el ejemplo expuesto en el modelo matemático representado en la ecuación 4, este viene siendo una ecuación diferencial de carácter ordinario debido a que como se puede observar, existe un único parámetro de variación, $\frac{dy}{dx}$, siendo de tercer orden u orden tres puesto que el mayor rango de la derivada es tres. Un aspecto importante es el de que no necesariamente la ecuación diferencial tiene que tener miembros con todos los órdenes, es decir, como en el caso del ejemplo, se puede observar que carece de un miembro de segundo orden mientras que, si tiene uno de primer orden, pero este aspecto no afectará en si la obtención de la función primitiva.

2.1.2.1. Problemas de valores iniciales y problemas de contorno

“En los problemas de tipo físico, las condiciones de valor inicial dependerán sobre todo de la información disponible en un determinado instante de tiempo, este tipo de problemas se denominan problemas con condiciones iniciales”. (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 7)

“En el caso de los problemas referentes al comportamiento mecánico de elementos estructurales, estos se plantean bajo las condiciones de contorno debido a que se establecen en el contorno (o frontera) de un dominio”. (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 7)

En el caso de los elementos tipo barra, estos se modelan de acuerdo al método de la línea media basada en el contorno a los puntos extremos del miembro.

Se denomina problema de contorno, entonces, al hallazgo de la solución de una ecuación diferencial con condiciones definidas en su contorno. En estos problemas es necesario especificar condiciones en toda la extensión del contorno siendo las más importantes los valores de la función, derivadas direccionales, condiciones mixtas. En los problemas de contorno, a diferencia de los problemas con valores iniciales, es necesario especificar los valores conocidos de la función en un conjunto de puntos mas no solamente en un instante de tiempo.

El lugar geométrico de la elástica de una viga de Bernoulli – Euler tiene el siguiente modelo matemático:

$$\frac{d^4y(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI}$$

Ecuación 5.- Ecuación de flexión de una viga de Bernoulli - Euler.

E: Módulo de elasticidad del material de la viga.

I: Factor de inercia de la sección de la viga

P(x): Carga distribuida por unidad de área.

2.1.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Según Boyce, Di Prima:

Se denomina ecuación diferencial ordinaria de carácter lineal a toda aquella ecuación en donde la función y sus respectivas derivadas son representadas en base a una combinación lineal de funciones que dependerán solamente de la variable independiente. Las funciones o bien sus derivadas no serán elevadas a potencia alguna y tampoco vendrán siendo el producto entre funciones o sus derivadas. (Boyce & Di Prima, 1999, pág. 140)

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, por lo tanto, vienen siendo expresiones cuyos miembros están constituidos por derivadas de la función primitiva relacionadas con su variable independiente pero no pueden estar dos derivadas ya sea del mismo o diferente orden multiplicadas entre sí y tampoco elevadas a una determinada potencia, los productos serán solamente entre la derivada de la función primitiva en un determinado orden y una función exclusiva de la variable independiente.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de EDO lineales:

$$5Y'''(X) - 2,5 Y''(X) + 3Y(X) = 0 \text{ (a)}$$

$$2Y^{IV}(X) + 8XY''(X) - 12Y(X) = 0 \text{ (b)}$$

$$1,5Y^{IV}(X) - 5\ln(X)Y''(X) + 2Y(X) = e^X \text{ (c)}$$

Las expresiones anteriores son consideradas EDO lineales debido a que como puede observarse, los miembros están constituidos por una única derivada en determinado orden de la función primitiva habiendo también miembros conformados por el producto entre la derivada y una función únicamente de la variable independiente.

No son EDO lineales las funciones de los siguientes ejemplos:

$$2Y'''(X) + 10Y'(X)*Y''(X) + 2,5Y(X) = 1,2e^{-X} \text{ (d)}$$

$$1,2Y''(X) + 1,5Y^2(X) = 2X^2 \text{ (e)}$$

Las expresiones anteriores no son consideradas como EDO lineales puesto que como puede observarse, en la expresión **(d)** el segundo miembro está constituido por el producto entre dos derivadas de distinto orden de la misma función primitiva, mientras que el segundo miembro de la expresión **(e)** viene siendo una función de variable independiente elevada al cuadrado.

Tampoco son EDO lineales las siguientes expresiones:

$$Y'(X)*\cos(X) - 1,5e^{X*Y(X)} = 0 \text{ (f)}$$

$$1,5*Y(X) - \cos(Y'(X)) = 2,5(X) \text{ (g)}$$

Tanto la expresión **(f)** como la expresión **(g)** no son consideradas como EDO lineales debido a que como se observa, existen miembros cuyas funciones son compuestas, es decir no están en función de una sola variable simple.

La ecuación diferencial **(a)** es una EDO lineal de coeficientes constantes, puesto que la totalidad de estos no están en función de la variable independiente, es decir, son valores netamente numéricos, mientras que las ecuaciones **(b)** y **(c)** vienen siendo EDO lineales con coeficientes variables debido a que a diferencia de la ecuación **(a)** estos dependen de la variable independiente o están en función de esta.

De acuerdo a lo anteriormente visto, entonces, la forma genérica de las EDO lineales con coeficientes constantes se las expresa del siguiente modo:

$$a_n y^n(x) + a_{n-1}(x)y^{n-1}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

Ecuación 6.- Forma genérica de la EDO lineal con coeficientes constantes.

Donde $a_n \dots a_1$ vienen siendo los coeficientes constantes, mientras que $f(x)$ es una función que únicamente depende de X . Si el término del miembro derecho, es decir, $f(x)$ es diferente de cero, la EDO lineal es una ecuación completa, mientras que si $f(x)$ es igual a cero, la EDO lineal es una ecuación de tipo homogénea.

2.1.3.1. Método general de resolución de una EDO lineal con coeficientes constantes

La solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes es de la siguiente forma genérica:

$$Y(x) = y^h(x) + y^p(x)$$

Ecuación 7.- Forma genérica de la solución general de una EDO lineal con coeficientes constantes.

Dónde:

$y^h(x)$: Solución de la ecuación homogénea.

$y^p(x)$: Solución particular que cumpla con la ecuación completa.

Reemplazando la solución homogénea en la expresión genérica representada en la ecuación 6, su resultado debe ser igual a cero:

$$a_n [y^h(x)]^n + a_{n-1} [y^h(x)]^{n-1} + \dots + a_1 [y^h(x)]' + a_0 y^h(x) = 0$$

Ecuación 8.- Resultado de reemplazar $y^h(x)$ en la EDO lineal con coeficientes constantes.

Mientras que la solución particular dará el siguiente resultado genérico:

$$a_n [y^p(x)]^n + a_{n-1} [y^p(x)]^{n-1} + \dots + a_1 [y^p(x)]' + a_0 y^p(x) = f(x)$$

Ecuación 9.- Resultado de reemplazar $y^p(x)$ en la EDO lineal con coeficientes constantes.

Solamente se exige para $y^p(x)$ que cumpla con el resultado expuesto en la ecuación 9 que en si viene siendo una expresión semejante al modelo genérico expuesto en la ecuación 6, mas no se la exige mantener condición de contorno alguna, en base a ello, entonces, no puede haber una única posibilidad, pudiendo así ser cualquier valor de $y^p(x)$ que cumpla con la ecuación 9.

Luego de haberse obtenido tanto $y^h(x)$ como $y^p(x)$ se determinará la función $y(X) = y^h(x) + y^p(x)$ misma que se le asignarán condiciones de contorno quedando determinadas las constantes libres procedentes de $y^h(x)$ siendo necesario el aclarar que $y^p(x)$ no aportará constantes de integración a la función $y(X)$.

2.1.3.1.1. Método de resolución de la ecuación homogénea

Este método consiste en probar como solución a una función del tipo:

$$Y(X) = e^{\gamma X}$$

Ecuación 10.- Probable función solución de la EDO homogénea

Dónde γ viene siendo un parámetro a determinarse, al asumirse que $y(x)$ es de la forma expuesta en la ecuación 10, su derivación será simple siendo de la forma:

$$y^n(X) = \gamma^n e^{\gamma X}$$

Ecuación 11.- Derivada genérica de la probable función solución de la EDO homogénea.

Al sustituir tanto la función como sus derivadas en la EDO se obtendrán los valores de γ siendo estos los valores de las raíces del polinomio formado en la referida sustitución. Con los valores de γ hallados se estructurará la primitiva que se desea hallar la misma que tendrá la siguiente forma genérica:

$$y(X) = C_1 e^{\gamma_1 X} + C_2 e^{\gamma_2 X} + \dots + C_n e^{\gamma_n X}$$

Ecuación 12.- Forma genérica de la solución de una EDO lineal homogénea.

Para comprobar la validez de los resultados, bastará con hallar las derivadas correspondientes y reemplazar en la ecuación diferencial original lo que deberá dar como resultado nulo, es decir, que la ecuación deberá de ser de tipo homogénea.

Para resolver la EDO homogéneas con raíces imaginarias se recurre a la siguiente forma genérica que estructura la primitiva resultante:

$$y(X) = e^{aX} * C_1 \cos(Bx) + C_2 \sin(Bx)$$

Ecuación 13.- Formato genérico de la primitiva de la EDO homogénea con raíces imaginarias.

Siendo las raíces imaginarias de la forma: $\gamma = a \pm bi$, donde a: Parte real; b: Parte imaginaria

2.2. Definición de columnas

“Las columnas son miembros estructurales a compresión cuyas dimensiones de su sección transversal son relativamente pequeñas en relación a las de su longitud en la dirección de la fuerza de compresión”. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.56)

En base a lo definido, las columnas vienen siendo elementos esbeltos sometidos a cargas que actúan más bien de forma ideal en el centroide de su sección transversal debido a que en la realidad las líneas de acción de las cargas pasan por fuera del mencionado punto generando de esta forma un torque, el mismo que vendrá siendo el factor responsable del surgimiento del fenómeno de pandeo que tiende a que se genere su respectiva deflexión a lo largo de su eje longitudinal, de acuerdo a esto, entonces, este fenómeno es conocido como flexo compresión.

Según Nilson:

La falla en las columnas ocurre en el instante mismo en el que se iguala o se supera una determinada carga axial P_0 , más conocida como carga crítica o carga de Euler, al suscitarse este fenómeno el miembro podrá ya sea flejarse o pandearse de forma súbita, y, en consecuencia, llegar a colapsar y finalmente derrumbarse. (Nilson, 1999, pág. 265)

De acuerdo con lo anteriormente citado, la carga crítica de pandeo o carga de Euler viene siendo un parámetro determinante en el comportamiento estructural de las columnas y debido a ello, en los procedimientos analíticos constituye un factor indispensable para la determinación de su nivel de idoneidad estructural para llegar a ser consideradas como elementos de servicio.

Según Mc Cormac:

La resistencia a la carga P de una columna no se determinará en base al esfuerzo unitario de la ecuación $P = a \cdot f$, sino por la carga máxima que esta puede soportar sin llegar a volverse inestable. La condición de inestabilidad está caracterizada por aumentos desproporcionadamente grandes de la deformación junto con un mínimo incremento del valor de la carga axial. Para el caso de columnas esbeltas, la inestabilidad puede llegar a originarse antes que el esfuerzo unitario alcance el valor del límite elástico. (Mc. Cormac, 2005, pág. 235)

De acuerdo con lo referido anteriormente, la deformación de la columna estará en función de la carga crítica actuante en su sección siendo directamente proporcional a los sucesivos incrementos de su valor por lo que se vuelve imprescindible establecer una adecuada combinación de las cargas parciales las mismas que en conjunto darán como resultado la carga axial actuante total.

2.3. Pandeo de columnas

“Se conoce como pandeo al fenómeno de carácter elástico que se suscita en elementos esbeltos sometidos a acciones compresivas, mismo que se manifiesta por el surgimiento de desplazamientos considerables en sentido transversal a la dirección principal de compresión”. (Mc. Cormac, 2005, pág. 228)

El fenómeno de pandeo viene siendo un parámetro fundamental en el comportamiento mecánico de los elementos barra verticales, en este caso las columnas, debido a que su flexibilidad dependerá en forma directa tanto de su sección transversal como de la carga crítica actuante junto con sus propiedades mecánicas, el esfuerzo de fluencia y su módulo de elasticidad. El pandeo de las columnas, por lo tanto, será un factor útil para determinar la capacidad de resistencia de las columnas ante las acciones de las cargas externas, y, por ende, su dimensionamiento en la fase de diseño.

2.4. Tipos de equilibrio en columnas

Las columnas pueden presentar dos tipos de equilibrios: Equilibrio estable y equilibrio inestable. A continuación, se describirán cada uno de ellos.

- **Equilibrio estable**

Según Vera Lázaro

Al considerarse una columna axialmente cargada con sus extremos no restringidos ante las acciones rotatorias, al estar el miembro en estado inicial perfectamente recto, este conservará dicho estado de rectitud mientras la carga actuante P tenga un valor menor al de la carga crítica P_0 . Si se aplica una pequeña carga transversal, la columna experimentará un fleje, pero retomará su posición inicial recta al momento de suprimir la referida carga. Así, cuando P tenga un valor menor que P_0 , tanto las fuerzas internas como externas estarán en un estado de equilibrio estable. (Vera Lázaro, 2013, pág. 155)

El equilibrio será estable, por lo tanto, cuando la columna retorne a su posición recta inicial una vez que se haya suprimido la carga transversal que alteraba el referido estado lo hará sin contratiempo alguno que altere su equilibrio inicial, es decir, la deformación se encontrará dentro de un rango de proporcionalidad a la carga aplicada, algo análogo a lo que plantea la Ley de Hooke: La deformación es directamente proporcional al esfuerzo dentro de un determinado rango de cargas. (Figura 4). Es decir, mientras la carga vaya dentro de un límite apropiado, la columna experimentará deformaciones equilibradas que no alterarán mayormente su estado de equilibrio.

- **Equilibrio inestable**

Según Merrit y Ricketts

Si $P = P_0$ y se aplica una pequeña carga transversal a la columna, esta experimentará un fleje al igual que en el caso de equilibrio estable pero ahora con la diferencia de que al suprimirse la referida carga, la columna permanecerá en su nueva posición, es decir, la que adquirió en el estado de flejamiento. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.57)

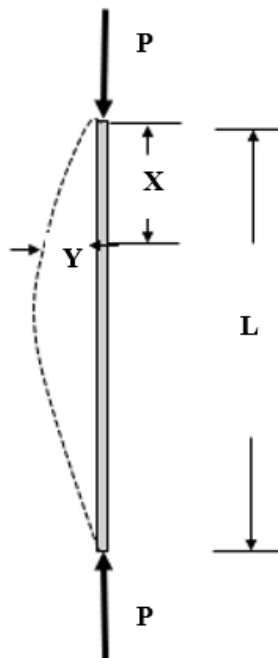


Figura 3.- Pandeo de una columna articulada en sus dos extremos.

La ecuación de la curva elástica que adquirirá la columna en el nuevo estado es la siguiente:

$$EI = \frac{d^2y}{dx^2} - PcY$$

Ecuación 14.- Ecuación de la curva elástica en el estado de flejamiento.

Dónde: E= Módulo de elasticidad, I = Momento de inercia, Y= Deflexión del momento flejado desde la posición recta hasta la distancia “x” de un extremo.

Se supondrá, obviamente, que los esfuerzos se hallan dentro del límite elástico. La solución de la expresión representada en la ecuación 14 dará como resultado el menor valor de la carga de Euler expresado de la siguiente forma:

$$Pc = \frac{\pi^2 * EI}{L^2}$$

Ecuación 15.- Valor menor de la carga de Euler.

La expresión representada en la ecuación 15 indica la existencia de una magnitud finita definida de una carga axial que mantendrá a la columna en posición flexionada en el instante en que los esfuerzos se hallen situados por debajo del límite elástico. La aplicación y remoción repetida de cargas transversales pequeñas, así como pequeños incrementos de carga axial sobre esta carga crítica dará como resultado la falla del miembro por pandeo, estando las cargas tanto internas como externas en estado de equilibrio inestable. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.57)

En el estado de equilibrio inestable, la columna si bien se mantiene en equilibrio, esta, sin embargo, no retornará a su posición original ni recobrará su forma primitiva, por lo que puede deducirse que esta situación se deberá a la presencia de esfuerzos internos en las fibras del material que conforma el miembro, quedando estos retenidos en las referidas fibras dando así lugar al fenómeno de la plasticidad. Una vez que se ha llegado a la carga crítica y se producen incrementos mínimos o no se produce ningún incremento

llegando al estado de colapso del miembro a flexión, se deduce que el material ha llegado al límite de fluencia.

“Es necesario mencionar que la carga de Euler, la cual determina la capacidad de soporte de carga de una columna, depende de la rigidez del miembro debido a que se expresa por el módulo de elasticidad en lugar de la resistencia del material del cual está construido”. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.57)

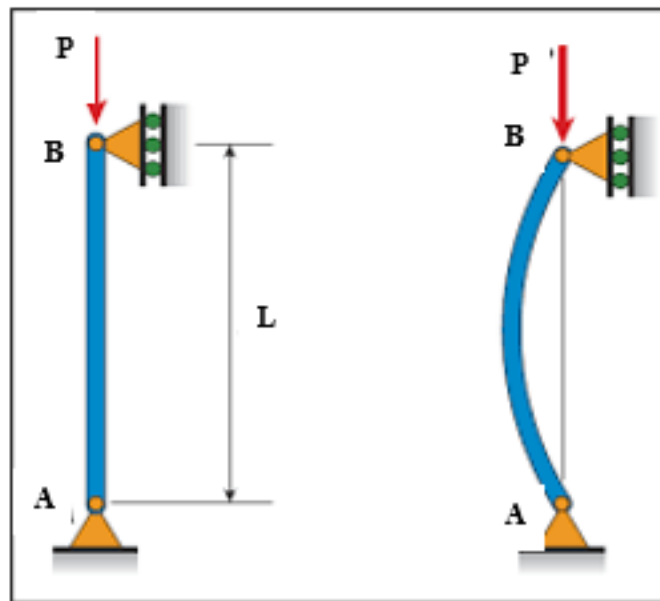


Figura 4.- Estados de equilibrio de una columna sujeta a carga axial de compresión:
Equilibrio estable (Izquierda), equilibrio inestable (Derecha).

Fuente: (González Cuevas, 2003, pág. 220)

De acuerdo con lo anterior, se deduce que la capacidad de las columnas para resistir a las acciones de cargas externas está en función de su rigidez, es decir, de la resistencia que estas ofrecen al cambio de estado, por ello, entonces, la esbeltez viene siendo un factor preponderante en el estudio del fenómeno de pandeo lateral, mismo que está directamente relacionado con la rigidez de los miembros.

Al dividir los dos miembros que conforman la expresión representada en la ecuación 15 por el área de su sección transversal se tiene la siguiente relación:

$$\frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2}$$

Ecuación 16.- Ecuación del esfuerzo unitario promedio sobre la sección transversal.

El miembro r^2 viene siendo el resultado de la división entre I y A por lo que vendrá siendo el radio de giro de la sección elevado al cuadrado. Es conveniente aclarar que la expresión 16 es válida únicamente dentro del rango elástico de pandeo, o sea, para valores de la relación de esbeltez $\frac{L}{r}$ comprendidos sobre un cierto valor límite, el mismo que dependerá de las propiedades del material.

2.5. Efecto de las condiciones de los extremos

La ecuación 16 está basada en la suposición de que los apoyos en los extremos de la columna están en libertad de rotar, sin embargo, es lícito hacer una generalización que permita tomar en cuenta el efecto de las condiciones de los extremos, la misma que se expone en el modelo de la ecuación 17 que se muestra a continuación:

$$\frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 * E}{\left(k * \frac{L}{r}\right)^2}$$

Ecuación 17.- Ecuación del efecto de las condiciones de los extremos.

Dónde k viene siendo el factor que depende de las condiciones de los extremos cuyos valores son los siguientes:

Tabla 2.- Valores de k para diferentes condiciones de extremos.

<i>k</i>	CONDICIONES DE EXTREMOS
1	Doblemente articulados
0,5	Doblemente empotrados
0,7	Un extremo empotrado y un extremo articulado
2	Un extremo empotrado y un extremo libre

Fuente: (González Cuevas, 2003, pág. 215)

Es decir, el valor de *k* viene siendo el parámetro que define la curva elástica que adoptará el miembro barra a una determinada condición de apoyo en los extremos al ser sometida a cargas compresivas.

2.6. Pandeo inelástico

Tanto las ecuaciones 16 como 17 procedieron de la ecuación 14, misma que viene siendo la ecuación diferencial de la curva elástica. Las expresiones anteriores están basadas en la suposición de que el esfuerzo promedio crítico se encuentra por debajo del límite elástico al llegar al estado de equilibrio inestable. A pesar de lo anterior, no obstante, en miembros con relaciones de esbeltez $\frac{L}{r}$ que se encuentran por debajo de un cierto valor límite, el límite elástico se excederá antes de que la columna llegue al estado de pandeo. A medida que la carga axial se acerca a la carga crítica, el módulo de elasticidad se volverá variable con el esfuerzo, por lo que se deduce que el efecto de las ecuaciones anteriores no tendrá validez alguna en las columnas cortas. A raíz de la limitación anterior, se hicieron diversos y extensos ensayos experimentales, los mismos que permitieron obtener un modelo matemático semejante al de la ecuación 17 con parámetros aplicables al rango inelástico:

$$\frac{P_t}{A} = \frac{\pi^2 * E_t}{(k * \frac{L}{r})^2}$$

Ecuación 18.- Ecuación de Engesser para los metales en el rango inelástico.

Dónde:

P_t : Carga axial más pequeña en la cual son posibles dos estados de equilibrio, posición recta y posición flejada, de acuerdo a ello se la puede llamar carga de transición.

E_t : Módulo tangente, pendiente real de la curva esfuerzo/deformación para el esfuerzo P_t/A que reemplaza al módulo de elasticidad E dentro del rango elástico.

2.7. Pandeo local

Las columnas no solamente pueden fallar por el pandeo del miembro total sino también por el pandeo de uno o varios de sus componentes. De acuerdo con lo anterior, entonces, cuando son empleados en calidad de columnas otros miembros tipo barra como vigas tipo I, canales y secciones angulares deberá de analizarse la posibilidad de carga crítica sobre un componente que pueden ser ya sea un nervio o barra de celosía que bien puede ser menor que la referida carga crítica actuante sobre la columna como un todo, es decir, una fracción de la carga crítica de columna.

De igual forma, deberá de tomarse en cuenta la posibilidad de la ocurrencia del fenómeno de pandeo ya sea sobre la aleta de compresión o el nervio de una viga. No obstante, el pandeo local no siempre derivará en una reducción de la capacidad portante de carga en una columna, resultando en algunos casos en una redistribución de los esfuerzos lo que permitirá que el miembro pueda soportar carga adicional.

2.8. Curvas de columna

“Se denominan curvas de columna aquellas que se obtienen trazando el esfuerzo crítico para un conjunto de valores de la relación de esbeltez”. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.58)

Para los casos de columnas de posición recta inicial y axialmente cargadas, las curvas de columna se subdividen en dos partes: la curva de valores críticos de Euler y la curva de valores críticos de Engesser o módulo tangente.

En lo referente a los valores del módulo tangente, estos se verán considerablemente afectados por la forma de la curvatura esfuerzo – deformación para el material del que se halla construida la columna.

Según Gear:

La curva esfuerzo-deformación para un material como la de una aleación de aluminio o la de un acero de alta resistencia, que no tiene un punto de fluencia estrictamente definido se muestra en la figura 5. La curva de columna correspondiente es la que se expone en la figura 6. En contraste, la figura 7 representa la curva esfuerzo-deformación para el acero estructural, que como se podrá observar, presenta un punto claramente definido teniéndose en el diagrama representado en la figura 8 su respectiva curva de columna, la misma que tiende a volverse paralela al eje de las abscisas a medida que el esfuerzo crítico se aproxima a la resistencia de fluencia del material y el módulo tangencial es prácticamente cero, en tanto que en la curvatura de la figura 6 continuarán decreciendo progresivamente los valores de la relación de esbeltez. (Gere & Goodno, 2016, pág. 124)

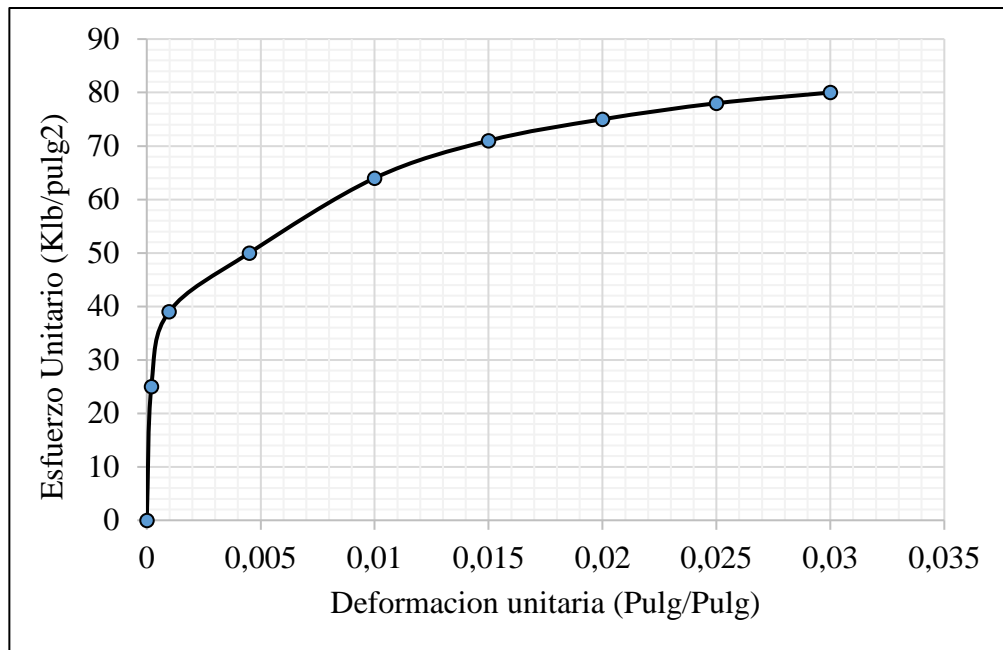


Figura 5.- Curva de Esfuerzo-deformación para un material sin punto de fluencia estrictamente definido.

Fuente: (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.59)

En el diagrama de la figura 8, de acuerdo a la zona en donde la curvatura cae dentro del rango elástico, se puede observar que el valor de la pendiente tiende a aumentar considerablemente tornándose las relaciones de esbeltez muy sensibles a las variaciones del factor k , mismo que representa el efecto de las condiciones de los extremos. Por otro lado, en el rango inelástico, donde la curvatura de columna es relativamente plana, el esfuerzo crítico será relativamente insensible a las variaciones de k . De acuerdo con lo anterior, entonces, el efecto de las condiciones de los extremos sobre la estabilidad de las columnas tiene mucho mayor importancia para las columnas largas que para las columnas cortas.

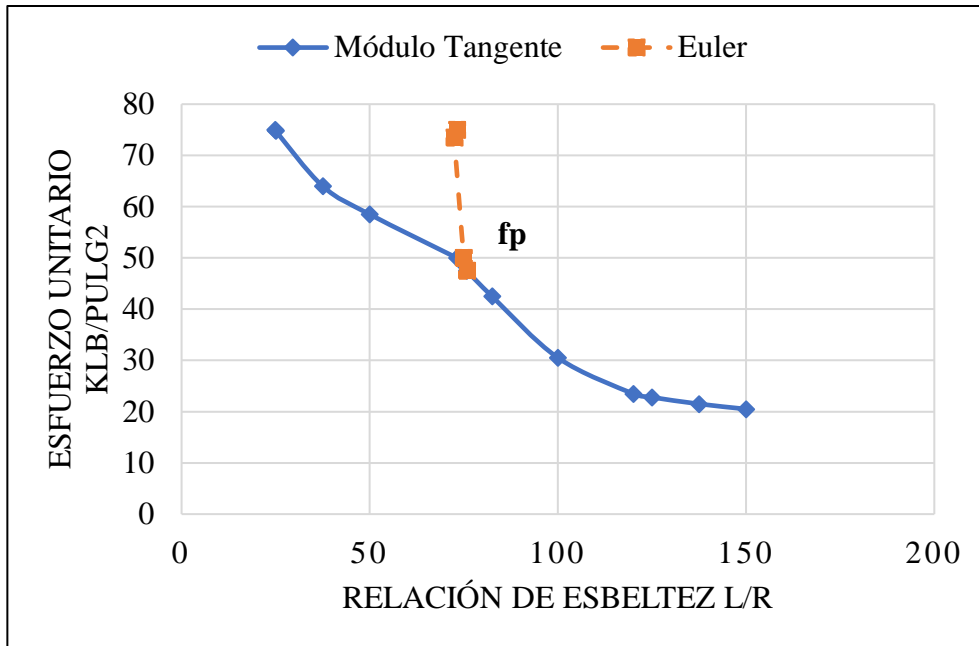


Figura 6.- Curva de columna para un material sin punto de fluencia definido.

Fuente: (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.59)

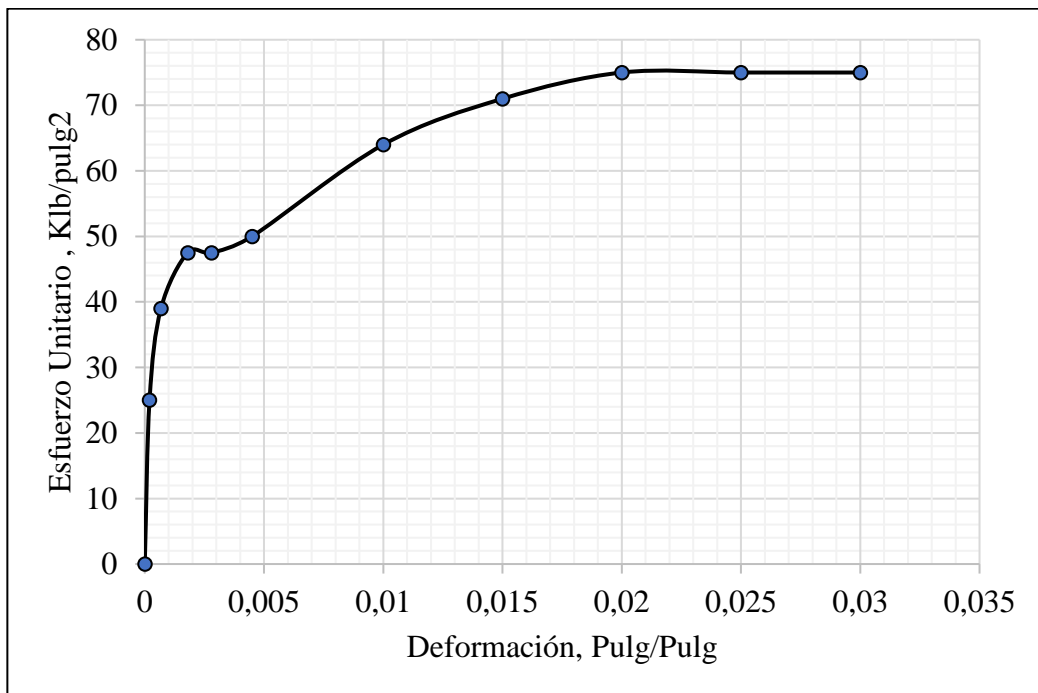


Figura 7.- Curva Esfuerzo-Deformación para un material con punto de fluencia estrictamente definido.

Fuente: (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.59)

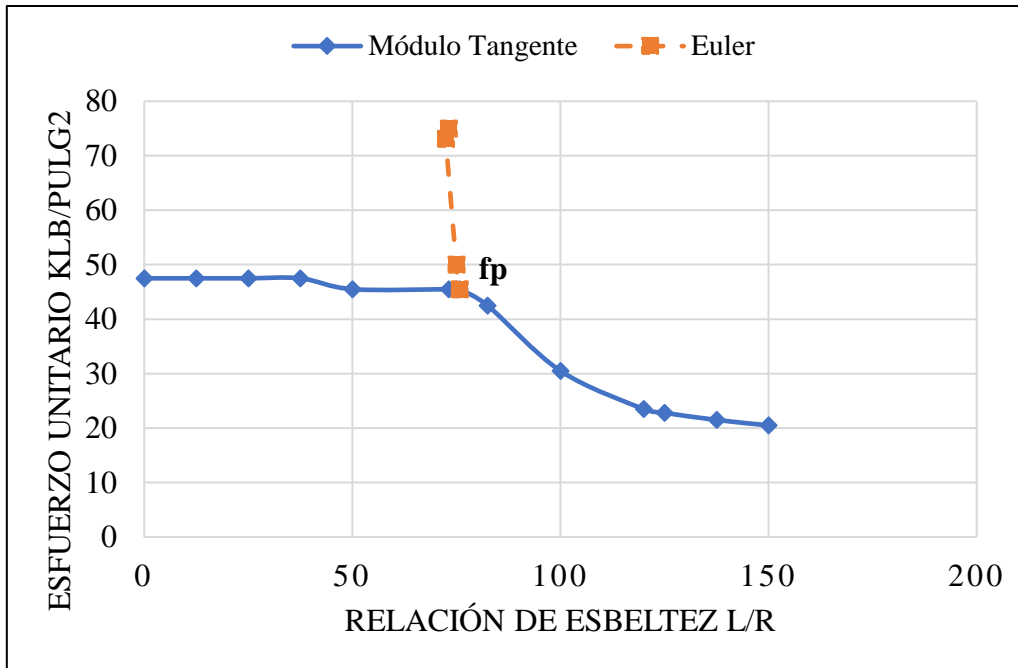


Figura 8.- Curva de columna para un material con punto de fluencia definido.

Fuente: (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.59)

Luego de haberse analizado los respectivos casos de forma minuciosa, se deduce en que se debe de procurar utilizar materiales que tengan punto de fluencia estrictamente definido puesto que como pudo observarse en la curva genérica de columna, el fenómeno de pandeo tanto elástico como inelástico se suscita dentro del límite de fluencia lo que permite trabajar con relaciones de esbeltez variadas a las cuales se podrá acomodar el diseñador lo que permitirá optimizar costos de material y de construcción.

2.9. Comportamiento de las columnas reales

“Por muchas razones, las columnas de los sistemas estructurales tienen un comportamiento diferente a las columnas ideales que se supusieron al derivar las ecuaciones 15 y 18”. (Merrit & Ricketts, 1997, pág. 5.60)

Es necesario resaltar sobre todo el efecto de imperfecciones de carácter accidental estando entre las más comunes, la heterogeneidad de los materiales debido a

su imperfección, sinuosidades iniciales y excentricidades involuntarias de la carga axial, estos factores se deben sobre todo a que pueden surgir imperfecciones ya sea en los talleres o en las obras. Tanto los factores anteriores como los efectos surgidos a causa de los esfuerzos residuales, se los puede atenuar por medio de la selección de un factor de seguridad adecuado. A pesar de lo anterior, es necesario tomar en cuenta otras condiciones significativas al momento de efectuar el diseño estructural estando entre las más importantes las siguientes: la continuidad de las estructuras aporricadas y la excentricidad de la carga axial. Los efectos de la continuidad afectarán la acción de la columna de dos formas: Por la restricción en los extremos (para las cuales debe de determinarse el valor de k) y por los momentos flectores que serán transmitidos a las columnas por los miembros estructurales contiguos, es decir, una transmisión en cadena de miembro a miembro.

Debido a la diferencia del comportamiento de las columnas reales con respecto a una columna ideal, su diseño se basa generalmente en fórmulas de carácter empírico en donde comúnmente se dan ecuaciones separadas para columnas cortas, intermedias y largas.

2.10. Pandeo de Euler

Este principio está basado en averiguar la carga axial P que vuelve posible el estado de equilibrio en la configuración de flexión. En el estudio del pandeo de Euler se asumirán las siguientes hipótesis:

- El elemento barra estará articulado en ambos extremos y bajo la acción de una carga de compresión P .
- El estado de rigidez a flexión del elemento barra vendrá siendo el producto entre el módulo de elasticidad E por el factor de inercia a flexión I .

- La geometría del elemento barra es totalmente recta y la carga P está aplicada en su eje.
- Todas las deformaciones del material ocurrirán dentro del rango elástico.
- La deformación transversal que pueda llegar a experimentar el elemento en estudio será lo suficientemente pequeña lo que permitirá tomar en consideración que la expresión de la curvatura se puede linealizar de acuerdo al modelo matemático expuesto en la ecuación 19:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}} \cong y''$$

Ecuación 19.- Expresión de la curvatura del elemento barra.

Dónde, θ vendrá siendo el giro diferencial de un elemento infinitésimo de la barra y S el parámetro arco. Es necesario aclarar que para que la curvatura pueda ser linealizada $y'(x) \ll 1,0$. El hecho de asumir esta hipótesis de pequeñas deformaciones no significa que se pueden despreciar los movimientos transversales para establecer las ecuaciones de equilibrio, sino que se linealiza la relación momento-curvatura.

- Las condiciones de contorno se establecerán en $X = 0$ y $X = L$. Es lícito el intuir que debido al fenómeno de flexión el punto superior experimentará un desplazamiento, y , en consecuencia, el estado de las rótulas no coincidirá con estas dos abscisas, por lo tanto, se linealizan las condiciones de contorno. (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 38)

Una vez que se han establecido las hipótesis bajo las cuales aplicar el principio del pando de Euler, se procederá con la demostración de la ecuación 15 que es la que rige al mismo.

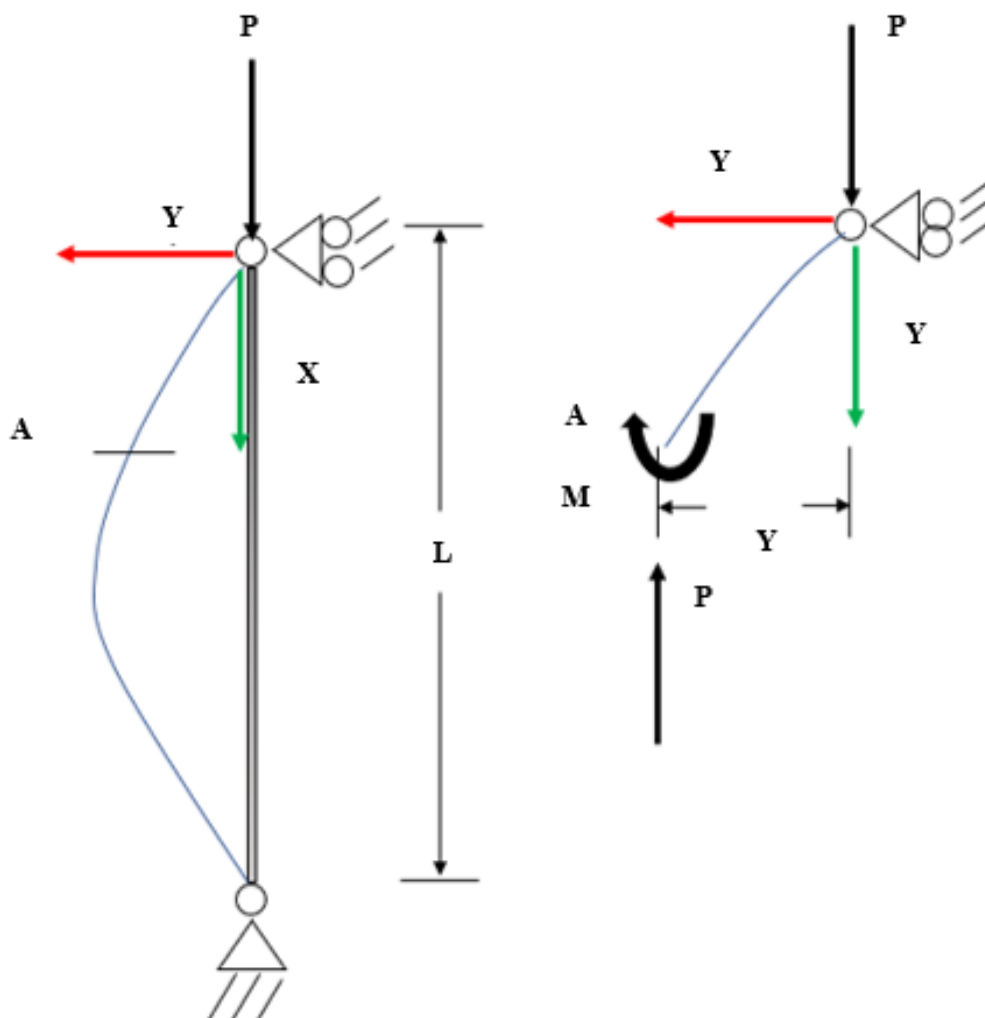


Figura 9.- Miembro barra doblemente articulado para plantear el problema de pandeo de Euler.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 39)

Sea un miembro barra bajo la acción de una carga de compresión P , de longitud L , articulado en el extremo inferior y con un grado de libertad mientras que el extremo superior está igualmente articulado con dos grados de libertad, como el representado en la figura 9. Al practicarse un corte en la sección A y equilibrando el tramo de viga superior, se planteará la ecuación de equilibrio de momentos con respecto al punto A , la misma que se representa en la ecuación 20:

$$M + Py = 0$$

Ecuación 20.- Momentos actuantes en la sección A.

Se tomó al sentido horario de los momentos con signo positivo, por lo que la relación de equilibrio rotacional toma el formato expuesto en la referida ecuación.

Ahora bien, el momento flector de un elemento tipo barra en función de su factor de inercia y el módulo de elasticidad de su material se expresa por medio de la siguiente relación:

$$M = \frac{EI}{\rho}$$

Ecuación 21.- Momento flector genérico de un elemento barra en función de su factor de inercia y su módulo de elasticidad.

Siendo ρ el radio de curvatura en un punto P de coordenadas P_x, P_y , a cierta distancia del origen, el mismo que se lo obtiene de la ecuación 19 teniendo el siguiente

formato matemático:

$$\rho = \frac{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Ecuación 22.- Radio de curvatura de una sección del elemento barra.

Reemplazando la ecuación 22 en la ecuación 21 se tiene:

$$M = \frac{EI * y''}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Ecuación 23.- Momento flector en función del radio de curvatura de una sección del elemento barra.

Como la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de la curva elástica del elemento barra en la totalidad de sus puntos es numéricamente pequeña la expresión 23 se simplifica quedando expresado el momento flector de la siguiente forma:

$$M = EI * y''$$

Ecuación 24.- Momento flector simplificado.

El momento flector de la ecuación 24 también puede expresarse como:

$$M = EI * \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ecuación 25.- Momento flector en función de la segunda derivada de la curva elástica.

Remplazando la ecuación 25 en la ecuación 20 se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0$$

Ecuación 26.- Ecuación diferencial del equilibrio de momentos actuantes en la sección A.

La ecuación 26 es una EDO lineal homogénea de coeficientes constantes, siendo sus condiciones de contorno las siguientes:

$$Y(0) = 0; Y''(0) = 0$$

$$Y(L) = 0; Y''(L) = 0$$

Por la condición de apoyo simple en la que tanto el desplazamiento, así como el momento flector que es proporcional a la segunda derivada y'' deben de ser nulos en cada uno de los dos extremos del elemento barra sometido a compresión.

La ecuación diferencial representada en la ecuación 26 se solucionará de acuerdo a uno de los métodos expuestos en 2.1.3.1.1, como es una ecuación de tipo lineal homogénea se aplicará el artificio:

$$Y(X) = e^{\gamma X}$$

$$\text{Sea } \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \quad (1)$$

→ Como es una EDO de segundo orden únicamente: $Y''(X) = \gamma^2 * e^{\gamma X}$

$$\rightarrow \text{En (1): } \gamma^2 * e^{\gamma X} + \frac{P}{EI} * e^{\gamma X} = 0$$

$$\rightarrow e^{\gamma X} * \left(\gamma^2 + \frac{P}{EI} \right) = 0$$

$$\rightarrow \gamma^2 + \frac{P}{EI} = 0 \rightarrow \gamma^2 = -\frac{P}{EI}$$

$$\rightarrow \gamma = \pm \sqrt{\frac{P}{EI}} i$$

Como es una solución de carácter imaginario, entonces, se aplicará la ecuación

13:

$$\rightarrow Y(X) = e^0 * \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right]$$

$$\rightarrow Y(X) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (2)$$

→ Aplicando la condición de contorno para el desplazamiento en el extremo superior en (2) se tendrá:

$$Y(0) = [C1 * \cos(0) + C2 * \sin(0)] = 0$$

$$\rightarrow C1 * (1) + C2 * (0) = 0 \rightarrow C1 = 0$$

→ Reemplazando en (2) se tiene:

$$Y(X) = C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} X \quad (3)$$

→ Aplicando la segunda condición de contorno para el desplazamiento en el extremo inferior en (3) se tendrá:

$$Y(L) = 0 \rightarrow C2 * (\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L) = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4) tendrá dos alternativas de solución:

$$C2 = 0; (\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L) = 0$$

Siendo $C2 = 0$, o sea, una solución trivial

$$\text{Para } (\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} * L = 0; \sqrt{\frac{P}{EI}} * L = \pi$$

$$\rightarrow \frac{P * L^2}{EI} = \pi^2$$

$$\rightarrow P = \frac{\pi^2 * EI}{L^2}$$

Que viene siendo la ecuación 15 expuesta en 2.4. que expresa el valor menor de la carga de Euler.

Si embargo, la expresión obtenida está muy generalizada debido a que para que la función seno tenga el valor igual a cero, el ángulo correspondiente deberá de ser un múltiplo entero de π , o sea, si $\sin \theta = 0$, entonces, $\theta = n * \pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, por lo tanto, la solución real sería:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} * L = n\pi$$

Entonces, la ecuación de la carga de Euler sería:

$$P_c = \frac{(n\pi)^2 * EI}{L^2}$$

Para $n = 1, 2, 3, \dots$

Los diversos valores de las cargas se considerarán como cargas de pandeo debido a que representan las cargas para cada configuración sucesiva de pandeo como se expone en la figura 10. La solución del problema de Euler viene siendo, por lo tanto, un conjunto de cargas críticas relacionadas a un conjunto de modos de pandeo en donde para n modos están asociados su correspondiente valor de carga crítica, es decir, para cada modo existe una carga mínima que mantiene el equilibrio del miembro en su respectivo estado flexionante.

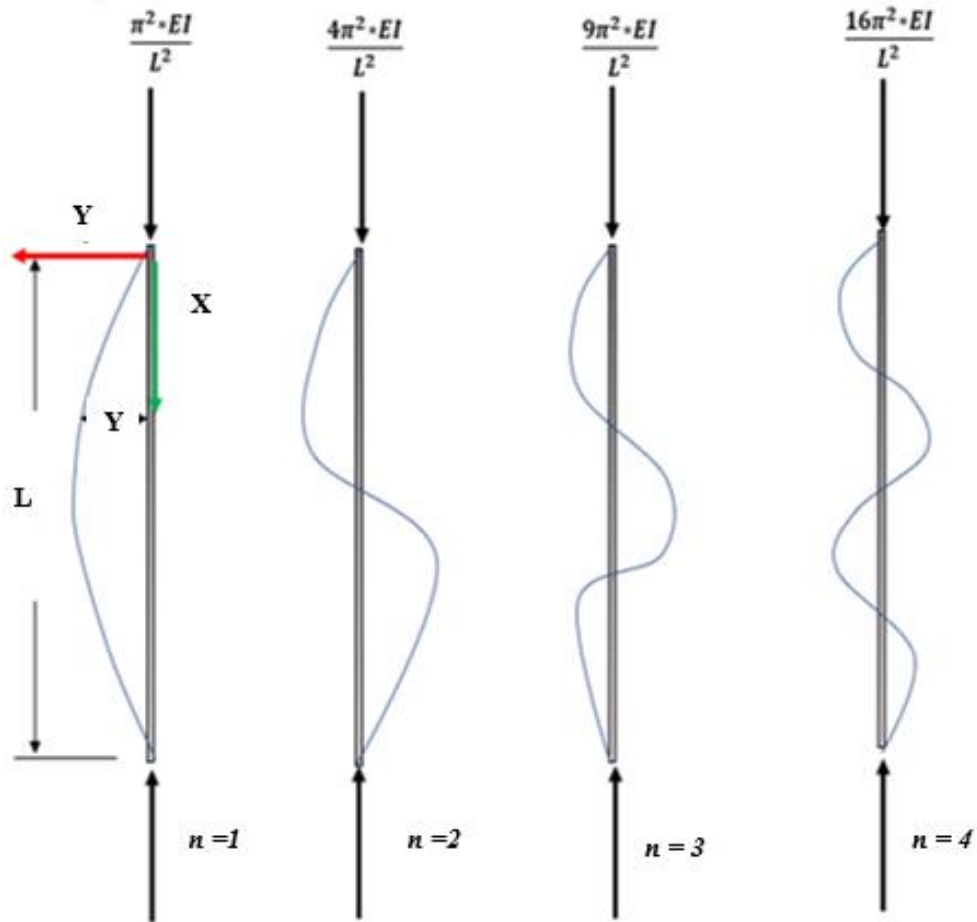


Figura 10.- Modos de pandeo y sus correspondientes cargas de Euler en columna bi articulada.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 42)

Una vez que se ha comprendido el concepto de la carga crítica de Euler y su procedencia, se verá un ejemplo de aplicación:

Según Martínez, Puertas:

Considérese una columna bi articulada de longitud $L = 1,0$ (m). La columna es de acero de las siguientes características: límite elástico $f_y = 400$ Mpa, módulo de elasticidad $E = 200$ Gpa. Su sección transversal es de geometría rectangular 50×10 mm². Averiguar:

1.- El valor de la fuerza máxima de compresión, por criterio de última resistencia. ($P_{m\acute{a}x.}$)

2.- El valor de la carga crítica P_E , siendo este el límite máximo para la fuerza de compresión, limitada por el criterio de inestabilidad.

3.- El valor que deberá de tener L para que se igualen $P_{m\acute{a}x}$ y P_E . (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 42)

Solución:

1.- Se sabe que: $f = \frac{P}{A} \rightarrow P = f * A \rightarrow P_{m\acute{a}x.} = f_y * A$ (1)

$f_y = 400 \text{ Mpa} = 4 * 10^5 \text{ Kpa}$; $A = 500 \text{ mm}^2 = 5 * 10^{-4} \text{ m}^2$

$\rightarrow P_{m\acute{a}x.} = 4 * 10^5 \frac{\text{KN}}{\text{m}^2} * 5 * 10^{-4} \text{ m}^2 \rightarrow P_{m\acute{a}x.} = 200 \text{ (KN)}$

Que es la máxima carga que la columna puede soportar.

2.- De acuerdo con la ecuación 15:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{L^2} \quad (2)$$

En donde la carga mínima de compresión está en función del momento de inercia de la sección, que como se puede observar es de geometría rectangular, por lo que el referido momento tendría dos valores en función tanto de su eje longitudinal como de su eje transversal. Como la carga crítica de Euler es el menor valor que puede generar estado de equilibrio en el estado de flexión, entonces, se tiene que determinar los momentos de inercia con respecto a los dos ejes y tomar el menor de ellos.

Entonces:

$$I = \frac{b * h^3}{12} \rightarrow I_x = \frac{10 * 50^3}{12} = 104166,67 \text{ mm}^4 = 1,042 * 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$I_Y = \frac{50 \cdot 10^3}{12} = 4166,67 \text{ mm}^4 = 4,167 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

Por lo tanto, se calculará P_E en función del valor de I_Y , entonces:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^8 (\text{Kpa}) \cdot 4,167 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4}{(1,0 \text{ m})^2}$$

$$\rightarrow P_E = 8,23 \text{ (KN)}$$

Se puede observar que el valor de la carga mínima de equilibrio en estado flexionante es mucho menor que la carga máxima que la columna en cuestión puede llegar a soportar, por lo tanto, aunque pueda llegar a resistir una carga de 200 (KN), la columna presentará serios problemas de estabilidad que comprometerán su óptimo funcionamiento y desempeño debido a inestabilidad transversal. De acuerdo con lo anterior, entonces, se deduce que la carga máxima por sí sola no garantiza la estabilidad en el comportamiento mecánico de los elementos sometidos a acciones de flexo compresión y que para que esto pueda lograrse, dicho valor tiene aproximadamente igual a la carga crítica de Euler.

3.- Para que el valor de la carga máxima pueda ser equivalente al valor de la carga crítica de Euler, simplemente se tienen que igualar la expresión (1) con la expresión (2):

$$f_y \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad (3)$$

Despejando L se tiene:

$$L = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{f_y \cdot A}} \quad (4)$$

Reemplazando los respectivos valores en (4) se tiene:

$$L = \sqrt{\frac{\pi^2 * 2 * 10^8 (Kpa) * 4,167 * 10^{-9} m^4}{4 * 10^5 \frac{KN}{m^2} * 5 * 10^{-4} m^2}}$$

Donde:

$$L = 0,203 (m) = 20,3 (cm)$$

Por lo que para que la columna pueda resistir una carga máxima sin correr el riesgo de flejarse deberá reducirse a 20,3 (cm).

Ahora bien, este ejemplo viene siendo un caso más de tipo ideal debido a que las longitudes de la columna, así como su sección tanto en su estado original como modificado tienen valores muy pequeños en comparación con las columnas de tipo estructural, sin embargo, este ejemplo sirve más que todo para ilustrar el comportamiento de las columnas ante las cargas de flexo compresión y los efectos en su estabilidad estructural para de esta forma tomar las respectivas medidas correctivas que garanticen su correcto funcionamiento.

CAPÍTULO III

DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES DE PANDEO

3.1. Consideración de grandes deformaciones

Para poder resolver de forma satisfactoria el planteamiento del problema del pandeo de Euler, deberá tomarse en consideración la solución de tipo no lineal, para ello, se considerará que la curvatura es grande, estableciendo las condiciones de contorno en los puntos reales de ubicación de las rótulas.

Considérese una columna doblemente articulada en una posición tal que el equilibrio pueda ser establecido con una deformada curva sometida a la acción de una carga P (Figura 11). A diferencia de la deformación lineal, la distancia existente entre los puntos de apoyo no es igual a la longitud inicial de la columna L debido a que el apoyo móvil superior experimentará un desplazamiento vertical en la misma dirección de la carga P . Lo anteriormente mencionado se describe en el bosquejo de la figura en base a la configuración inicial representada en línea discontinua. En la situación representada, L vendrá siendo igual al valor de la longitud de la línea media, la misma que se asumirá constante durante todo el transcurso del movimiento igual que la longitud de la sección axial. En el bosquejo mencionado se ha representado además una porción de la sección de la columna en donde el ángulo θ viene siendo el giro en las distintas secciones, siendo su máximo valor el correspondiente a las secciones extremas, el mismo que viene representado por α como se aprecia en el mencionado bosquejo.

Una vez conocidos los respectivos parámetros, se define la curvatura de una sección por medio de la ecuación 27:

$$K = \frac{d\theta}{ds}$$

Ecuación 27.- Curvatura de una sección de la columna en estado de deformación no lineal.

Dónde:

$d\theta$: Variación del giro de la sección.

ds : Variación de la longitud del arco de la fibra media.

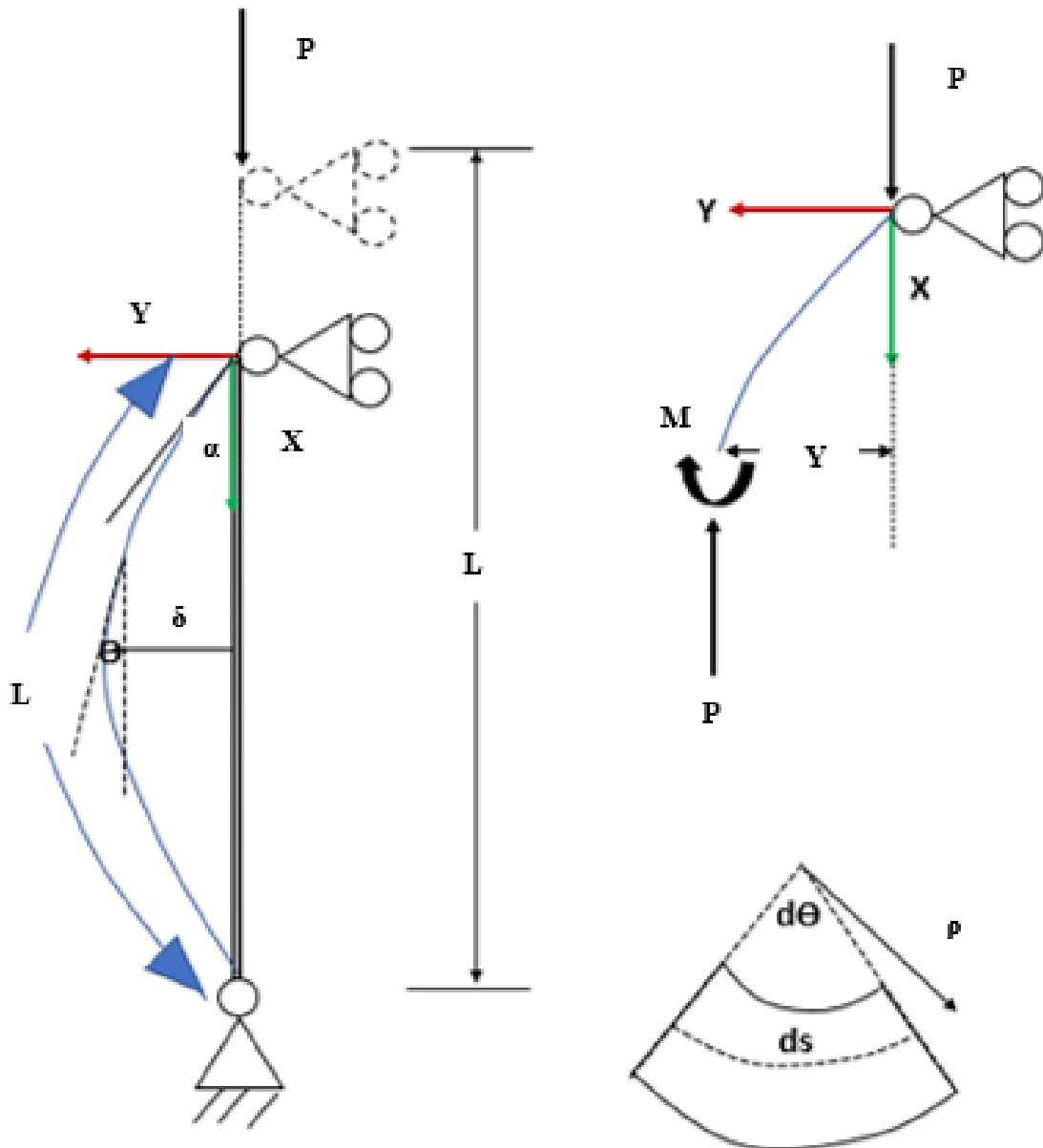


Figura 11.- Columna doblemente articulada bajo deformación no lineal.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 45)

La ecuación de equilibrio 20 seguirá teniendo validez, no obstante, la relación momento – curvatura viene representada en la ecuación 28:

$$M = EI \frac{d\theta}{ds}$$

Ecuación 28.- Momento flector en función de la curvatura de la sección.

Por lo tanto, la ecuación 20 se expresa:

$$EI \frac{d\theta}{ds} + Py = 0$$

Ecuación 29.- Ecuación de los momentos en una sección de una columna con deformación de tipo no lineal.

La solución se expresa en función de una integral elíptica, debido a que vienen combinadas dos variables dependientes entre sí s que depende del radio de curvatura y del ángulo θ girado en el recorrido de s :

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \delta^2 \sin^2 \phi}}$$

Ecuación 30.- Solución de la ecuación 29.

Dónde: $\delta = \sin \frac{\alpha}{2}$

La integral representada en la ecuación 30 es una integral elíptica completa de primera especie cuya demostración se omitirá, sin embargo, su primitiva viene expresada por la ecuación 31:

$$K' = \frac{\pi}{2} * \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \delta^2 + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 * \delta^4 + \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2 * \delta^6 + \dots \right\}$$

Ecuación 31.- Primitiva de la integral elíptica representada en la ecuación 30.

A partir de la integral elíptica se definen los parámetros siguientes:

$$\frac{\delta}{L} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{k'}$$

Ecuación 32.- Parámetro $\frac{\delta}{L}$ de k' .

$$\frac{P}{PE} = \frac{4*(k')^2}{\pi^2}$$

Ecuación 33.- Parámetro $\frac{P}{PE}$ de k' .

Dónde: δ viene siendo el máximo desplazamiento transversal que experimenta la sección central.

Al analizar problemas no lineales es frecuente efectuar la descripción de la relación existente entre la carga y los parámetros de la curvatura a medida que estos van evolucionando.

“Mediante una evaluación de desplazamiento controlado se podrá obtener el valor de la carga que está en la posición de equilibrio con una configuración deformada correcta”. (González Cuevas, 2003, pág. 104)

Al fijar el valor del ángulo α será posible obtener el valor de la carga P , misma que será compatible con un ángulo α fijo. A continuación, en la tabla 3, se representan los valores de los parámetros $\frac{\delta}{L}$ y $\frac{P}{PE}$ para diferentes valores de ángulos α junto con su respectiva curva, los mismos que han sido calculados mediante las ecuaciones 31, 32 y 33, las respectivas curvas vienen representadas en el diagrama de la figura 12:

Tabla 3.- Solución al problema de Euler no lineal

Fuente: Kevin Samaniego

α (grados)	$\frac{\delta}{L}$	$\frac{P}{PE}$ (No lineal)	$\frac{P}{PE}$ (Lineal)
0	0	1	1
10	0,0553	1,0038	1
20	0,1097	1,0154	1
30	0,1619	1,0351	1
40	0,2111	1,0637	1
50	0,2563	1,102	1
60	0,2966	1,1517	1
70	0,3313	1,2145	1
80	0,3598	1,293	1
90	0,3818	1,3898	1
100	0,3971	1,5078	1
110	0,4062	1,6485	1
120	0,4097	1,8113	1
130	0,4089	1,991	1
140	0,4054	2,177	1
150	0,4007	2,3545	1
160	0,3963	2,5025	1

En lo referente al parámetro P/P_E , se ha establecido el siguiente límite:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{P}{PE} = 1,0$$

Ecuación 34.- Límite del parámetro P/PE.

Es decir, cuando la carga adopta un valor lo más cercano posible a la carga crítica de pandeo. α viene siendo parámetro de la ecuación 33.

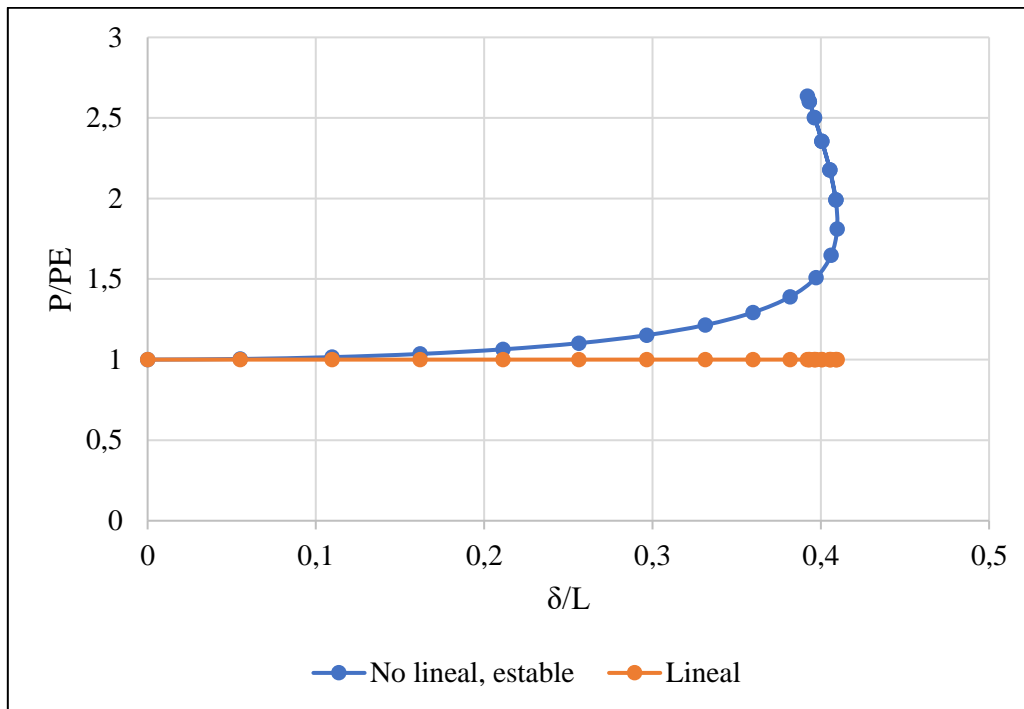


Figura 12.- Representación gráfica de la solución del problema de Euler: casos lineal y no lineal.

Fuente: Kevin Samaniego

Del cual se han comprobado y establecido las siguientes deducciones:

- Si $P < P_E$: La columna está en etapa pre crítica en donde se tiene una sola solución y la columna no experimentará desplazamientos transversales, en síntesis, la solución es de equilibrio estable.
- Si $P = P_E$: La columna está sometida a una carga crítica, hallándose esta en el punto de bifurcación, el mismo que se predice con su valor exacto por medio de la teoría lineal.

- Si $P > P_E$: La columna está en etapa post crítica en donde por medio de la aplicación de la teoría no lineal será posible establecer la relación existente entre cargas y desplazamientos transversales.

Siendo P_E la carga crítica de pandeo.

De acuerdo con lo anterior, entonces, por medio de la teoría no lineal es posible saber la descripción completa del fenómeno de pandeo, mientras que la teoría lineal se limita solamente a la obtención de la carga crítica. La teoría lineal, por lo tanto, permitirá una descripción apropiada de los puntos de bifurcación además de que se puede determinar la carga crítica de un modo sencillo.

3.2. Columna aislada bi articulada

Este caso se lo analizó de forma previa en 2.2.7, la ecuación de pandeo, por lo tanto, viene siendo la siguiente:

$$Y(X) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right]$$

Ecuación 35. Ecuación de pandeo para el caso de una columna aislada bi articulada.

En donde la carga crítica de Euler viene siendo:

$$P = \frac{\pi^2 * EI}{L^2}$$

Ecuación 36.- Carga crítica de Euler para el caso de columna aislada bi articulada.

3.3. Columna doblemente empotrada

Considérese un elemento sometido a carga de compresión simple cuyos dos extremos son perfectamente empotrados. En un determinado instante por acción de la referida carga, el elemento adoptará una configuración curvilínea actuando sobre cada

extremo empotrado un momento al que se lo denominará M_o , estando este en función de la amplitud del desplazamiento. Al igual que en el caso de la columna aislada bi articulada analizado en 2.2.7, se tomará una sección “A” de la columna representada en la figura 13 a) siendo su diagrama de fuerzas el representado en la figura 13 b).

La ecuación de momentos equilibrantes para la referida sección es la siguiente:

$$P*y + M - M_o = 0 \quad (1)$$

Tomando como positivo el sentido en dirección horaria.

Sabiendo que $M = EI*\frac{d^2y}{dx^2}$ (2), entonces, reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$P*y + EI*\frac{d^2y}{dx^2} - M_o = 0 \quad (3)$$

Reagrupando los términos de (3) y dividiendo para EI se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}*y = \frac{M_o}{EI}$$

Ecuación 37.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna doblemente empotrada.

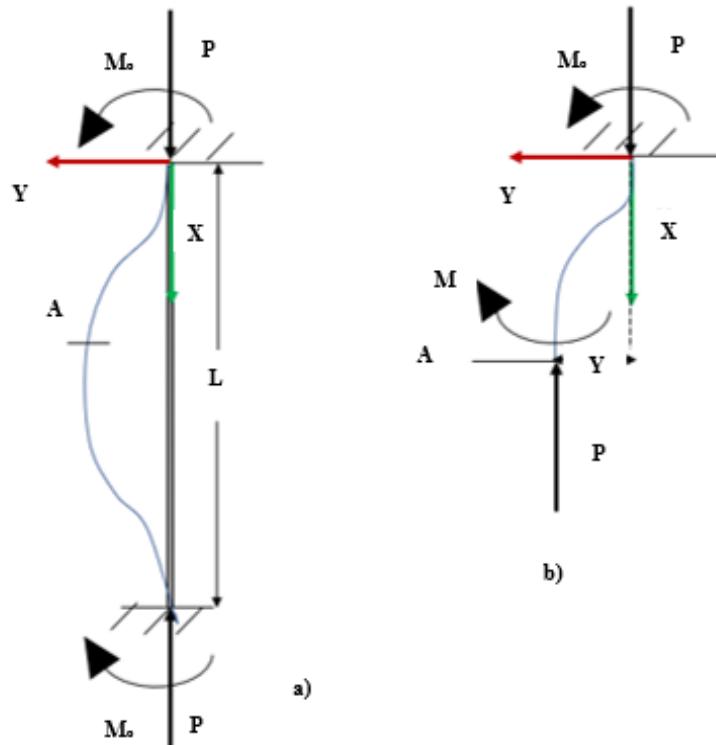


Figura 13.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna doblemente empotrada. b) Diagrama de fuerzas en la sección "A".

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 51)

El modelo matemático representado en la ecuación 37 viene siendo la ecuación diferencial del pandeo de una columna con apoyos doblemente empotrados en los extremos, misma que corresponde a una EDO de tipo lineal de coeficientes constantes no homogénea.

Las condiciones de contorno de la ecuación 37 son las siguientes:

$$Y(0) = 0; Y'(0) = 0$$

$$Y(L) = 0; Y'(L) = 0$$

La solución de la ecuación 37 viene siendo la suma de la solución general y la de su solución particular, tal como se la representa en la forma genérica descrita en la ecuación 7:

$$Y(x) = Y_H(x) + Y_P(x) \quad (4)$$

La solución general viene siendo la solución de la ecuación homogénea en la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} * y = 0 \quad (5)$$

Que como se puede observar, la ecuación (5) es de la forma de la ecuación 26 que corresponde a una columna aislada bi articulada

$$Y(X) = Y_H(x) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (6)$$

Para hallar la solución particular $Y_P(x)$, al ver que la ecuación 37 es de carácter lineal de coeficientes constantes no homogénea, debido a que su segundo miembro es una constante, entonces su solución será la siguiente:

$$Y_P(X) = A$$

$$Y_P'(X) = 0$$

$$Y_P''(X) = 0$$

Reemplazando en la ecuación 5

$$0 + \frac{P}{EI} * A = \frac{M_0}{EI}$$

Despejando A y despejando términos semejantes:

$$A = \frac{M_o}{P}$$

$$Y_p = A = \frac{M_o}{P}$$

También se puede efectuar en base a la simple inspección y su consecuente tanteo, siendo $Y_p(x) = \frac{M_o}{P}$, mismo que se comprobará a continuación:

$$Y_p(x)' = \left(\frac{M_o}{P}\right)' = 0, \text{ debido a que es un valor constante}$$

$$\rightarrow 0 + \frac{P}{EI} * \frac{M_o}{P} = \frac{M_o}{EI}, \text{ por lo que el valor asumido es correcto, por lo tanto:}$$

$$Y_p(x) = \frac{M_o}{P} \quad (7)$$

Reemplazando (6) y (7) en (4) se tiene:

$$Y(x) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] + \frac{M_o}{P}$$

Ecuación 38.- Ecuación de pandeo para el caso de una columna doblemente empotrada.

Una vez obtenido el modelo matemático genérico para el presente caso, se procederá a hallar la expresión que permita obtener la carga crítica de Euler.

Para obtener $C1$ y $C2$ se procederá aplicar las condiciones de contorno que rigen la ecuación 38:

$$Y(0) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 \right] + \frac{Mo}{P} = 0$$

$$\rightarrow C1 + \frac{Mo}{P} = 0 \rightarrow C1 = -\frac{Mo}{P} \quad (8)$$

Aplicando la segunda condición de contorno se tiene:

$$Y'(X) = -C1 * \sqrt{\frac{P}{EI}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sqrt{\frac{P}{EI}} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x$$

$$\rightarrow Y'(0) = -C1 * \sqrt{\frac{P}{EI}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 + C2 * \sqrt{\frac{P}{EI}} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} 0 = 0$$

$$\rightarrow C2 * \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0 \rightarrow C2 = 0 \quad (9) \rightarrow \text{Reemplazando (8) y (9) en la ecuación 38 se}$$

tiene:

$$Y(X) = -\frac{Mo}{P} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{Mo}{P}, \text{ quedando finalmente:}$$

$$Y(X) = \frac{Mo}{P} * \left[1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (10)$$

Para averiguar la carga crítica de Euler, entonces, se recurrirá a la tercera condición de contorno:

$$Y(L) = \frac{Mo}{P} * \left[1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L \right] = 0 \quad (11)$$

La ecuación (11) tiene por lo tanto dos probables soluciones, mismas que son:

$$\frac{M_o}{P} = 0; 1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$$

Como M_o no puede tener un valor nulo, entonces, la primera alternativa se descarta, debiendo entonces optar por la segunda alternativa:

$$1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0 \rightarrow \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 1$$

Siendo sus soluciones: $\sqrt{\frac{P}{EI}} * L = 0, 2n\pi$, debiendo optar por la segunda

solución, o sea: $\sqrt{\frac{P}{EI}} * L = 2n\pi \rightarrow \frac{P}{EI} * L^2 = (2n\pi)^2 \rightarrow P = \frac{(2n\pi)^2 * EI}{L^2}$

Siendo n los diferentes modos de pandeo que puede adquirir la columna, en donde el valor de la carga más baja será para el modo $n = 1$, por lo tanto, la ecuación de la carga crítica de Euler es la que se expone a continuación:

$$P_E = \frac{4\pi^2 * EI}{L^2}$$

Ecuación 39.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado en los dos extremos.

Al comparar la ecuación 39 con la ecuación 36, se puede deducir que la carga crítica de Euler en una columna doblemente empotrada es cuatro veces superior a la carga crítica de Euler en una columna doblemente articulada, lo cual es en cierta forma lógico puesto que para que la columna pueda llegar a pandearse es necesario vencer los efectos de los momentos M_o actuantes en los apoyos empotrados y para que ello ocurra la carga de flexión inminente debe de ser mayor.

Sin embargo, de la ecuación 39 se puede deducir un dato muy interesante, dicha ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{\left(\frac{L}{4}\right)^2}$$

Que viene siendo el equivalente de la ecuación 39, si se observa el bosquejo representado en la figura 14, en el tercio medio que tiene una longitud equivalente a $\frac{L}{2}$ como sus extremos tienen libertad de movimiento, entonces, es lícito afirmar que ese sector equivale a una columna bi articulada de longitud $\frac{L}{2}$, por lo que la carga crítica de pandeo de Euler es el equivalente al de la columna bi articulada.

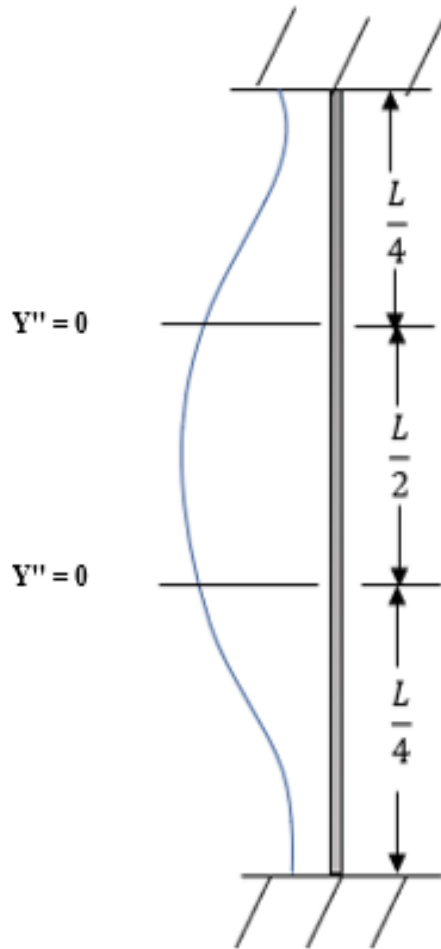


Figura 14.- Comportamiento de la sección central de una columna doblemente empotrada asumiendo que actúa como columna aislada bi articulada.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 54)

3.4. Columna con apoyos empotrado y libre

Para analizar el presente caso se considerará una columna con el extremo superior en un apoyo empotrado, mientras que el extremo inferior viene siendo un apoyo con un grado de libertad en sentido del eje de las abscisas como se muestra en el bosquejo representado en la figura 15.

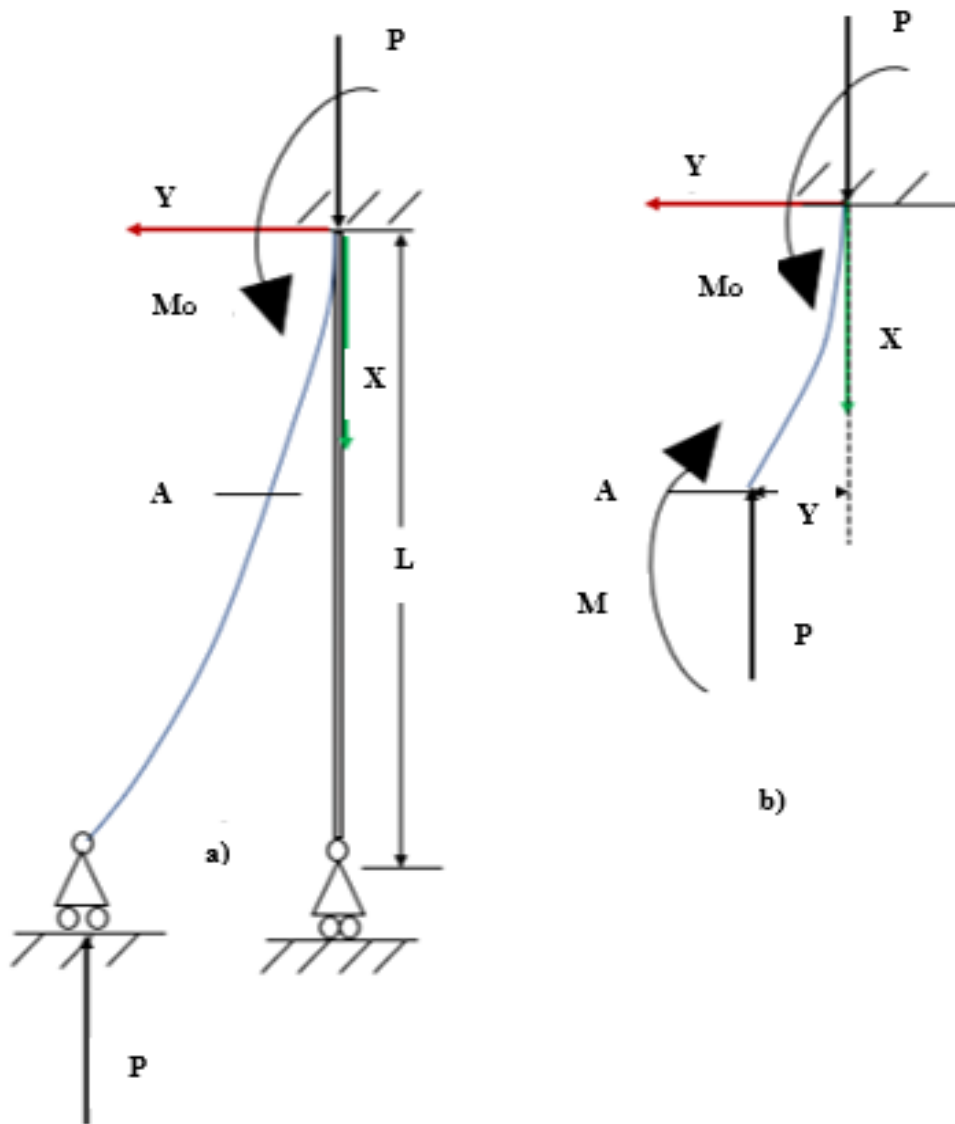


Figura 15.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna con apoyo empotrado – libre. b) Diagrama de fuerzas en la sección “A”.

La ecuación de momentos equilibrantes en la sección “A” del miembro, esquematizada en la figura 15 b) viene siendo: $M - M_o + P*Y = 0$ (1)

Que resulta similar a la ecuación planteada en 3.3, por lo tanto, la ecuación diferencial del pandeo vendrá siendo similar a la ecuación 37:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} * y = \frac{M_o}{EI}$$

Ecuación 40.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna con apoyo empotrado - libre.

La solución particular para un segmento viene siendo:

$$Y(X) = \frac{M_0}{P} * \left[1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (2)$$

Para columnas con apoyo empotrado y libre las condiciones de contorno son las siguientes:

$$Y(0) = 0; Y'(0) = 0 \text{ (Apoyo empotrado)}$$

$$Y(L) = 0; Y''(L) = 0 \text{ (Apoyo libre)}$$

Entonces, para hallar la carga crítica de pandeo de Euler en el presente caso se recurrirá a la cuarta condición de contorno:

Hallando la segunda derivada de (2) se tiene:

$$Y''(X) = \frac{M_0}{EI} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x$$

Aplicando la cuarta condición de contorno se tiene:

$$Y''(L) = \frac{M_0}{EI} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$$

En donde $\frac{M_0}{EI}$ es una solución trivial, por lo tanto, la solución alternativa viene

siendo:

$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$, entonces, para que la igualdad se cumpla $\sqrt{\frac{P}{EI}} * L$ tiene que

venir siendo un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$, o sea:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} * L = (2n - 1) * \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{P}{EI} * L^2 = (2n - 1)^2 * \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow P_E = \frac{(2n-1)^2 * \pi^2 * EI}{(2L)^2} \quad \text{Para } n = 1, 2, 3, \dots$$

El valor más bajo se obtendrá para $n = 1$, por lo tanto:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{4L^2}$$

Ecuación 41.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado - libre.

3.5. Columna con apoyo empotrado y deslizable

El presente caso es muy semejante al expuesto anteriormente, con la diferencia de que en el apoyo libre el giro es nulo en su totalidad lo que no condicionaba en el caso de la columna con apoyo empotrado y libre. En la figura 16 se describe el comportamiento mecánico de este tipo de columnas.

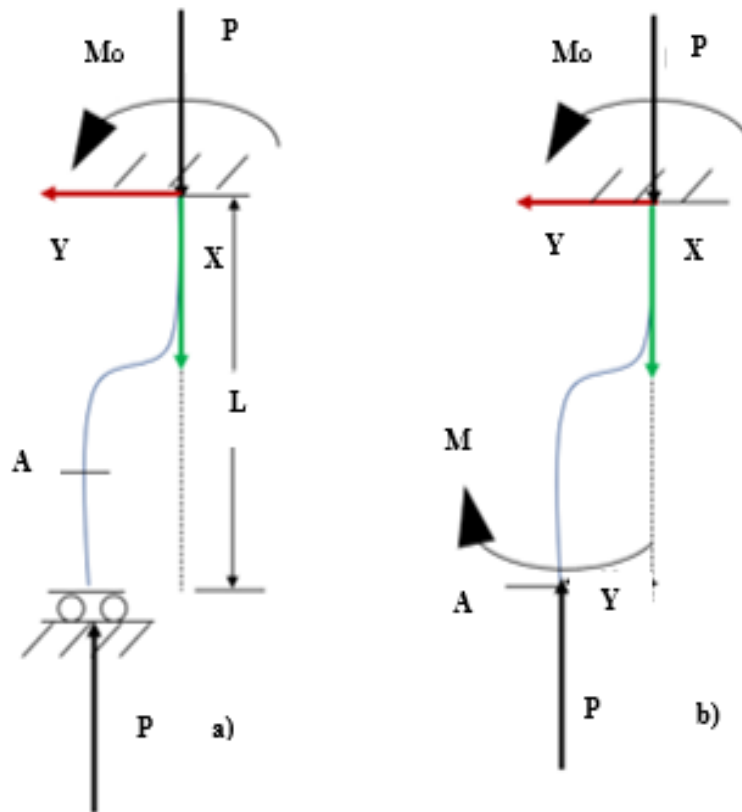


Figura 16.- a) Esquema del comportamiento mecánico de una columna con apoyo empotrado y deslizante. b) Diagrama de fuerzas en una sección de la columna.

Para este caso tanto la ecuación de equilibrio de momentos como la ecuación diferencial del pandeo son semejantes a las de la columna con apoyo empotrado – libre, por lo que la solución particular de un segmento de columna viene siendo:

$$Y(X) = \frac{M_0}{P} * \left[1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (1)$$

Como la condición para el apoyo deslizante es la de que su giro sea nulo, entonces:

$$Y'(X) = \frac{M_0}{P} * \left[\sqrt{\frac{P}{EI}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] = 0$$

$$\rightarrow \text{en } X = L: Y'(L) = \frac{M_0}{P} * \left[\sqrt{\frac{P}{EI}} \text{ sen } \sqrt{\frac{P}{EI}} L \right] = 0$$

$$\rightarrow \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0$$

En donde la solución viene siendo como la hallada en 2.27:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n * \pi \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

En donde la ecuación de la carga de pandeo crítico de Euler, para $n = 1$, es:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{L^2}$$

Ecuación 42.- Ecuación de la carga crítica de Euler para el caso de columnas con apoyo empotrado - deslizante.

Que es similar a la ecuación obtenida en 2.2.7. Como se puede observar, la carga crítica de pandeo de Euler en las columnas con apoyo empotrado-libre viene siendo la cuarta parte de dicha carga en las columnas con apoyo empotrado-deslizante, es decir, que para lograr que los giros rotacionales sean nulos en el apoyo deslizante es necesario aumentar cuatro veces la carga crítica de pandeo. Lo anteriormente afirmado se lo puede interpretar en el sentido de que una carga crítica menor logra un estado de pandeo en el que la columna tiende a salir de su estado de equilibrio inicial por medio del giro de su extremo libre, y, a medida que esta va aumentando, el apoyo libre tiende a consolidarse y a estabilizar su movimiento pasando de angular a lineal.

Al analizar la forma de la ecuación 41, se tiene lo siguiente:

$$P = \frac{\pi^2 * EI}{(2L)^2}$$

Lo que equivale a la ecuación crítica de pandeo de Euler para una columna con apoyo empotrado – libre de longitud doble a la de una columna con apoyo empotrado – deslizante. Para interpretar mejor esta analogía se recurre a la prolongación analítica, misma que viene siendo la función extendida que se la obtiene evaluando una función analítica fuera del intervalo donde se encuentra definida inicialmente. Tomando la curvatura que adquiere por efecto de la carga crítica de pandeo de Euler una columna con apoyos empotrado y libre y prolongando fuera del extremo empotrado una distancia igual a la longitud de la columna, se podrá concluir que, efectivamente la distancia entre los puntos de momento nulo es equivalente al doble de la longitud de la columna tal como se describe en el bosquejo representado en la figura 17.

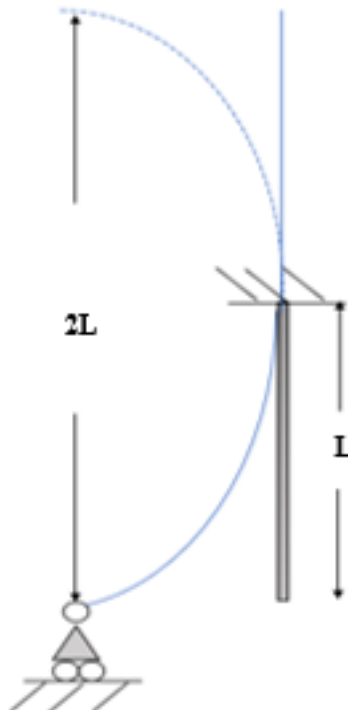


Figura 17.- Longitud de pandeo de columna empotrada - libre.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 60)

3.6. Columna con extremo apoyado – empotrado

El bosquejo representado en la figura 18 describe una columna de longitud “ L ” cuyos apoyos en los extremos son un empotramiento en el superior y un apoyo simple en el inferior. Para el caso analizado, es necesario contar con un par de fuerzas horizontal de magnitud $\frac{Mo}{L}$, mismo que logre mantener el estado de equilibrio necesario en la columna, así, dicho par estará conformado por una fuerza de sentido idéntico al del momento actuante en el extremo empotrado en el extremo libre, y otra de igual magnitud y sentido contrario en el extremo empotrado.

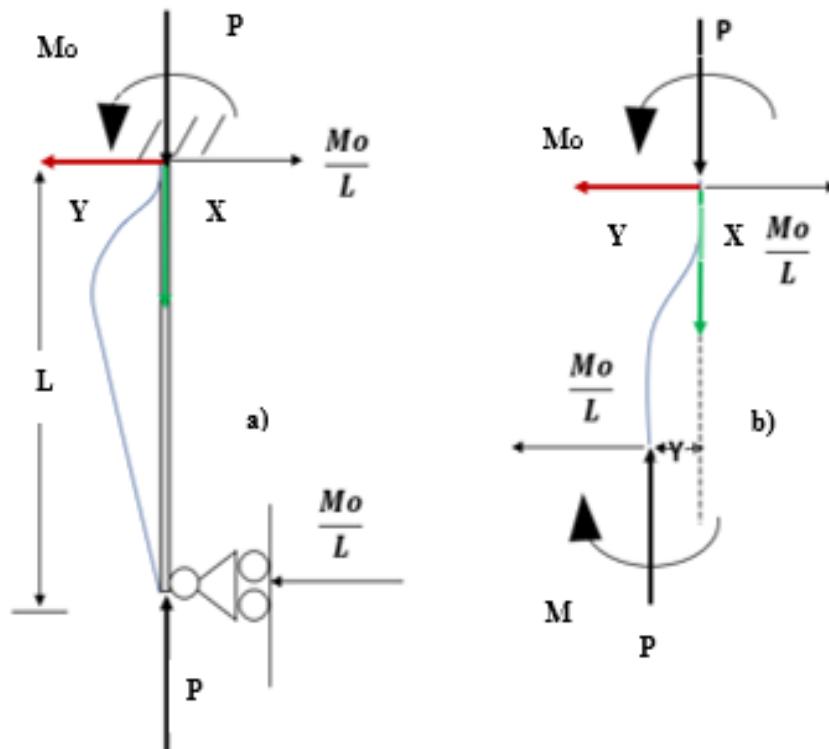


Figura 18.- Columna con apoyo empotrado - apoyado.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 60)

Al igual que en los casos anteriores, se seccionará un segmento de la columna comprendido entre el extremo superior y una longitud “x”. La ecuación de equilibrio de momentos en la referida sección viene siendo la siguiente:

$$Py + M - M_o + \frac{M_o}{L} * x = 0$$

Ecuación 43.- Ecuación de equilibrio de momentos de una sección en una columna con extremo empotrado - apoyado.

Al igual que en los casos anteriores, al dividir todos y cada uno de los miembros de la ecuación 43, por EI se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} * y = \frac{M_o}{EI} * \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Ecuación 44.- Ecuación diferencial del pandeo para una columna con extremo apoyado – empotrado.

La solución de la ecuación 44 viene siendo como la analizada en 3.3 en donde la solución total viene siendo la suma de la solución general más la solución particular. La solución general, como ya se conoce, viene siendo:

$$Y_H(x) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (1)$$

En lo referente a la solución particular, al igual que lo analizado en 3.3, como su segundo miembro viene siendo el producto de un factor constante por otro en donde en su segundo miembro consta una variable al igual que en el referido caso y se resuelve de la siguiente manera:

$$Y_p(x) = Ax + B$$

$$Y_p'(x) = A$$

$$Y_p''(x) = 0$$

Reemplazando en la ecuación 44:

$$0 + \frac{P}{EI} (Ax + B) = \frac{M_0}{EI} * \left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

Resolviendo la ecuación y despejando términos semejantes:

$$(P * Ax + P * B) = \left(M_0 * 1 - M_0 * \frac{X}{L}\right)$$

$$P * Ax = -M_0 * \frac{X}{L} \quad \text{(a)}$$

$$A = -\frac{M_0}{P * L}$$

$$P * B = M_0 * 1 \quad \text{(b)}$$

$$B = \frac{M_0}{P}$$

Reemplazamos A y B en Y_p :

$$Y_p(x) = -\frac{M_0}{P * L} x + \frac{M_0}{P}$$

$$Y_p(x) = \frac{M_0}{P} * \left(1 - \frac{X}{L}\right)$$

También se recurrirá al método de simple inspección y tanteo:

$$\text{Sea } Y(x) = \frac{M_0}{P} * \left(1 - \frac{X}{L}\right) \rightarrow Y'(x) = \frac{M_0}{P} * \left(-\frac{1}{L}\right), Y''(x) = 0$$

Se comprobará reemplazando en la ecuación 44:

$$0 + \frac{P}{EI} * \frac{M_0}{P} * \left(1 - \frac{X}{L}\right) = \frac{M_0}{EI} * \left(1 - \frac{X}{L}\right) \text{ cumple}$$

Por lo que la solución total de la ecuación 44 viene siendo:

$$Y(X) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] + \frac{Mo}{P} * \left(1 - \frac{X}{L} \right)$$

Ecuación 45.- Ecuación de pandeo para el caso de una columna con extremo empotrado – apoyado.

Una vez obtenida la ecuación en su forma genérica, se procederá a hallar la expresión de la carga crítica de pandeo de Euler, para ello, al igual que en los casos anteriores, deberán de hallarse los valores de $C1$ y $C2$ respectivamente.

Aplicando la primera condición de empotramiento se tiene:

$$Y(0) = 0 \rightarrow C1 + \frac{Mo}{P} = 0 \rightarrow C1 = -\frac{Mo}{P}$$

Aplicando la segunda condición de empotramiento se tiene:

$$Y'(0) = 0 \rightarrow -\sqrt{\frac{P}{EI}} * C1 * \text{sen} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \sqrt{\frac{P}{EI}} * C2 * \text{cos} \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{Mo}{P} * \left(\frac{-1}{L} \right) = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} * C2 = \frac{Mo}{PL} \rightarrow C2 = \frac{Mo}{PL \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

Reemplazando $C1$ y $C2$ en la ecuación 45 se tiene:

$$Y(X) = \left[-\frac{Mo}{P} * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{Mo}{PL \sqrt{\frac{P}{EI}}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] + \frac{Mo}{P} * \left(1 - \frac{X}{L} \right)$$

Ordenando los términos se tiene:

$$Y(X) = \frac{M_0}{P} \left[\frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + 1 - \frac{x}{L} \right] \quad (2)$$

Aplicando la tercera condición de empotramiento en la expresión (2) se tiene:

$$Y(L) = \frac{M_0}{P} \left[\frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L + 1 - 1 \right] = 0 \rightarrow$$

$$\text{Como } \frac{M_0}{P} \neq 0, \text{ entonces: } \frac{1}{L\sqrt{\frac{P}{EI}}} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L = \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L$$

$$\text{Sea } \phi = \sqrt{\frac{P}{EI}} L, \text{ entonces: } \frac{1}{\phi} * \sin \phi = \cos \phi \rightarrow \tan \phi = \phi \quad (3)$$

La ecuación (3) es una ecuación especial en la que para hallar su solución es necesario recurrir a artificios gráficos antes que matemáticos. Para cumplir con lo anterior, entonces, se aplicará el artificio de la cuerda-tangente, en donde mediante el empleo de la gráfica de dicha función se trazará una cuerda a dicha gráfica, misma que vendrá siendo el lugar geométrico de una función lineal en donde su variable independiente tiene el mismo valor de su variable dependiente, en este caso, los valores de los ángulos en radianes. Una vez que se ha trazado la gráfica de la función lineal, se localizarán cada uno de sus puntos de corte, máximo dos, y se pondrá atención en el primer punto de corte en donde el valor de su intersección viene siendo el mínimo, y, por tanto, vendrá siendo la solución de la ecuación (3).

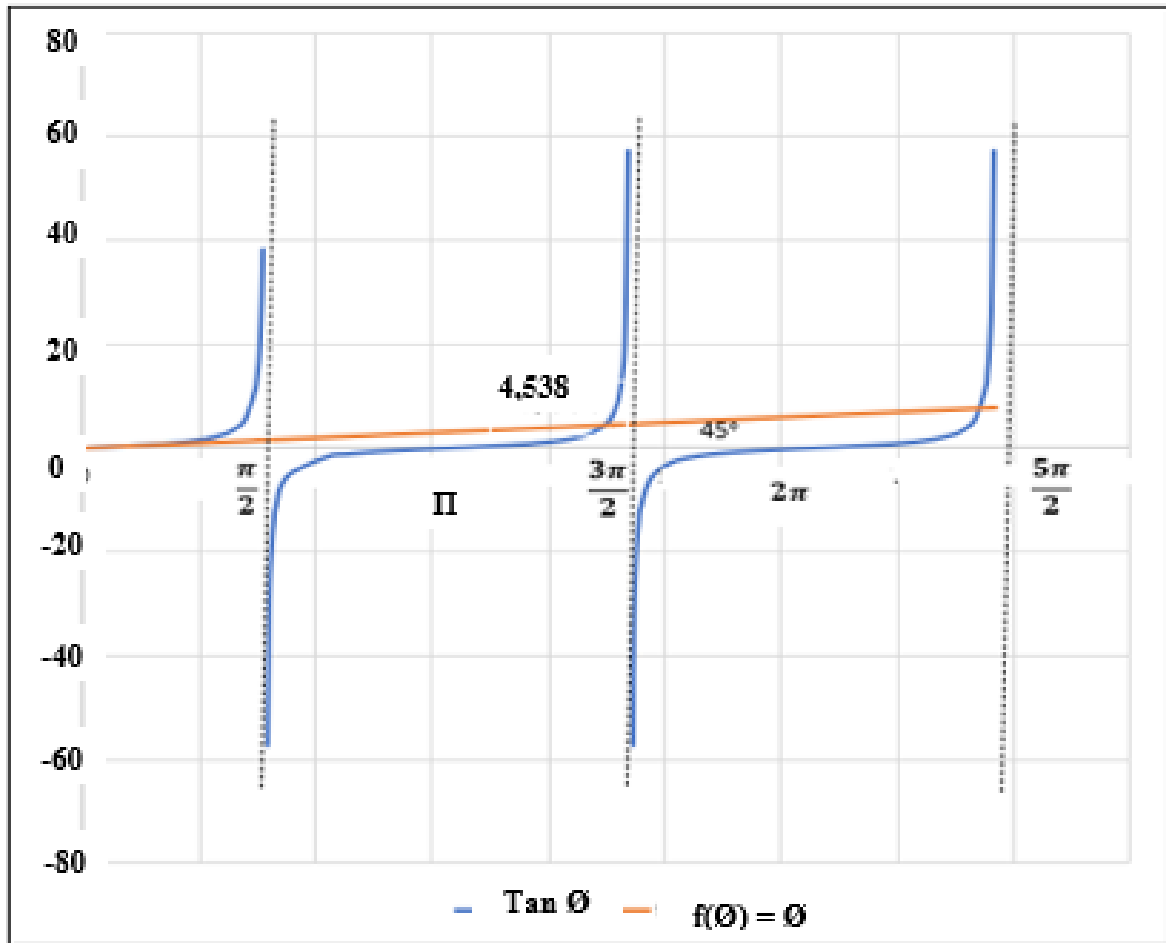


Figura 19.- Método de artificio gráfico de resolución de la ecuación (3).

El valor hallado viene siendo aproximadamente igual a 4,538 (figura 19), por lo tanto, $\varnothing = 4,538$, entonces:

$$4,538 = \sqrt{\frac{P}{EI}} L \rightarrow (4,538)^2 = \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right)^2$$

$$\rightarrow 4,538^2 = \frac{P}{EI} * L^2 \rightarrow P_E = \frac{4,538^2 * EI}{L^2} \quad (4)$$

La expresión (4) viene siendo prácticamente la ecuación de la carga de pandeo crítico de Euler, sin embargo, para que esta guarde semejanza con el modelo matemático

de la referida carga, se multiplicarán tanto el numerador como el denominador por el valor de π^2 , o sea:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{\frac{\pi^2}{4,538^2} L^2} \rightarrow$$

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{(0,7L)^2}$$

Ecuación 46.- Ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler para el caso de columnas con extremo apoyado – empotrado.

Como se puede observar en la ecuación 46, la carga crítica de pandeo euleriana en una columna con extremo apoyado-empotrado, equivale a la de una columna de apoyos articulados en sus dos extremos con una longitud igual al setenta por ciento de su longitud real, como se esquematiza en la figura 20.

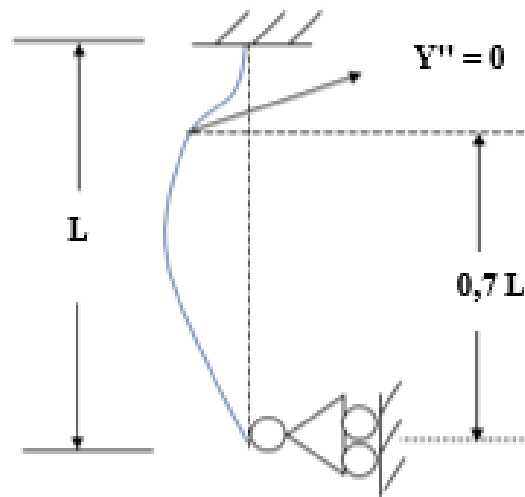


Figura 20.- Longitud de pandeo de columna empotrada - apoyada.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 62)

3.7. Columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga

El presente caso viene siendo de suma importancia en ingeniería debido a que prácticamente en la mayoría de los casos, las cargas actuantes sobre las columnas tienen su línea de acción a una cierta distancia del centroide de sus secciones siendo esta la excentricidad de la carga, produciéndose en consecuencia el fenómeno de flexo compresión.

Una vez explicada la importancia de este caso, se procederá al respectivo análisis del fenómeno de pandeo. Se considerará un elemento barra rectilíneo de longitud L cuya carga actúa a lo largo de una línea de acción ubicada a una distancia e del centroide de su sección.

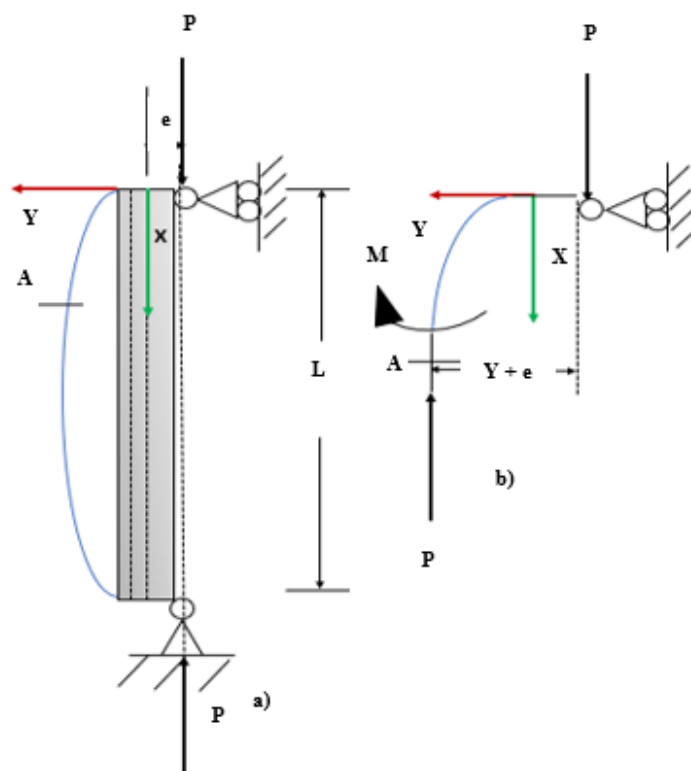


Figura 21.- Columna doblemente articulada con carga excéntrica.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 70)

Como primer detalle importante, es necesario advertir que, a pesar de ser un miembro con apoyos simples en los extremos, no hay que considerar erróneamente el hecho de que el momento en dicho extremo es nulo puesto que como la carga P está actuando en la distancia e respecto al centroide, ya se tiene un momento igual en magnitud al producto de la carga por la excentricidad, es decir, $M = P \cdot e$ como se aprecia en el esquema representado en la figura 21 a).

Una vez hecha la respectiva aclaración, se seccionará la columna en el corte A , representado en la figura 21 b) en donde actúan las respectivas cargas y momentos generados en dicha sección, siendo la ecuación de equilibrio de momentos la siguiente:

$$M + P \cdot (Y + e) = 0$$

Ecuación 47.- Equilibrio de momentos de una sección en una columna doblemente articulada con carga excéntrica.

Al igual que en los casos anteriores, dividiendo ambos miembros de la ecuación de equilibrio de momentos por EI , se tiene:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} Y + \frac{P}{EI} e = 0$$

Obteniendo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} Y = - \frac{P \cdot e}{EI}$$

Ecuación 48.- Ecuación diferencial del pandeo para columnas doblemente articuladas con carga excéntrica.

De forma similar a los casos anteriores, la solución de la ecuación diferencial de pandeo para columnas doblemente articuladas con carga excéntrica viene siendo la suma de la solución general y de la solución particular.

Para la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}Y = 0$, su solución general viene siendo:

$$y^h(x) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] \quad (1)$$

Mientras que la solución particular, al igual que en los casos anteriores:

$$Y_p(X) = A$$

$$Y_p'(X) = 0$$

$$Y_p''(X) = 0$$

Reemplazando en la ecuación 48

$$0 + \frac{P}{EI} * A = -\frac{P * e}{EI}$$

Despejando A y despejando términos semejantes:

$$A = -e$$

$$Y_p = A = -e$$

Mediante el método de la simple inspección y tanteo, para el presente caso, la solución particular resulta muy sencilla de determinar, ya que al fijarse en el miembro derecho de la ecuación 48, este viene siendo la excentricidad de la carga que actúa en la columna, en este caso, e , al notar que el segundo miembro tiene mucha semejanza con el segundo término del primer miembro, entonces, se asumirá que la solución particular será igual a $-e$, o sea: $Y(x) = -e$. Las derivadas tanto primera como segunda serán nulas al tratarse de una función constante, entonces, al reemplazar la solución asumida en la ecuación 48 se tendrá:

$$0 + \frac{P(-e)}{EI} = -\frac{Pe}{EI}$$

Lo que hace que la igualdad se cumpla, por lo tanto, se corrobora que la solución particular de la ecuación diferencial viene siendo $Y_p(x) = e$. La solución total de la ecuación diferencial del pandeo para el presente caso será entonces:

$$Y(X) = \left[C1 * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right] - e$$

Ecuación 49.- Ecuación del pandeo para el caso de una columna doblemente articulada con carga excéntrica.

Para hallar la carga crítica de pandeo de Euler, se condicionará a la columna a las condiciones de desplazamiento nulo en los extremos, las mismas que son las siguientes:

$$Y(0) = 0; Y(L) = 0$$

Por lo tanto, aplicando la primera condición de desplazamiento nulo se tiene:

$$Y(0) = C1 - e = 0 \rightarrow C1 = e$$

Aplicando la segunda condición de desplazamiento nulo se tiene:

$$Y(L) = \left[e * \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L + C2 * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} L \right] - e = 0$$

$$\rightarrow C2 = \frac{e \left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * L \right)}{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} * L}$$

Por lo tanto, la ecuación del pandeo quedará de la siguiente forma:

$$Y(X) = e * \left[\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x + \frac{\left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * L\right)}{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} * L} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x - 1 \right] \quad (2)$$

Debido a su condición de columna con carga excéntrica, los momentos flectores en sus extremos no son nulos, o sea, $M = EI * \frac{d^2 y}{dx^2} = -P * e$. De acuerdo con esta característica fundamental de este tipo de columna, entonces, se pueden deducir los siguientes aspectos acerca de la ecuación (2):

- Esta tendrá solución para todo valor que adquiera la carga P , mas no únicamente para un grupo determinado de valores de dicha carga.
- La solución de la ecuación dejará de tener un valor igual a cero, debido a que, por la excentricidad de las cargas aplicadas, estas generarán momentos flectores los mismos que originarán deflexiones laterales para cualquier carga que sea aplicada.

Observando de forma minuciosa la ecuación (2), se pondrá especial atención en el denominador del segundo miembro, puesto que, si este se lo anula dará como resultado

una solución singular, o sea, si $\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} * L = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} * L = n * \pi \rightarrow P = \frac{(n * \pi)^2 * EI}{L^2}$

La singularidad se encuentra relacionada con el grupo de cargas críticas actuantes en la columna doblemente articulada, siendo el valor más bajo de todas las cargas, en donde ocurrirá la primera singularidad, justamente la carga crítica de pandeo de Euler, o sea, $P = P_E$.

Como se puede ver, este caso resulta más complejo que los anteriores, por lo que se vuelve necesario efectuar un análisis más profundo del fenómeno en cuestión, por lo

que se recurrirá a los criterios de linealidad y no linealidad. Para ello, se trabajará en la ecuación (2) en donde se tratará de hallar la máxima deflexión lateral de la columna, misma que tenderá a suscitarse en la mitad de la misma. Reemplazando entonces el valor de la mitad de la ordenada en la ecuación (2) se tiene:

$$Y_{\text{máx.}} = e * \left[\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{\left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * L\right)}{\sin \sqrt{\frac{P}{EI}} * L} * \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} * \left(\frac{L}{2}\right) - 1 \right] \quad (3)$$

$$\text{Sea } \phi = \sqrt{\frac{P}{EI}} * L$$

$$\text{Entonces: } \sin \phi = 2 \sin \frac{\phi}{2} * \cos \frac{\phi}{2} \quad (4)$$

$$\cos \phi = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\phi}{2} \quad (5)$$

→ Reemplazando (4) y (5) en (3):

$$Y_{\text{máx.}} = e * \left[\cos \frac{\phi}{2} + \frac{(1 - \cos \phi)}{\sin \phi} * \sin \frac{\phi}{2} - 1 \right]$$

$$\rightarrow Y_{\text{máx.}} = e * \left[\cos \frac{\phi}{2} + \frac{\left(1 - 1 + 2 \text{sen}^2 \frac{\phi}{2}\right)}{2 \sin \frac{\phi}{2} * \cos \frac{\phi}{2}} * \sin \frac{\phi}{2} - 1 \right]$$

$$\rightarrow Y_{\text{máx.}} = e * \left[\frac{1}{\cos \frac{\phi}{2}} - 1 \right] \quad (6)$$

Sea δ la deflexión lateral, misma que se mide con respecto al eje normal, entonces:

$$\rightarrow \delta = Y_{\text{máx.}} + e$$

→ $Y_{\text{máx.}} = \delta - e$ (7) → (7) en (6):

$$\delta - e = e * \left[\frac{1}{\cos \frac{\phi}{2}} - 1 \right]$$

$$\delta = \frac{e}{\cos \frac{\phi}{2}} = \frac{e}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2}} \quad (8)$$

El valor de δ será infinito para el caso en el que $\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = 0$, o sea:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} * \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \rightarrow \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2} \rightarrow P = \frac{\pi^2 * EI}{L^2} \quad (9)$$

La expresión (9) viene siendo el modelo matemático de la carga crítica de pandeo de Euler, de acuerdo con ello, entonces, se puede deducir que al tender la carga P a P_E , la deflexión lateral de la columna tiene a infinito lo que contradice los principios de la mecánica de sólidos rígidos puesto que los desplazamientos infinitos son imposibles. Los resultados obtenidos proceden del tipo de ecuaciones empleadas, que, para el presente caso vienen siendo de tipo lineal, debido a que la curvatura ha sido planteada como $\frac{d^2y}{dx^2}$, mientras que las condiciones de contorno han sido planteadas en las acotaciones $X = 0$ y $X = L$.

Por lo anterior, se deduce que, desde el criterio lineal, la carga crítica viene siendo aquella que, aplicada a la sección de la columna, producirá desplazamientos

laterales infinitos. De acuerdo con la relación fuerza-desplazamiento siendo su constante de proporcionalidad la rigidez del material se tiene:

$$F = K*\Delta_Y \rightarrow \Delta_Y = \frac{F}{K} \quad (10)$$

Por la expresión (10) se deduce que si el desplazamiento Δ_Y es infinito, la rigidez K es nula, lo que en cierta forma vendrá siendo un indicador de que la columna tiende al inminente estado de colapso. La rigidez no podrá volverse nula en lo absoluto, lo que ocurriría realmente es que a medida que se va incrementando la longitud del desplazamiento lateral, la columna se irá debilitando hasta llegar a un instante en que esta llegará a colapsar con un estado de rigidez muy por debajo del necesario para resistir la acción de la carga axial a la que está sometida.

Por medio del diagrama representado en la figura 22 se puede obtener el conjunto solución para las curvas que relacionan la carga con la deflexión, siendo las cargas adimensionalizadas con la carga crítica de pandeo de Euler P_E y las deflexiones con la longitud L de la columna. Para todos los casos en que $P/P_E = 1$, se producirá una asíntota horizontal, lo que indica que la deflexión lateral δ está tomando valores cada vez mayores y, por lo tanto, tendientes al infinito.

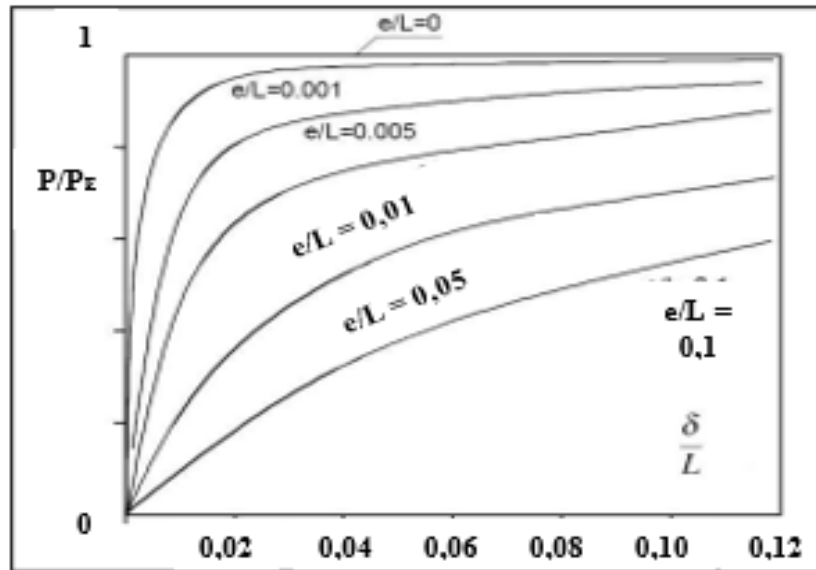


Figura 22.- Valores de las curvas de carga para diferentes excentricidades de carga.

Resultados de la teoría lineal.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 74)

Al recurrir a la teoría no lineal para las grandes curvaturas y condiciones de contorno no lineales, se puede deducir que la deflexión máxima no es infinita, siendo lo correcto el que esta tiene un máximo desde donde comienza su decrecimiento, es decir, tiene un límite máximo desde donde puede ocurrir el inminente estado de colapso. De acuerdo a lo anterior, entonces, la condición de carga crítica real no puede estar asociada a desplazamientos infinitos.

En el diagrama representado en la figura 23 se muestra la diferencia entre las soluciones lineal y no lineal para una excentricidad “ e ” dada. En los rangos de valores bajos de la carga, las dos curvas se encuentran muy cercanas entre sí, mientras que cuando la carga se aproxima a la carga crítica, las diferencias entre ambas curvas son máximas, o sea, en la solución lineal δ tenderá a infinito, mientras que en la solución no lineal el desplazamiento tiene un valor límite máximo. Estas dos conclusiones ya se las dedujeron

anteriormente, lo que viene haciendo que por medio de este diagrama se corrobore lo afirmado.

Para este caso, entonces, se puede concluir que, por medio de la teoría no lineal se puede apreciar el comportamiento real de la carga crítica en las columnas con excentricidad de carga en donde la inclinación de la curva viene siendo la rigidez de la columna. En el diagrama además se aprecia que, al acercarse a una fracción de la carga crítica, la inclinación de la curva hace un cambio brusco sin llegar esta a anularse, situación que se interpreta como el instante en el que muy bajos incrementos de carga llegarán a producir grandes desplazamientos, una situación similar a la del fenómeno de fluencia.

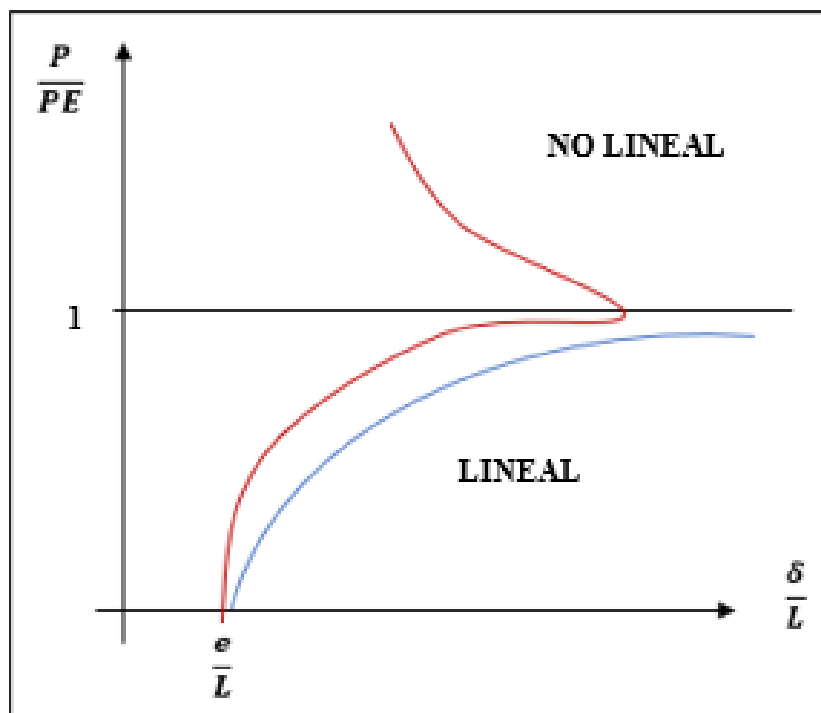


Figura 23.- Diferencia entre solución lineal y no lineal.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015)

3.8. Columnas doblemente articuladas con geometría inicial no rectilínea

Para este punto se considerará el caso de que, si bien la geometría de la columna no es rectilínea, la línea de acción de las cargas si lo es. Junto con lo anterior, se asumirá que la geometría inicial del elemento es proporcional al primer modo de pandeo ($n = 1$), sin embargo, es necesario aclarar que esta consideración se acerca más al plano ideal antes que al real debido sobre todo al carácter arbitrario de las consideraciones de tipo geométrico. Sin embargo, pese a lo anterior, esta concepción del planteamiento del problema facilitará de forma considerable el estudio del presente caso.

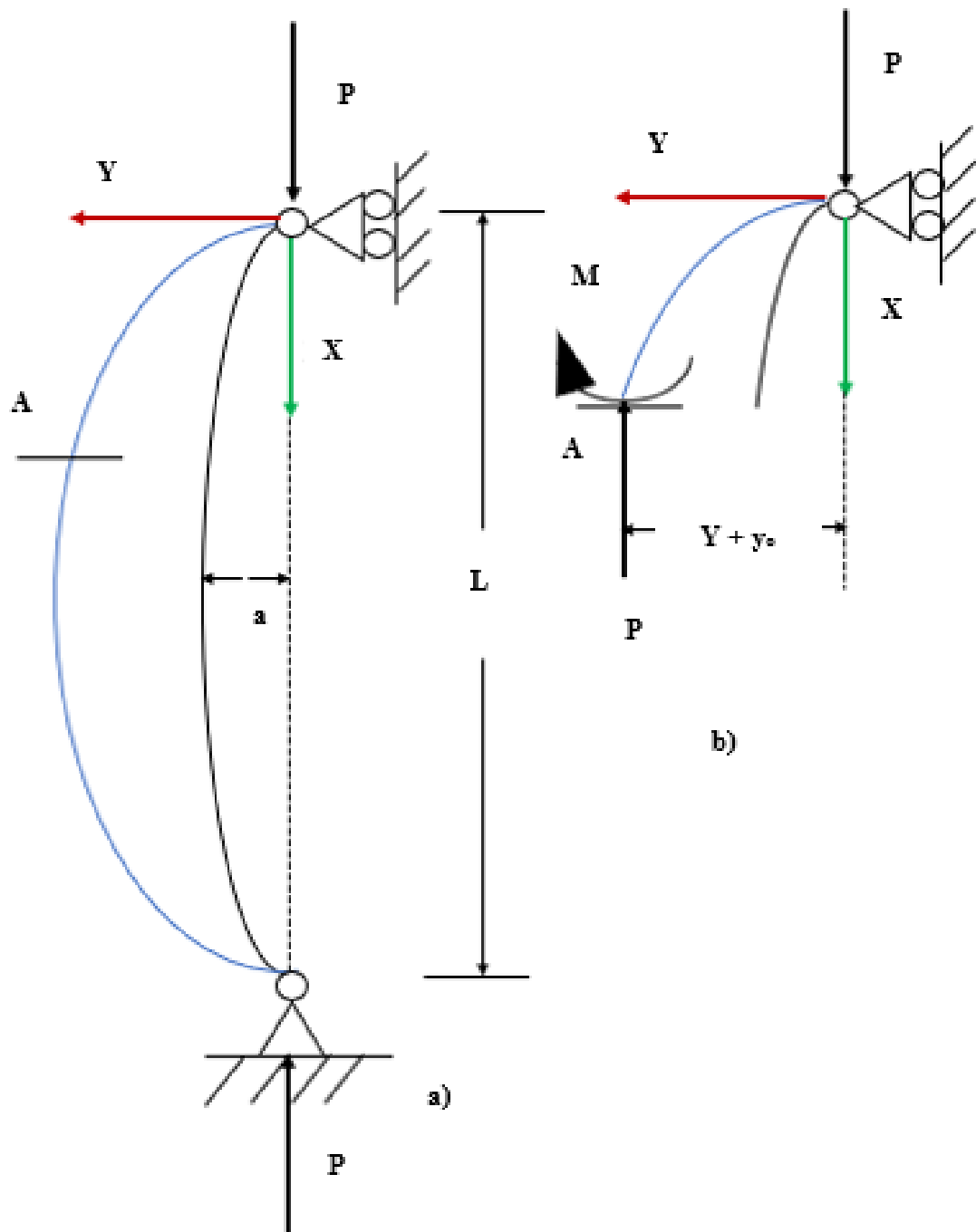


Figura 24.- Columna con geometría inicial no rectilínea.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 76)

Se considerará que la geometría inicial de la columna está representada por la siguiente expresión:

$$Y_o(X) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot X}{L}\right) \quad (1)$$

En donde a viene siendo un parámetro finito representativo de la máxima amplitud de la senoide que se produce en el punto medio de la columna, es decir, en $X = L/2$, de otra forma, la senoide es la abscisa inicial correspondiente a la ordenada de longitud igual a la mitad de la altura de la columna.

En el bosquejo representado en la figura 24 a), se muestran tanto la forma original como la posterior deformada una vez aplicada la carga P en la sección transversal de la columna.

Bajo la premisa de que la carga pasa por el centroide de la sección de la columna, el material es elástico y las deformaciones son pequeñas, se seccionará un segmento de columna comprendida entre el extremo superior y su punto medio como se muestra en el bosquejo de la figura 24 b), la ecuación de equilibrio de momentos será entonces:

$$M + P \cdot (Y + y_o) = 0$$

Ecuación 50.- Equilibrio de momentos en una sección de una columna de geometría inicial no rectilínea.

Al igual que en los casos anteriores, se reemplazará $M = EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$ y se dividirá

la expresión por EI dando como resultado:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cdot Y = -\frac{P}{EI} \cdot Y_o \quad (2)$$

Como Y_o viene siendo una función senoidal como la expresada en (1) se tiene entonces:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cdot Y = -\frac{Pa}{EI} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot X}{L}\right)$$

Ecuación 51.- Ecuación del pandeo de columnas con geometría inicial no rectilínea.

La ecuación 51 viene siendo una EDO de orden 2, en donde para su solución se considerarán solamente dos condiciones de contorno, las mismas que vienen siendo las siguientes: $y(0) = 0$; $y(L) = 0$. La ecuación 51 se la podría resolver al igual que en los casos anteriores aplicando el método general mediante la combinación de la solución general con la solución particular, sin embargo, dada la particularidad del caso, se comprobará que la ecuación (1) viene siendo en efecto una solución particular que cumple con las condiciones de contorno, en donde A vendrá siendo un parámetro a determinarse en función de la deflexión inicial a .

Al hallar la segunda derivada de (1) se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y_o''(X) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 * A * \sin\left(\frac{\pi * X}{L}\right) \quad (3)$$

$$\text{Entonces: } \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} * Y = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 * A * \sin\left(\frac{\pi * X}{L}\right) + \frac{P}{EI} * A * \sin\left(\frac{\pi * X}{L}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI} * Y = A * \sin\left(\frac{\pi * X}{L}\right) * \left[-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{P}{EI} \right]$$

Entonces, para que (1) sea una solución particular de la ecuación 51, deberá de

$$\text{cumplirse que: } A * \left[-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{P}{EI} \right] = -\frac{Pa}{EI}$$

$$\rightarrow A = \frac{\frac{Pa}{EI}}{\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \frac{P}{EI} \right]} \rightarrow A = \frac{\frac{P}{EI} * a}{\frac{P}{EI} \left[\frac{EI}{P} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - 1 \right]} \rightarrow A = \frac{a}{\frac{\pi^2 * EI}{L^2 * P} - 1} \rightarrow A = \frac{a}{\frac{PE}{P} - 1}$$

Donde resulta que P_E viene siendo la carga crítica de Euler, entonces, la solución general de la ecuación 51, en donde $P_E \neq P$ será:

$$Y(X) = \frac{a}{\frac{PE}{P}-1} * \sin\left(\frac{\pi * X}{L}\right)$$

Ecuación 52.- Solución general de la ecuación de pandeo de columnas con geometría inicial no rectilínea.

Las dos condicionantes de esta solución son las siguientes:

- La solución no tiene valores propios P_n .
- La solución está acotada, por lo tanto, carece de modos de pandeo.

En lo que respecta a la relación entre la carga de pandeo P y la deflexión máxima δ , se tomará la misma consideración que en el caso anterior, o sea: $\delta = Y_{\text{máx.}} + a$, entonces:

$$\delta = \frac{a}{\frac{PE}{P}-1} \sin\left(\frac{\pi * L}{2 * L}\right) + a$$

$$\delta = \frac{a}{\frac{PE}{P}-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + a$$

$$\delta = \frac{a}{\frac{PE}{P}-1} + a$$

$$\rightarrow \delta = a * \left[\frac{1}{\frac{PE}{P}-1} + 1 \right] = a * \left[\frac{P}{PE-P} + 1 \right] = a * \left[\frac{P+PE-P}{PE-P} \right] = a * \frac{PE}{PE-P} \quad (4)$$

De acuerdo con el formato de la ecuación (4), se puede deducir que el valor de la máxima amplitud de la senoide (a) se ve amplificado por efecto de la carga P . De la ecuación 52 se puede deducir el siguiente límite:

$$\lim_{P \rightarrow PE} \delta = \infty \quad (5)$$

El límite expresado en la ecuación (5) indica que, al llegar la carga a un valor equivalente a la carga crítica de pandeo de Euler, el valor correspondiente a la amplitud

de la deflexión máxima se hará infinito lo cual, al igual que en el caso anterior, va en contra de los principios de la mecánica del sólido rígido en donde las máximas deflexiones tienen que llegar a un valor límite para dar paso al estado de desgaste y posterior colapso del material.

El lugar geométrico de la ecuación (4) puede representarse para un rango determinado de relaciones a/L iniciales correspondientes al eje de las abscisas, mientras que en el eje de las ordenadas se representan los valores correspondientes a la relación P/P_E (figura 25). Cuando el valor de la relación P/P_E se aproxima a la unidad, el lugar geométrico de la gráfica tiende hacia una asíntota horizontal. Se puede ver que existe una alta analogía entre los diagramas de la figura 22 y la figura 25, por lo que se puede deducir que existe un cierto grado de afinidad entre el caso de las columnas con cargas excéntricas y las columnas con geometría inicial.

La carga crítica podrá interpretarse de forma análoga a la actuante en una columna doblemente articulada sometida a la acción de una carga excéntrica, de acuerdo a lo visto en el diagrama representado en el bosquejo de la figura 23, de igual forma, cuando P se aproxima a P_E se producirá una caída brusca en la rigidez transversal de la columna en donde incrementos de carga mínimos producirán grandes incrementos en el desplazamiento dando lugar así al fenómeno de fluencia del material del que la columna se encuentra constituida.

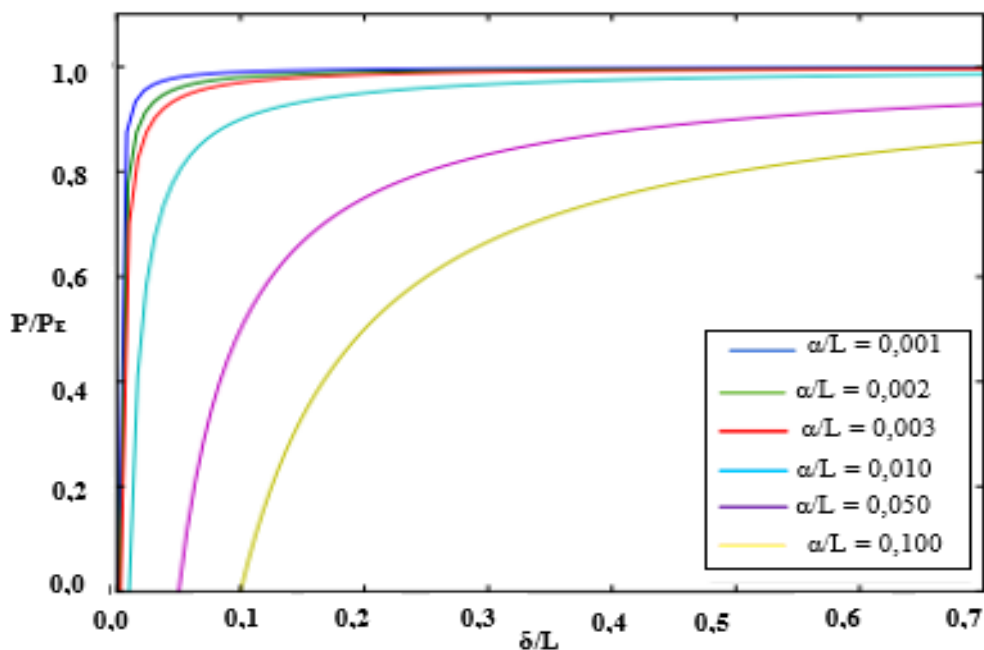


Figura 25.- Lugares geométricos de carga para diferentes amplitudes de imperfección geométrica inicial. Resultados de la teoría lineal.

Fuente: (Martínez, Puertas, & Gallego, 2015, pág. 78)

Otro aspecto que no se puede dejar pasar desapercibido en el presente caso es el hecho de que las imperfecciones de naturaleza geométrica no se encuentran subordinadas al modo 1 de pandeo. Para afirmar lo anterior, se asumirá que la forma inicial está dada por el modo 2 de pandeo (figura 10) en donde la deformación inicial tendrá lugar por la amplificación del referido modo. Como la carga crítica de pandeo del modo 2 es igual a cuatro veces la carga crítica de pandeo del primer modo ($P_2 = 4P_E$), la columna hipotéticamente podría llegar a cargarse hasta llegar a superar el valor de P_E dando lugar posteriormente al fenómeno de incrementos de desplazamientos para incrementos de carga mínimos, sin embargo, esto no llegará a ocurrir debido a que al superar el valor de la carga P_E la columna se volverá inestable. Podrá llegar a superarse el valor de P_E , mas el solo hecho de alterar a la columna será suficiente para que predomine el modo 1 de pandeo.

CAPITULO IV

COMPROBACIÓN DEL MODELO DE ECUACIÓN POR CASO

4.1. Longitud de pandeo y la hipérbola de Euler

Se comenzará este capítulo con una introducción acerca de un dato interesante que puede ser de mucha ayuda en el análisis del fenómeno de pandeo de columnas, y que por creer de importancia para el desarrollo del presente se lo expondrá a continuación.

De acuerdo con lo analizado en los casos expuestos en el capítulo anterior, la carga crítica de pandeo puede plantearse de forma general mediante la expresión siguiente:

$$P_E = \frac{\pi^2 * EI}{(lk)^2}$$

Ecuación 53.- Ecuación general de la carga crítica de pandeo de Euler.

Siendo l_k un parámetro al que se denominará como *longitud de pandeo*, la misma que no viene siendo una longitud real, sino que viene siendo una longitud ficticia por medio de la cual se podrá determinar el valor de la carga crítica de una columna con su correspondiente configuración de apoyos. En los casos analizados en el capítulo anterior, especialmente en el caso 3.3, se pudo deducir que el valor de la longitud l_k puede expresarse de forma geométrica como la distancia existente entre los puntos de momento flector nulo, misma que está evaluada sobre modos de pandeo. Las longitudes de pandeo l_k se representan en los bosquejos de la figura 26 para 5 de los 7 casos analizados, exceptuando los de columna con carga excéntrica y de columnas con geometría inicial no rectilínea debido a que por su complejidad su análisis se subdivide en análisis lineal y no lineal.

El valor de la longitud de pandeo l_k se expresa en función de un parámetro β de carácter adimensional, el mismo que dependerá únicamente de las condiciones de contorno del problema y del tipo de apoyo de la columna, como se esquematiza en la figura 27 explicado esto, entonces, la longitud de pandeo se expresa de la siguiente forma:

$$l_k = \beta * L$$

Ecuación 54.- Ecuación de la longitud de pandeo l_k .

Al conocerse el valor de β se podrá determinar la longitud de pandeo por medio de la ecuación 54, que como se explicó, es una longitud de carácter ficticio que, sin embargo, posibilita obtener un valor muy preciso de la carga crítica de pandeo. Una vez aclarada la naturaleza de la longitud l_k , una vez que esta ha sido obtenida se reemplazará su valor en la ecuación 53 en donde se podrá averiguar el valor de la referida carga, en donde, en función de esta podrá además hallarse otro parámetro no menos importante conocido como *tensión crítica*, mismo que se lo obtiene por medio de la siguiente relación:

$$\sigma_{cr} = \frac{PE}{A}$$

Ecuación 55.- Ecuación de la tensión crítica.

Reemplazando la ecuación 53 en la ecuación 55 se tiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * EI}{(lk)^2 * A} \quad (1)$$

Como se sabe, el factor de inercia de los sólidos rígidos viene siendo el producto de su área por su radio de giro, siendo este último parámetro la distancia desde el eje de giro del sólido hasta un punto hipotético en donde se asume que se encuentra concentrada la totalidad de su masa, por lo tanto, el factor de inercia expresado matemáticamente será:

$$I = A*r^2 \quad (2)$$

Reemplazando la expresión (2) en (1) se tiene:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E * A * r^2}{(lk)^2 * A} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E * r^2}{(lk)^2} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{lk}{r}\right)^2} \quad (3)$$

El denominador de la expresión (3) será tomado como otro parámetro, el mismo que será denominado como *esbeltez mecánica* y que será denominado por la letra griega λ , quedando de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{lk}{r}$$

Ecuación 56.- Esbeltez mecánica.

La particularidad de la esbeltez mecánica está en que esta viene siendo una relación entre dos magnitudes de carácter ficticio: la longitud de pandeo, misma que dependerá únicamente de las condiciones de apoyo en los extremos de la columna, y el radio de giro, que se lo determina de forma indirecta en función de su factor de inercia y de su área transversal.

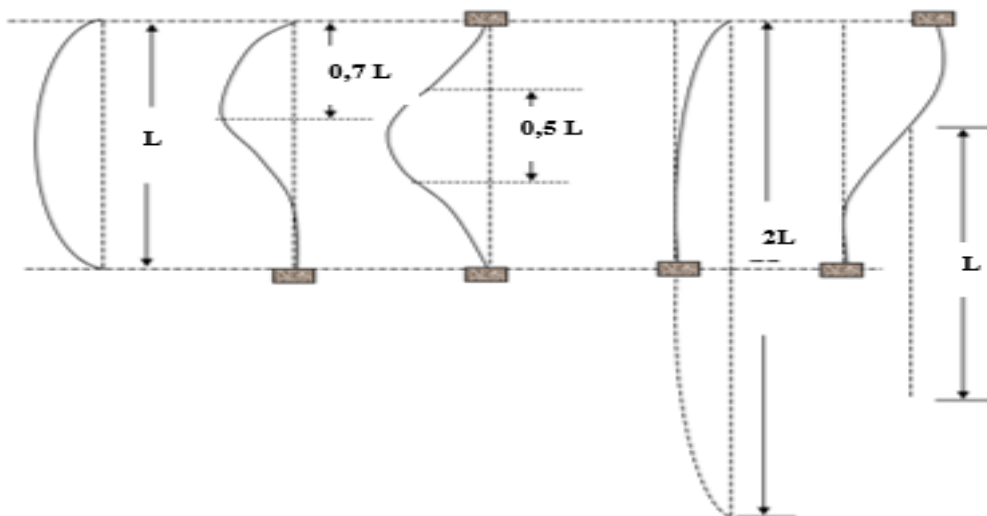


Figura 26.- Representación geométrica de la longitud de pandeo

Fuente: (Kassimali, 2014, pág. 65)

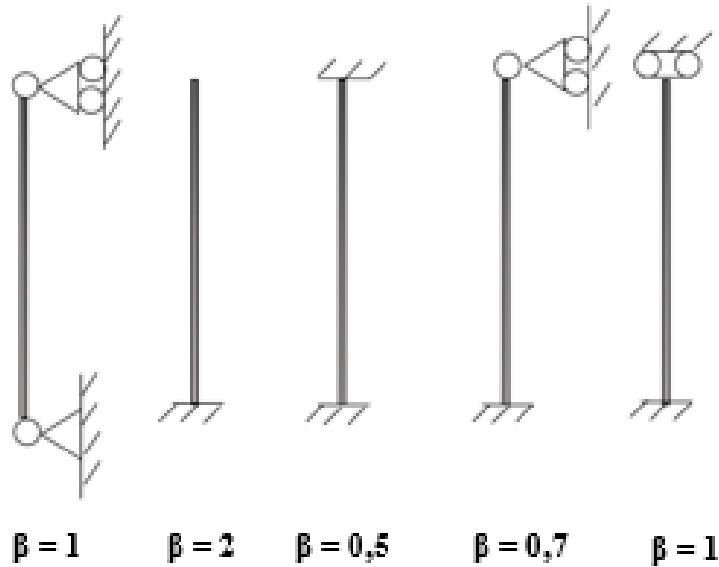


Figura 27.- Representación de los valores del coeficiente β de los cinco casos básicos.

Fuente: (Kassimali, 2014, pág. 65)

Además del valor de la esbeltez mecánica, existe el parámetro conocido como *esbeltez geométrica*, que, a diferencia de la mecánica, este es el resultado de la relación entre dos factores reales que son la longitud y el canto de la columna, expresado matemáticamente se tiene:

$$\lambda_G = \frac{L}{h}$$

Ecuación 57.- Esbeltez geométrica.

La principal particularidad de la esbeltez geométrica está en que esta servirá como un indicador que permitirá determinar si un elemento barra debe ser analizado con la teoría de Bernoulli-Euler, Timochenko, o por medio de las ecuaciones de sólido rígido.

Otro parámetro de esbeltez que se lo tomará en cuenta es el de la *esbeltez relativa*, que es adoptado en los códigos europeos para el diseño de columnas comprimidas y que viene siendo la raíz cuadrada de la relación entre el esfuerzo de trabajo y el esfuerzo crítico, matemáticamente se la expresa de la siguiente forma:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}}$$

Ecuación 58.- Esbeltez relativa.

Por medio de la esbeltez relativa será posible plantear la resistencia de la columna en la fase post crítica. La esbeltez relativa además se la aplica en caso de llegarse a superar el valor máximo del límite elástico con la razón de deformación, misma que se expresa de la siguiente forma:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cr}}}$$

Ecuación 59.- Razón de deformación.

Dónde:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4) \quad \text{y} \quad \varepsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E} \quad (5)$$

Luego de exponerse los parámetros importantes anteriores, la expresión de la tensión crítica en función de la esbeltez mecánica se la expresa de acuerdo a la ecuación 60:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 * E}{(\lambda)^2}$$

Ecuación 60.- Ecuación de la hipérbola de Euler.

La tensión crítica en función de la esbeltez mecánica toma el nombre de *ecuación de la hipérbola de Euler*, misma que posibilita hallar el valor de la tensión máxima a la que puede ser cargada axialmente una columna, es decir, el esfuerzo al que se llegará por medio de la carga crítica. Como se podrá observar, la tensión máxima depende únicamente del módulo de elasticidad y de la esbeltez mecánica siendo inversamente proporcional a esta: a mayor esbeltez mecánica menor esfuerzo de tensión crítica y viceversa. En base a lo anterior, entonces, por medio del método de la hipérbola de Euler se podrá llegar a determinar una curva primitiva de diseño de columnas comprimidas a pandeo sustentada en el criterio de que si la tensión axial obtenida por medio del cociente entre una carga y el área de la sección comprimida supera el valor del esfuerzo crítico (σ_{cr}), consecuentemente se producirá un modo de fallo concreto, en este caso, el pandeo de la columna, siendo necesario aclarar que no es un fallo propiamente dicho ya que no necesariamente debe llegarse al colapso o rotura, lo que realmente ese valor indica es el límite a partir del cual la columna deja de tener una configuración rectilínea y comienza a adquirir un estado de curvatura en condiciones de equilibrio estable por medio de deformaciones transversales.

En la hipérbola de Euler existe un límite superior a la tensión máxima que dependerá exclusivamente del material, siendo dicho límite el indicador de un modo de fallo diferente, el mismo que se da justamente por la resistencia del material, es decir, la falla última o de colapso. De acuerdo con el tipo de material del que este hecha la columna, dicho límite vendrá siendo el de plastificación o rotura.

Una vez establecidos tanto el esfuerzo crítico como el límite de rotura, se deberán de cumplir las siguientes condiciones:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \begin{cases} f_y \text{ (resistencia)} \\ \sigma_{cr} \text{ (pandeo)} \end{cases}$$

El lugar geométrico de la hipérbola de Euler estará limitado por una esbeltez máxima tal que $\sigma_{cr} = f_y$. Si $\lambda < \lambda_{lim}$, la falla será por resistencia, caso contrario, si $\lambda > \lambda_{lim}$, la falla será por pandeo. El lugar geométrico de la hipérbola de Euler también es conocido como curva de diseño, la misma que tiene una curvatura como se muestra en el bosquejo de la figura 28:

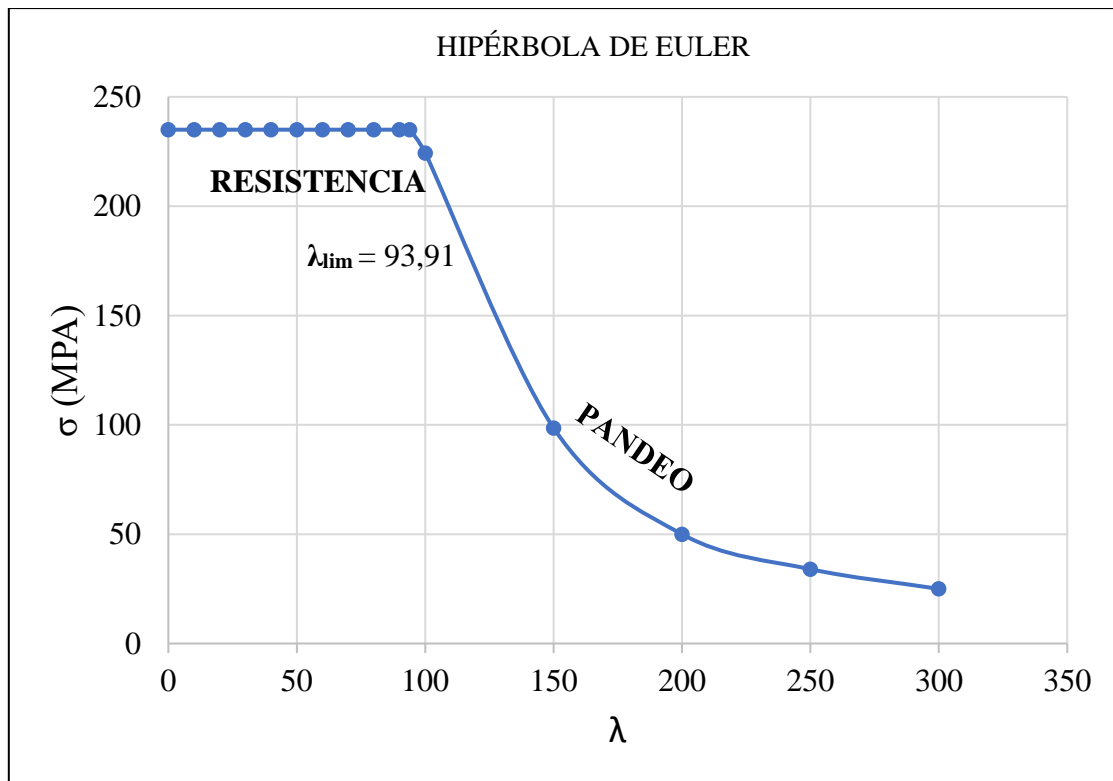


Figura 28.- Bosquejo de la curva de diseño combinando la hipérbola de Euler con el límite resistente (Caso de acero $E= 210$ Gpa, $f_y = 235$ Mpa.

Fuente: (Kassimali, 2014, pág. 67)

Se puede notar que existe una analogía bastante afín entre el lugar geométrico de la curva de diseño y el del espectro de respuesta en donde la aceleración sísmica está en función del período de vibración, a mayor período de vibración menor es la aceleración, en el caso de la curva de diseño, a mayor esbeltez mecánica menor es la resistencia de diseño. Es necesario aclarar, sin embargo, que la curva de diseño viene siendo un referente para el diseño de columnas a compresión. En las curvas reales de diseño de columnas se toma en cuenta para cada esbeltez mecánica la resistencia en fase post crítica, misma que dependerá sobre todo del efecto de las imperfecciones. En el comportamiento de columnas, entonces, la hipérbola de Euler viene siendo un límite superior que delimitará la resistencia máxima de diseño. La hipérbola de Euler permitirá entonces, seleccionar un radio de giro apropiado, y, por ende, el perfil de diseño más idóneo.

4.2. Acerca del acero ASTM A 588

El acero ASTM A 588, material en el que se efectuarán los análisis de los perfiles no prismáticos, es un acero de intemperie de baja aleación con un punto de fluencia mínimo de 50 Ksi ($3515,35 \frac{Kg}{cm^2}$) y esfuerzo máximo a tensión de 65 Ksi ($4570 \frac{Kg}{cm^2}$) para espesores de hasta 4 pulgadas (101,6 mm).

Este material se produce principalmente para estructuras de construcción atornilladas y soldadas, caracterizándose además por poseer en su superficie una capa de óxido duro y denso de color púrpura, mismo que actúa como agente ante la corrosión atmosférica que viene siendo cuatro veces mayor a la del acero A36.

El acero ASTM A588 se utiliza sobre todo como estructura expuesta tanto en edificios como en puentes de armadura. En la figura 29 se muestran algunos ejemplos de

las aplicaciones del referido material, como se puede observar, estas pueden ser en diversas estructuras de acuerdo con las condiciones que rijan su funcionamiento.



Figura 29.- Planchas de acero ASTM A 588 y aplicaciones de este material.

Fuente: (González Cuevas, 2003, pág. 55)

4.3. Comprobación de los modelos de ecuaciones

Una vez que se han expuesto y demostrado los modelos matemáticos de las ecuaciones diferenciales del fenómeno de pandeo de columnas, junto con su correspondiente primitiva que resulta ser la carga crítica de pandeo, se procederá a demostrar la efectividad de su aplicación en la selección de perfiles de columnas sometidos a la acción de cargas compresivas con la finalidad de asignar un dimensionamiento adecuado que les permita resistir a las mismas con valores mayorados

para de esta forma otorgarles una reserva de resistencia, y, por ende, un índice de seguridad adecuado. El análisis se lo efectuará de acuerdo a los criterios impuestos por la normativa AISC para elementos sometidos a las acciones de cargas compresivas, mismos que se citarán a continuación.

4.3.1. Clasificación de secciones para pandeo local

Las secciones se clasifican como secciones compactas, no compactas o esbeltas. Para que una sección califique como compacta sus alas deben estar continuamente conectadas al alma o almas y las relaciones ancho - espesor de sus elementos a compresión no deben exceder las relaciones límite ancho - espesor λ_p de la tabla 4. Si la relación ancho-espesor de uno o más elementos de compresión excede λ_p , pero no excede λ_r de la tabla 4, la sección es no compacta. Si la relación ancho-espesor de cualquier elemento excede λ_r , la sección se denomina sección de elemento esbelto. (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 14)

4.3.2. Provisiones generales

La resistencia a la compresión de diseño $\phi_c P_n$, y la resistencia a la compresión permisible, P_n/Ω_c , se determinan de la siguiente manera:

La resistencia nominal a compresión, P_n , será el valor más bajo obtenido según los estados límite de pandeo por flexión, pandeo por torsión y pandeo por flexión - torsión.

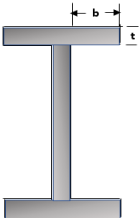
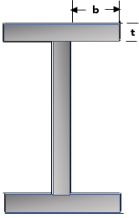
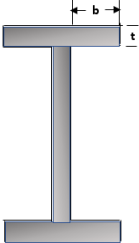
- a) Para elementos doblemente simétricos y simples simétricos se aplica el estado límite de pandeo por flexión.
- b) Para elementos de simetría sencilla, elementos asimétricos y ciertos elementos de simetría doble, como columnas cruciformes o armadas, también son aplicables los estados límite de pandeo por torsión o por flexión-torsión.

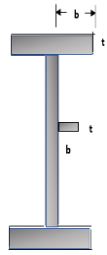
$$\phi_c = 0,90 \text{ (LRFD)} \quad \Omega_c = 1,67 \text{ (ASD)}$$

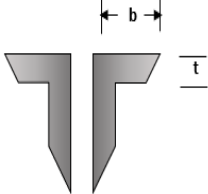
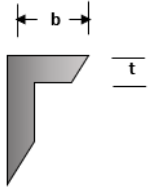
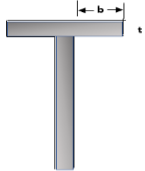
(American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 14)

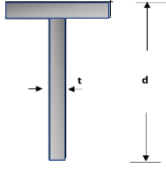
Tabla 4.- Limitación de las relaciones espesor-ancho para elementos a compresión.

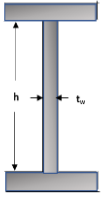
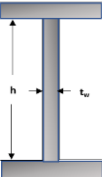
Fuente: (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, págs. 16,17,18)

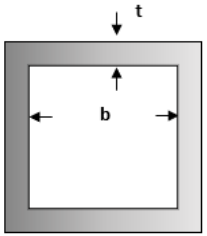
	CASO	Descripción del Elemento	Relación Ancho- Espesor	Límites de las relaciones		Ejemplo
				Ancho - Espesor		
				λ_p (Compacta)	λ_r (No compacta)	
ELEMENTOS NO RIGIDIZADOS	1	<i>Flexión en alas de perfiles y canales laminados en forma de I</i>	b/t	$0,38 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,0 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	
	2	<i>Flexión en alas de secciones armadas en forma de I de doble y simple simetría</i>	b/t	$0,38 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$0,95 * \sqrt{kc * \frac{E}{fL}}$ [a], [b]	
	3	<i>Compresión uniforme en alas de secciones laminadas en forma de I, placas que sobresalen de secciones laminadas en forma de I; patas sobresalientes de pares de ángulos en contacto continuo y bridas de canales.</i>	b/t	NA	$0,56 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	

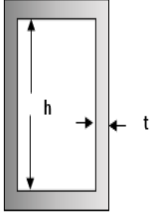
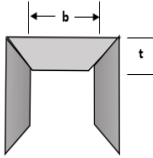
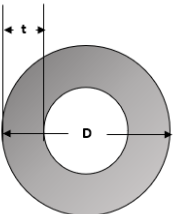
	4	Compresión uniforme en patas de ángulos simples, patas de ángulos dobles con separadores y todos los demás elementos no rigidizados	b/t	NA	$0,64 * \sqrt{kc * \frac{E}{fy}}$ [a]	
--	---	---	-------	----	--	---

	CASO	Descripción del Elemento	Relación Ancho- Espesor	Límites de las relaciones		Ejemplo
				Ancho - Espesor		
				λ_p (Compacta)	λ_r (No compacta)	
ELEMENTOS NO RIGIDIZADOS	5	Compresión uniforme en patas de ángulos simples, patas de ángulos dobles con separadores y todos los demás elementos no rigidizados.	b/t	NA	$0,45 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	6	Flexión en patas de ángulos simples	b/t	$0,54 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	$0,91 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	7	Flexión en alas de tes	b/t	$0,38 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	$1,0 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	

	8	Compresión uniforme en vástagos de tes	d/t	NA	$0,75 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
--	---	--	-------	----	------------------------------	---

	CASO	Descripción del Elemento	Relación Ancho- Espesor	Límites de las relaciones		Ejemplo
				Ancho - Espesor		
				λ_p (Compacta)	λ_r (No compacta)	
ELEMENTOS RIGIDIZADOS	9	Flexión en almas de canales y perfiles en I doblemente simétricos	h/t_w	$3,76 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	$5,7 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	10	Compresión uniforme en almas de secciones en I doblemente simétricas.	h/t_w	NA	$1,49 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	11	Flexión en almas de secciones en I simétricas simples	h_c/t_w	$\frac{hc}{hp} * \sqrt{\frac{E}{fy}}$ $(-0,09 + 0,54 * \frac{Mp}{My})$	$5,70 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	$\leq \lambda_r$

	12	<p><i>Compresión uniforme en alas de cajón rectangular y secciones estructurales huecas de espesor uniforme sujetas a flexión o compresión; placas de cubierta de brida y placas de diafragma entre líneas de sujetadores o soldaduras.</i></p>	b/t	$1,12 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	$1,40 * \sqrt{\frac{E}{f_y}}$	 <p>The diagram shows a rectangular hollow section. The width of the inner rectangle is labeled 'b' with a double-headed arrow. The thickness of the wall is labeled 't' with a downward arrow pointing to the top edge of the section.</p>
--	-----------	---	-------	-------------------------------	-------------------------------	--

	CASO	Descripción del Elemento	Relación Ancho-Espesor	Límites de las relaciones Ancho - Espesor		Ejemplo
				λ_p	λ_r	
				(Compacta)	(No compacta)	
ELEMENTOS RIGIDIZADOS	13	Flexión en almas de HSS rectangular	h/t	$2,42 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	$5,7 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	14	Compresión uniforme en todos los demás elementos rigidizados	b/t	NA	$1,49 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$	
	15	Secciones huecas a) en compresión uniforme b) en flexión	a) D/t b) D/t	a) NA b) $0,07 * (E/fy)$	a) $0,11 * (E/fy)$ b) $0,31 * (E/fy)$	

[a] $kc = \frac{4}{\sqrt{h/tw}}$, pero no se tomará menor de 0,35 ni mayor de 0,76 para efectos de cálculo. (Véase casos 2 y 4).

[b] $F_L = 0,7 * fy$ para la flexión en el eje menor, la flexión en el eje mayor de elementos en forma de I contruidos con alma delgada y la flexión en el eje mayor de elementos en forma de I contruidos con alma compacta y no compacta con $S_{xt}/S_{xc} \geq 0,7$; $F_L = fy(S_{xt}/S_{xc} \geq 0,5 * fy$ para el doblado en el eje principal de miembros en forma de I compactos y no compactos con alma compuesta con $S_{xt}/S_{xc} < 0,7$ (Véase caso 2)

Por medio de la presente tabla será posible efectuar los correspondientes análisis del comportamiento que adoptarán los perfiles ante las posibles solicitaciones originadas por las cargas a las que serán sometidas en el transcurso de la vida útil de la estructura. A partir de sus normativas será posible diseñar programas de chequeo de comportamiento en hojas electrónicas EXCEL, mismas que permitirán efectuar análisis precisos y confiables en muy breves lapsos de tiempo ahorrando así una importante cantidad tanto de energía como de trabajo.

4.3.3. Limitaciones de esbeltez y longitud efectiva

El factor de longitud efectiva K , para el cálculo de la esbeltez de la columna, Kl/r , se determinará de acuerdo con el capítulo C (del código AISC).

Donde:

L : Longitud no apoyada lateralmente del miembro. Pulg. mm.

K : Factor de longitud efectiva determinado de acuerdo con la sección C2 ($K_1 =$ Factor de longitud efectiva en el plano de flexión, calculado en base a la suposición de que no hay traslación lateral, fijado en 1 a menos que el análisis indique que se puede usar un valor menor.

K_2 : Factor de longitud efectiva en el plano de flexión, calculado en base a un análisis de pandeo lateral.)

Nota de usuario: Para miembros diseñados en base a compresión, la relación de esbeltez kl/r preferiblemente no excederá de 200. (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 33)

4.3.4. Resistencia a compresión para pandeo por flexión de miembros sin elementos esbeltos

Según la normativa AISC:

“Esta sección se aplica a elementos comprimidos con secciones compactas y no compactas, como se define en la sección B4 (4.3.1), para elementos uniformemente comprimidos.” (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 33)

La resistencia nominal a compresión, se determinará en función del estado límite de pandeo por flexión.

$$P_n = F_{cr} * A_g$$

Ecuación 61.- Resistencia nominal a la compresión.

El esfuerzo de pandeo por flexión, P_n , se lo determina de acuerdo a las siguientes condiciones:

$$\text{a) Si } \frac{K*L}{r} \leq 4,71 * \sqrt{\frac{E}{fy}} \quad (\text{o } F_e \geq 0,44 * fy)$$

$$\rightarrow F_{cr} = \left[0,658 \frac{fy}{F_e} \right] * fy$$

Ecuación 62.- Esfuerzo crítico para miembros no esbeltos. (Primera condición)

$$\text{b) Si } \frac{K*L}{r} > 4,71 * \sqrt{\frac{E}{fy}} \quad (\text{o } F_e < 0,44 * fy)$$

$$\rightarrow F_{cr} = 0,877 * F_e$$

Ecuación 63.- Esfuerzo crítico para miembros no esbeltos. (Segunda condición)

Donde:

$$F_e = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{K*L}{r} \right)^2}$$

Ecuación 64.- Esfuerzo crítico elástico de pandeo.

Nótese que la ecuación 64 viene siendo la ecuación de pandeo de Euler en función de la esbeltez mecánica que se dedujo en 4.1.

4.3.5. Miembros con elementos esbeltos

Según la normativa AISC:

“Esta sección se aplica a elementos comprimidos con secciones esbeltas, como se define en la sección B4 (4.3.1) para elementos comprimidos uniformemente”.
(American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 39)

La resistencia nominal a compresión, P_n , se determinará en función de los estados limitados de deformación por flexión, torsión y flexión-torsión.

$$P_n = F_{cr} * A_g$$

Ecuación 65.- Resistencia nominal a la compresión.

Donde:

A_g : Área bruta de la sección

F_{cr} : Esfuerzo crítico, que se lo determina de acuerdo a las siguientes condicionantes:

$$\text{a) Si } \frac{K*L}{r} \leq 4,71 * \sqrt{\frac{E}{Q*fy}} \quad (\text{o } F_e \geq 0,44 * Q*fy)$$

$$\rightarrow F_{cr} = Q * \left[0,658 \frac{Q*fy}{F_e} \right] * fy$$

Ecuación 66.- Esfuerzo crítico (Primera condición)

$$\text{b) Si } \frac{K*L}{r} > 4,71 * \sqrt{\frac{E}{Q*fy}} \quad (\text{o } F_e < 0,44 * Q*fy)$$

$$\rightarrow F_{cr} = 0,877 * F_e$$

Ecuación 67.- Esfuerzo critico (Segunda condición)

Donde:

F_e : Esfuerzo crítico elástico de pandeo, calculado usando la ecuación 64 para miembros doblemente simétricos, miembros simétricos sencillos.

Q : 1,0 para elementos de secciones compactas y no compactas, según se define en la sección B4 (4.3.1), para elementos uniformemente comprimidos. $Q_s * Q_a$ para miembros con secciones de elementos esbeltos, como se define en la sección B4 (4.3.1) para elementos uniformemente comprimidos. (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 40)

Nota de usuario: Para secciones transversales compuestas únicamente por elementos esbeltos no rigidizados $Q=Q_s$ ($Q_a = 1$). Para secciones transversales compuestas únicamente por elementos esbeltos rigidizados, $Q=Q_a$ ($Q_s = 1$). Para secciones transversales compuestas de elementos esbeltos tanto rigidizados como no rigidizados, $Q=Q_s * Q_a$. (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 40)

4.3.5.1. Elementos esbeltos no rigidizados

El factor de reducción Q_s para elementos esbeltos no rigidizados se define como sigue:

a) Para alas, ángulos y placas que sobresalen de columnas laminadas u otros elementos comprimidos:

$$\text{I) Si } \frac{b}{t} \leq 0,56 * \sqrt{\frac{E}{fy}} \rightarrow Q_s = 1,0$$

$$\text{II) Si } 0,56 * \sqrt{\frac{E}{fy}} < \frac{b}{t} < 1,03 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$$

$$\rightarrow Q_s = 1,415 - 0,74\left(\frac{b}{t}\right) * \sqrt{\frac{fy}{E}}$$

Ecuación 68.- Factor Qs para caso II

$$\text{III) Si } \frac{b}{t} \geq 1,03 * \sqrt{\frac{E}{fy}}$$

$$\rightarrow Q_s = \frac{0,69 * E}{fy * \left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

Ecuación 69.- Factor Qs para caso III

b) Para alas, ángulos y placas que sobresalen de columnas construidas u otros miembros de compresión:

$$\text{I) Si } \frac{b}{t} \leq 0,64 * \sqrt{\frac{E * kc}{fy}} \rightarrow Q_s = 1,0$$

$$\text{II) Si } 0,64 * \sqrt{\frac{E * kc}{fy}} < \frac{b}{t} < 1,17 * \sqrt{\frac{E * kc}{fy}}$$

$$\rightarrow Q_s = 1,415 - 0,65 * \left(\frac{b}{t}\right) * \sqrt{\frac{fy}{E * kc}}$$

Ecuación 70.- Factor Qs para caso II

$$\text{III) Si } \frac{b}{t} \geq 1,17 * \sqrt{\frac{E * kc}{fy}}$$

$$\rightarrow Q_s = \frac{0,90 * E * kc}{fy * \left(\frac{b}{t}\right)^2}$$

Ecuación 71.- Factor Qs para caso III

Donde:

$$K_c = \frac{4}{\sqrt{\frac{h}{tw}}}$$

Ecuación 72.- Factor K_c .

Según la AISC:

“El factor k_c no se tomará menos de 0,35 ni más de 0,76 para efectos del cálculo”.

(American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 41)

4.3.5.2. Elementos rígidos delgados, Q_a

El factor de reducción Q_a para elementos rígidos delgados se lo expresa de la siguiente forma:

$$Q_a = \frac{A_{eff}}{A}$$

Ecuación 73.- Determinación de Q_a para elementos rígidos delgados.

Donde:

A : Área transversal total del miembro.

A_{eff} : Suma de las áreas efectivas de la sección transversal basada en el ancho efectivo reducido b_e .

Los anchos efectivos reducidos b_e son determinados de acuerdo a los siguientes casos:

a) Para elementos esbeltos uniformemente comprimidos con $b/t \geq 1,49 \sqrt{\frac{E}{f}}$,

excepto alas de sección cuadrada y rectangular de espesor uniforme:

$$b_e = 1,92 * t * \sqrt{\frac{E}{f}} * \left[1 - \frac{0,34}{\left(\frac{b}{t}\right)} * \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \leq d$$

Ecuación 74.- Factor b_e para caso a).

Donde f se toma como F_{cr} con F_{cr} calculado en base a $Q = 1$

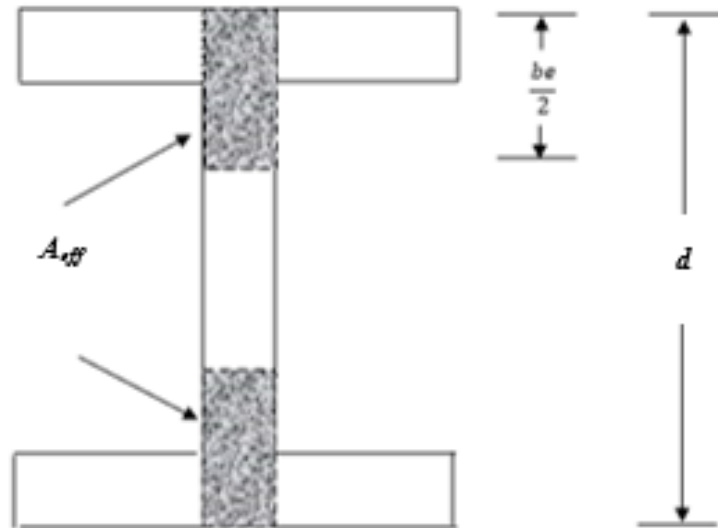


Figura 30.- Área efectiva típica para el caso a)

b) Para alas de secciones cuadradas y rectangulares de elementos esbeltos de

espesor uniforme con $b/t \geq 1,40 * \sqrt{\frac{E}{f}}$:

$$b_e = 1,92 * t * \sqrt{\frac{E}{f}} * \left[1 - \frac{0,38}{\left(\frac{b}{t}\right)} * \sqrt{\frac{E}{f}} \right] \leq b$$

Ecuación 75.- Factor b_c para caso b).

Donde:

$$f = \frac{Pn}{Aeff}$$

Ecuación 76.- Factor f para la ecuación 75.

Según AISC:

“En lugar de calcular f por medio de la ecuación 76, que requiere iteración, f puede tomarse igual a f_y . Esto dará como resultado una estimación ligeramente conservadora de la capacidad de la columna”. (American Institute of Steel Construction Inc., 2005, pág. 43)

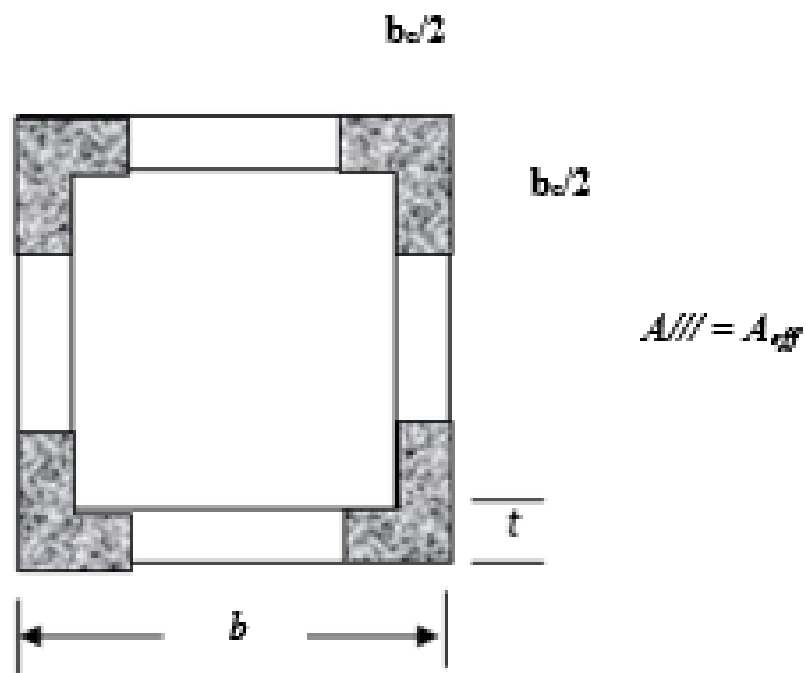


Figura 31.- Área efectiva típica para el caso b).

c) Para secciones circulares cargadas axialmente:

$$\text{Si } 0,11 \cdot \frac{E}{f_y} < \frac{D}{t} < 0,45 \cdot \frac{E}{f_y}$$

$$\rightarrow Q = Q_a = \frac{0,038 \cdot E}{f_y \cdot \frac{D}{t}} + \frac{2}{3}$$

Ecuación 77.- Factor Q para el caso c).

Donde:

D : Diámetro exterior.

t : Espesor de pared

4.3.6. Análisis de selección de perfiles aplicando el método la carga crítica de pandeo de Euler

Una vez que se han expuesto las respectivas especificaciones de la normativa AISC que rigen el análisis de elementos barra sometidos a las acciones de cargas de compresión, se procederá con los respectivos procesos analíticos de acuerdo a los casos que se han dado a conocer en el capítulo III. Para poder cumplir con lo planteado, se trabajará de acuerdo a las siguientes especificaciones:

- Se asumirá que los perfiles deben de soportar una carga axial equivalente a 5,5 (T) correspondientes a carga muerta y 3,5 (T) de carga viva.
- Los coeficientes de mayoración de carga son 1,2 para la carga muerta y 1,6 para la carga viva.
- Los aceros serán: A 500 ($f_y = 2300 \frac{Kg}{cm^2}$) y A 588 ($f_y = 3515,35 \frac{Kg}{cm^2}$)
- La longitud efectiva de los perfiles será de 6,0 (m).

4.3.6.1. Perfil cuadrado hueco

4.3.6.1.1. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500

Carga mayorada: $(1,2 * 5,5) + (1,6 * 3,5) = 12,2$ (T)

Esfuerzo de fluencia: $f_y = 2300 \left(\frac{Kg}{cm^2} \right)$

Primera estimación del área de sección del perfil: $A_1 = \frac{Pu}{fy} = \frac{12200 \text{ (Kg)}}{2300 \left(\frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}\right)} = 5,304 \text{ cm}^2$

Se tomará un perfil de 60X3, el mismo que tiene las siguientes propiedades mecánicas:

$$I = 35,17 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$A_g = 6,61 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$r: 2,31 \text{ (cm)}$$

Factor de longitud efectiva: Como el perfil no está sometido a traslación, el factor $K =$

$$1 \rightarrow L_c = K * L = (1) * (6) = 6 \text{ (m)}$$

Determinación de la esbeltez mecánica: $\frac{K * L}{r} = \frac{600 \text{ (cm)}}{2,31 \text{ (cm)}} = 259,74 > 200$; por lo tanto,

se debe seleccionar otro perfil, para ello lo aconsejable es determinar el valor de r a partir del límite mínimo de la esbeltez mecánica, por lo tanto:

$$r = \frac{K * L}{200} = \frac{600 \text{ (cm)}}{200} = 3,0 \text{ (cm) (radio de giro mínimo)}$$

→ Se tomará un perfil con radio superior al calculado, se opta entonces por un perfil de 100X2 cuyas propiedades mecánicas son las siguientes:

$$I = 123,01 \text{ (cm}^4\text{)}$$

$$A_g = 7,74 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$r: 3,99 \text{ (cm)}$$

→ $\frac{K * L}{r} = 150,38 < 200$ (OK), sin embargo, esta es una primera instancia, porque luego

se deberá de hallar la carga crítica de pandeo, para ello, entonces, se determinará el esfuerzo de pandeo elástico:

$$F_e = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{K*L}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 * 2.1 * 10^6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)}{(150,38)^2} = 916,6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$$

→ $P_{cr} = F_e * A_g = 916,6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right) * 7,74 (cm^2) = 7094,49 (Kg) = 7,095 (T) < 12,2 (T)$, por lo tanto, es necesario escoger un perfil más resistente.

$$\rightarrow A_g = \frac{Pu}{F_e} = \frac{12200 (Kg)}{916,6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)} = 13,31 (cm^2), \text{ entonces, se escoge un perfil } 100X5, \text{ cuyas}$$

propiedades mecánicas son las siguientes:

$$I = 271,36 (cm^4)$$

$$A_g = 18,36 (cm^2)$$

$$r: 3,84 (cm)$$

$$\rightarrow \frac{K*L}{r} = \frac{600 (cm)}{3,84 (cm)} = 156,25 < 200 \rightarrow \text{CUMPLE}$$

$$\rightarrow F_e = \frac{\pi^2 * 2.1 * 10^6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)}{(156,25)^2} = 848,9 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)$$

$$\rightarrow P_{cr} = 848,9 (Kg/cm^2) * 18,36 (cm^2) = 15586,61 (Kg) = 15,59 (T) > 12,2 (T) \text{ Cumple}$$

Sin embargo, esta selección es de segunda instancia, debido a que ahora es necesario evaluar las relaciones ancho-espesor del perfil, recurriendo a la tabla 4, el perfil pertenece al caso 12, o sea, que viene siendo un elemento rigidizado, la relación ancho/espesor vendrá siendo entonces:

$$\frac{b}{t} = \frac{100 - (2*5) (cm)}{5 (cm)} = 18 \rightarrow 1,12 * \sqrt{\frac{E}{fy}} = 1,12 * \sqrt{\frac{2,1 * 10^6 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)}{2300 \left(\frac{Kg}{cm^2}\right)}} = 33,84$$

→ $18 < 33,84$, por lo tanto, la sección es compacta

$$\rightarrow 4,71 * \sqrt{\frac{E}{fy}} = 142,31 < 156,25$$

$$\rightarrow F_{cr} = 0,877 * F_c = 744,48 \text{ (Kg/cm}^2\text{)}$$

$$\rightarrow P_n = F_{cr} * A_g = 744,48 \text{ (Kg/cm}^2\text{)} * 18,36 \text{ (cm}^2\text{)} = 13668,65 \text{ (Kg)} = 13,67 \text{ (T)} > 12,2 \text{ (T)}$$

Cumple

Una vez que ha seleccionado el perfil, se procederá a determinar la cuantía de resistencia del mismo para la carga crítica de pandeo, para ello, se determinará la resistencia de diseño a compresión, misma que equivale al producto entre el factor de reducción de resistencia ($\phi_c = 0,90$) y la carga crítica de pandeo obtenida, misma que debe tener un valor máximo igual a la unidad:

$$\phi_c * P_n = 0,9 * 13,67 = 12,3 \text{ (T)}$$

$$\rightarrow \% \text{ Resistencia} = \frac{Pu}{\phi_c * P_n} = \frac{12,2 \text{ (T)}}{12,3 \text{ (T)}} = 0,99 \approx 99\% \text{ CUMPLE}$$

Por lo tanto, el perfil seleccionado es 100X5

Este mismo análisis se lo puede efectuar por medio de una hoja electrónica EXCEL diseñada adecuadamente. El modelo de hoja electrónica diseñado en base a los pasos anteriormente seguidos se lo expone en el esquema de la figura 32. Se puede observar que los resultados de la hoja son similares a los obtenidos de forma manual, por lo que su diseño es confiable, y, por ende, se la puede aplicar para el caso siguiente. Los resultados que aparecen en verde son los valores calculados, a la derecha de la hoja se pueden observar dos filas en blanco correspondientes a los valores del radio de giro y del área del perfil, estos casilleros se volverán visibles en caso de que la sección escogida no

satisfaga las condiciones de carga, por lo que la hoja proporcionará valores mínimos que permitan escoger un perfil más idóneo.

DATOS GENERALES									
CARGA MUERTA (T) :	5,5								
CARGA VIVA (T) :	3,5								
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm2) :	2300								
Módulo de Elasticidad (Kg/cm2):	2,1	2100000							
Sección del perfil (cm2):	5,304								
Factor de reducción de resistencia (Øc) :	0,900								
PERFIL DE PRUEBA :									
I (cm4):	271,36								
Ag (cm4) :	18,36								
r (cm) :	3,84								
L (m):	6								
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:									
K:	1								
(K*L)/r :	156,07	PERFIL ADECUADO	→	r :		(Límite mínimo de Radio de giro sugerido) (cm)			
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm2) :	850,92								
CARGA AXIAL CRÍTICA, Pcr (T) :	15,62	PERFIL ADECUADO	→	Ag :		(Límite mínimo de área sugerida) (cm2)			
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla B 4.1 a)									
B (mm):	100								
t (mm) :	5								
b/t =	18	MIEMBRO COMPACTO							
Q :	1								
	FALSO								
ESFUERZO CRÍTICO (Fcr) :									
Fcr (Kg/cm2) =									
Fcr (Kg/cm2) =	746,26								
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:									
Øc*Pn (T):		#¡VALOR!							
Øc*Pn (T):	12,33	OK							

Figura 32.- Modelo de hoja electrónica para el análisis de selección de perfil. (Ejemplo caso i).

ii) Acero A588

El análisis se lo efectuará por medio de la hoja electrónica diseñada en base al caso anterior. Los resultados se muestran a continuación:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T):	5,5	
CARGA VIVA (T):	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,470	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,900	
PERFIL DE PRUEBA:		
I (cm ⁴):	271,36	
Ag (cm ⁴):	18,36	
r (cm):	3,84	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	156,25	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):		
	848,94	
CARGA AXIAL CRÍTICA, Pcr (T):	15,59	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPEJOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	100	
t (mm):	5	
b/t =	18	MIEMBRO COMPACTO
Q:	1	
	FALSO	
ESFUERZO CRÍTICO (Fcr):		
Fcr (Kg/cm ²) =		
Fcr (Kg/cm ²) =	744,52	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

Øc*Pn (T):	12,30	OK
------------	-------	----

→ El perfil seleccionado es 100X5

4.3.6.1.2. Columna doblemente empotrada

Para este caso, la carga crítica de pandeo de Euler viene expresada por la ecuación 39, misma que es la siguiente:

$$P_E = \frac{4 * \pi^2 * EI}{L^2} \quad (1)$$

Entonces, el esfuerzo crítico viene siendo el valor del cociente entre la carga crítica y el área, o sea:

$$F_e = \frac{4 * \pi^2 * EI}{L^2 * A} \quad (2)$$

Como se explicó en 4.1, la longitud de pandeo se la expresa por $lk = K * L$, siendo el valor de K igual a la unidad debido a que la columna no experimenta desplazamientos laterales como se explicó en 4.3.3. La inercia viene siendo el producto del área transversal del perfil por su radio de giro, entonces, reemplazando en (2) se tiene:

$$F_e = \frac{4 * \pi^2 * E * A * r^2}{(KL^2) * A} = \frac{4 * \pi^2 * E * r^2}{(KL^2)}$$

$$\rightarrow F_e = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{K * L}{2r}\right)^2}$$

Ecuación 78.- Esfuerzo crítico de pandeo para columnas doblemente empotradas.

Por lo tanto, en la hoja de cálculo se deberá de programar dicha ecuación de acuerdo con el modelo expuesto para obtener los resultados correctos. Los resultados para ambos casos se muestran a continuación:

i) **Acero A500:**

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T):	5,5	
CARGA VIVA (T):	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	5,304	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,900	
PERFIL DE PRUEBA:		
I (cm ⁴):	177,08	
Ag (cm ⁴):	11,41	
r (cm):	3,94	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	76,14	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	3574,94	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	40,79	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	100	
t (mm):	3	
b/t =	31,33	MIEMBRO COMPACTO
Q:	1	
	FALSO	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	1757,034	
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):	18,04	OK
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

→ Se optó por un perfil de 100X3

ii) **Acero A588**

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T):	5,5	
CARGA VIVA (T):	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,470	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,900	
PERFIL DE PRUEBA:		
I (cm ⁴):	226,46	
Ag (cm ⁴):	14,95	
r (cm):	3,89	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	77,12	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	3484,78	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	52,10	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	100	
t (mm):	4	
b/t =	23,00	MIEMBRO COMPACTO
Q:	1	
	FALSO	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	2304,62	
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):	31,01	OK
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

→ Se optó por un perfil de 100X4

4.3.6.2. Perfiles en secciones “I”, “H”

4.3.6.2.1. Elementos no rigidizados

4.3.6.2.1.1. Perfiles IPE

4.3.6.2. 1.1a. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	5,30	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	2140	
Ag (cm ⁴):	116	
r (cm):	4,295	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	139,69	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):		
	1062,12	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	123,21	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	200	
e (mm):	10,2	
t (mm):	16	
b/t =	6,25	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):	FALSO	

Fcr (Kg/cm2) = Fcr (Kg/cm2) =	929,18	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
Øc*Pn (T): Øc*Pn (T):	97,01	OK # ;VALOR!

→ El perfil seleccionado es IPE 500

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm2):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm2):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm2):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (Øc):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm4):	5166	
Ag (cm4):	175	
r (cm):	5,433	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	110,43	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm2):	1699,55	
CARGA AXIAL CRÍTICA, Pcr (T):	297,42	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	263	
e (mm):	11,5	
t (mm):	17	

b/t = Q:	7,74 1 FALSO	MIEMBRO NO COMPACTO
ESFUERZO CRÍTICO (Fcr):		
Fcr (Kg/cm2) = Fcr (Kg/cm2) = RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN: Øc*Pn (T): Øc*Pn (T):	1479,06 232,95	OK # ¡VALOR!

→ El perfil seleccionado es IPE 750X137

4.3.6.2.1.2. Perfiles HEB

4.3.6.2.1. 2.a. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm2):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm2):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm2):	5,30	
Factor de reducción de resistencia (Øc):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm4):	1363	
Ag (cm4):	65,3	
r (cm):	4,569	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	131,33	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm2):	1201,71	

CARGA AXIAL CRÍTICA, P_{cr} (T):	78,47	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	180	MIEMBRO NO COMPACTO
e (mm):	8,5	
t (mm):	14	
b/t =	6,43	
Q:	1	OK # ¡VALOR!
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):	FALSO	
F_{cr} (Kg/cm ²) =	1032,34	
F_{cr} (Kg/cm ²) =		
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):	60,67	
$\phi_c * P_n$ (T):		

→El perfil seleccionado es HEB 180

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	2100000
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	2843	PERFIL ADECUADO
Ag (cm ⁴):	91	
r (cm):	5,589	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	107,35	
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	1798,67	

CARGA AXIAL CRÍTICA, P_{cr} (T):	163,68	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
B (mm):	220	MIEMBRO NO COMPACTO
e (mm):	9,5	
t (mm):	16	
b/t =	6,88	
Q:	1	
	FALSO	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F_{cr} (Kg/cm ²) =	1551,34	
F_{cr} (Kg/cm ²) =		
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):	127,05	OK
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

→El perfil seleccionado es HEB 220

4.3.6.2.2. Elementos rigidizados

4.3.6.2.2.1. Perfiles IPE

4.3.6.2.2. 1.a. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	420	
Ag (cm ⁴):	45,9	

r (cm):	3,02	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA: K:	1	
(K*L) / r :	198,35	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	526,81	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	24,18	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
H (mm):	270	
e ₁ (mm):	10,2	
tw (mm):	6,6	
h/tw =	12	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	462,011	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
Ø _c *P _n (T):		#¡VALOR! OK
Ø _c *P _n (T):	19,086	

→ El perfil seleccionado es IPE 270.

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (Ø _c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	420	

Ag (cm ⁴): r (cm): L (m): FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA: K: (K*L) /r:	45,9 3,02 6 1 198,35	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²): CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	526,81 24,18	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
H (mm): e ₁ (mm): t _w (mm): h/t _w = Q: ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}): F _{cr} (Kg/cm ²) = F _{cr} (Kg/cm ²) =	270 10,2 6,6 12 1 462,011	MIEMBRO NO COMPACTO
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN: Ø _c *P _n (T): Ø _c *P _n (T):	 19,086	# ¡VALOR! OK

→ El perfil seleccionado es IPE 270.

4.3.6.2.2.2. Perfiles HEB

4.3.6.2.2. 2.a. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500:

DATOS GENERALES	
CARGA MUERTA (T)	5,5
CARGA VIVA (T)	3,5

Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	318	
Ag (cm ⁴):	34	
r (cm):	3,06	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	196,19	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):		
	527,17	PERFIL ADECUADO
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):		
	17,92	
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPELOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
H (mm):	120	
e ₁ (mm):	11	
tw (mm):	6,5	
h/tw =	12	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	462,325	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!
$\phi_c * P_n$ (T):	14,147	OK

→ El perfil seleccionado es HEB 120.

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	

Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	318	
Ag (cm ⁴):	34	
r (cm):	3,06	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	196,19	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):		
	527,17	
CARGA AXIAL CRÍTICA, Pcr (T):		
	17,92	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
H (mm):	120	
e1 (mm):	11	
tw (mm):	6,5	
h/tw =	12	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (Fcr):		
Fcr (Kg/cm ²) =		
Fcr (Kg/cm ²) =	462,325	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):		
$\phi_c * P_n$ (T):	14,147	# ¡VALOR! OK

→ El perfil seleccionado es HEB 120.

4.3.6.3. Perfiles huecos redondos

4.3.6. 3.a. Columna aislada bi articulada:

i) Acero A500:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	279	
Ag (cm ⁴):	15,2	
r (cm):	4,28	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	140,05	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	1056,76	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	16,06	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
D(mm):	125	
t(mm):	4	
D/t:	31,25	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	924,92	
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):	12,65	OK
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

→ El perfil seleccionado es Ø 125.4

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	5,5	
CARGA VIVA (T)	3,5	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,25	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	279	
Ag (cm ⁴):	15,2	
r (cm):	4,28	
L (m):	6	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	140,05	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	1056,76	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	16,06	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
D(mm):	125	
t(mm):	4	
D/t:	31,25	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}):		
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	926,78	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
$\phi_c * P_n$ (T):		# ¡VALOR!

$\phi_c * P_n$ (T):	12,68	OK
---------------------	--------------	-----------

→ El perfil seleccionado es ϕ 125.4

4.3.6.4. Perfiles T

En este caso, se han manifestado tres condicionantes:

- Estos perfiles tienen una limitación de carga menor a las de las especificaciones establecidas.
- La longitud a la que estos perfiles pueden trabajar bajo las nuevas cargas asignadas también se redujo: De 6,0 (m) a 4,0 (m).
- La existencia de estos perfiles es muy limitada: Se dispone de apenas seis.

En base a estas tres limitantes, se procederá a efectuar los análisis respectivos para los siete casos.

4.3.6. 4.a. Columna aislada bi articulada

i) Acero A500

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	4,4	
CARGA VIVA (T)	2,34	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	2300	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (ϕ_c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	88,3	
Ag (cm ⁴):	20,9	
r (cm):	2,06	
L (m):	4	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	
(K*L) /r:	194,60	PERFIL ADECUADO

ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm ²):	547,28	
CARGA AXIAL CRÍTICA, P _{cr} (T):	11,44	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPELOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
b (mm):	100	
e (mm):	11	
b/e:	9,09	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (F_{cr}) :		
F _{cr} (Kg/cm ²) =		
F _{cr} (Kg/cm ²) =	479,97	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
Ø _c *P _n (T):		#¡VALOR!
Ø _c *P _n (T):	9,03	OK

→ El perfil seleccionado es T 100.11

ii. Acero A588:

DATOS GENERALES		
CARGA MUERTA (T)	4,4	
CARGA VIVA (T)	2,34	
Esfuerzo de fluencia (Kg/cm ²):	3515,35	
Módulo de Elasticidad (Kg/cm ²):	2,1	2100000
Sección del perfil (cm ²):	3,47	
Factor de reducción de resistencia (Ø _c):	0,9	
PERFIL DE PRUEBA		
I (cm ⁴):	88,3	
Ag (cm ⁴):	20,9	
r (cm):	2,06	
L (m):	4	
FACTOR DE LONGITUD EFECTIVA:		
K:	1	

(K*L) /r:	194,60	PERFIL ADECUADO
ESFUERZO DE PANDEO ELÁSTICO (Kg/cm2):	547,28	
CARGA AXIAL CRÍTICA, Pcr (T):	11,44	PERFIL ADECUADO
EVALUACIÓN DE LAS RELACIONES ANCHO-ESPESOR DE LAS ALAS Y ALMAS (Tabla 4)		
b (mm):	100	
e (mm):	11	
b/e:	9,09	MIEMBRO NO COMPACTO
Q:	1	
ESFUERZO CRÍTICO (Fcr):		
Fcr (Kg/cm2) =		
Fcr (Kg/cm2) =	479,97	
RESISTENCIA DE DISEÑO A COMPRESIÓN:		
Øc*Pn (T):		#¡VALOR!
Øc*Pn (T):	9,03	OK

→ El perfil seleccionado es T 100.11

El resto de los cálculos se encuentran detallados en el siguiente enlace web:

<https://puceeduec->

my.sharepoint.com/:w/g/personal/ksamaniego678_puce_edu_ec/EeMDndiFQQ1GoFfwViSKr

[GQBwe9Z_KvD1-pFTf72GIqsYg?e=QRMp3O](https://my.sharepoint.com/:w/g/personal/ksamaniego678_puce_edu_ec/EeMDndiFQQ1GoFfwViSKr/GQBwe9Z_KvD1-pFTf72GIqsYg?e=QRMp3O)

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Perfil cuadrado hueco

Tabla 5.- Resultados para el perfil cuadrado hueco.

PERFIL CUADRADO HUECO				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	100X5	I: 171,36	100X5	I: 171,36
Fcr (Kg/cm ²) =	744,52		744,52	
Øc*Pn (T):	12,3		12,3	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	100X3	I:177,08	100X4	I: 226,46
Fcr (Kg/cm ²) =	1757,034		2304,62	
Øc*Pn (T):	18,04		31,01	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	160X6	I: 1390	170X8	I: 2120
Fcr (Kg/cm ²) =	412,76		323,52	
Øc*Pn (T):	13,26		14,44	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A588	
PERFIL:	100X5	I: 171,36	100X5	I: 171,36
Fcr (Kg/cm ²) =	744,52		744,52	
Øc*Pn (T):	12,3		12,3	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	100X3	I: 177,08	100X3	I: 226,46
Fcr (Kg/cm ²) =	1598,96		1558,64	
Øc*Pn (T):	16,42		20,97	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENTRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	100X6	I: 312,00	100X6	I: 312,00
Fcr (Kg/cm ²) =	683,16		683,16	
Øc*Pn (T):	13,3		13,3	

COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	100X6	I: 312,00	100X6	I: 312,00
Fcr (Kg/cm ²) =	713,78		713,78	
Øc*Pn (T):	13,9		13,9	

Para el caso de la columna aislada bi articulada, así como en el de la columna con apoyos empotrado y deslizante, se puede observar que su resistencia última de diseño para ambas clases de aceros tiene un valor ligeramente superior al de la carga mayorada, siendo su perfil admisible el más económico de los obtenidos en los demás casos.

Para el caso de la columna doblemente empotrada, se observa que para ambos tipos de aceros tienen una resistencia última de diseño superior a la de la carga mayorada, sin embargo, el acero A500 resulta más económico que el A588 ofreciendo un margen de seguridad confiable.

Para el caso de la columna con apoyos empotrado y libre, se observa que para ambos aceros se tiene una resistencia última de diseño razonablemente mayor al valor de la carga mayorada, sin embargo, los perfiles son, en ambos casos, los más costosos de todos los casos analizados en este tipo de sección.

En el caso de la columna con extremo apoyado-empotrado, se tiene que los valores correspondientes a la resistencia última de diseño, al igual que en el caso de la columna con apoyos empotrado y libre, son mayores que el valor de la carga mayorada con un margen de diferencia razonable, sin embargo, los perfiles vienen siendo de mayores dimensiones, y, por tanto, son materiales costosos.

Para los casos, tanto de columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga como para el de columnas doblemente articuladas con geometría inicial no rectilínea, se tienen resultados interesantes, puesto que para ambos casos y tipos de aceros

las resistencias últimas de diseño tienen valores ligeramente superiores al de la carga mayorada con un perfil que, si bien es superior al de los casos anteriores, es mucho más económico que el de la columna con apoyos empotrado-libre.

Perfiles no rigidizados

Perfiles IPE

Tabla 6.- Resultados para el perfil IPE no rigidizado.

PERFIL "IPE" (NO RIGIDIZADO)				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 500	I: 2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	928,18		1479,06	
Øc*Pn (T):	97,01		232,95	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 500	I:2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	1833,67		2831,22	
Øc*Pn (T):	191,43		445,92	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 600	I: 3390	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	108,05		110,16	
Øc*Pn (T):	15,07		17,35	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A588	
PERFIL:	IPE 500	I: 2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	928,18		1479,06	
Øc*Pn (T):	97,01		232,95	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 500	I: 2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	1474,93		2299,66	
Øc*Pn (T):	153,98		362,2	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	

PERFIL:	IPE 500	I: 2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	874,24		1395,43	
Øc*Pn (T):	91,27		219,78	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 500	I: 2140	IPE 750X137	I: 5166
Fcr (Kg/cm ²) =	911,29		1451,85	
Øc*Pn (T):	95,14		228,67	

Para el caso de columnas con apoyos empotrado-libre, se puede observar que los valores de las resistencias últimas de diseño son superiores a los de la carga mayorada con un ligero margen, sin embargo, para ambos tipos de acero, los perfiles resultan los de mayor dimensionamiento, y, por ende, los de más alto costo.

En este tipo de perfil, por su característica de no rigidizado, se puede observar que para el acero A588 en la totalidad de los casos, se hizo necesario seleccionar un perfil de grandes dimensiones (en este caso el perfil IPE 750X137), mientras que para el acero A500, con excepción del caso de columnas con apoyo empotrado-libre, se seleccionó un perfil que si bien es de dimensiones considerables (IPE 500) podrá resistir adecuadamente las cargas de diseño. Para el caso de la columna con apoyos empotrado y libre, mientras que para el acero A 588 se seleccionó el mismo perfil que para los demás casos, para el acero A 500 se seleccionó el perfil inmediato superior (IPE 600), lo que permite deducir que este caso requiere de perfiles de elevado costo.

Para todos los casos analizados, a excepción del de columnas con apoyos empotrado y libre, las resistencias últimas de diseño para el acero A588 son muy superiores a las del acero A500, por lo que este es más recomendable debido a que los costos serían relativamente menores, además de que en los perfiles de acero A588 los valores muy altos de las cargas últimas de diseño harían que estos trabajen a pérdida puesto que no se aprovecharía al máximo su capacidad de carga disponible.

De acuerdo con las conclusiones anteriores, se puede deducir que los perfiles IPE no rigidizados son muy poco recomendables puesto que los materiales son de costos elevados y su rendimiento con respecto a la carga última no es óptimo.

Perfiles HEB

Tabla 7.- Resultados para el perfil HEB no rigidizado.

PERFIL "HEB" (NO RIGIDIZADO)				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 180	I: 1363	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	1032,34		1551,34	
Øc*Pn (T):	60,67		127,05	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 180	I:1363	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	1118,27		2865,19	
Øc*Pn (T):	110,64		234,66	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 220	I: 2843	HEB 240	I: 3923
Fcr (Kg/cm ²) =	270,38		222,01	
Øc*Pn (T):	22,14		21,18	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A588	
PERFIL:	HEB 180	I: 1363	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	1032,34		1551,34	
Øc*Pn (T):	60,67		127,05	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 180	I: 1363	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	2210,31		3375,43	
Øc*Pn (T):	129,9		276,46	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENTRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 180	I: 1363	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	978,21		1468,32	
Øc*Pn (T):	57,49		120,26	

COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 200	I: 2003	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	1244,69		1524,36	
Øc*Pn (T):	87,49		124,84	

Para el caso de las columnas con apoyo empotrado-libre, se puede observar, que al igual que en el caso de los perfiles IPE no rigidizados, sus resistencias últimas de diseño superan al valor de la carga mayorada con márgenes de diferencia aceptables, sin embargo, son superiores a los de los perfiles IPE. Otro aspecto interesante es el de que los valores de las resistencias últimas de diseño tienen un muy mínimo margen de diferencia entre sí, siendo la del acero A500 mayor que la del acero A 588.

Para todos los casos se han seleccionado perfiles con dimensionamientos apropiados, es decir, vienen siendo perfiles asequibles lo que a diferencia de los perfiles IPE en donde, como pudo verse, estos son de dimensiones mayores y algunos son de dimensiones considerables.

Para todos los casos analizados, con excepción de las columnas con apoyo empotrado libre, los valores de las resistencias últimas de diseño para el acero A588 superan ampliamente a las del acero A500, sin embargo, al igual que en los perfiles IPE, no son aconsejables porque su capacidad de carga última está muy lejana de la carga mayorada.

Perfiles rigidizados

Perfiles IPE

Tabla 8.- Resultados para el perfil IPE rigidizado.

PERFIL "IPE" (RIGIDIZADO)				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm ²) =	462,011		462,011	

Øc*Pn (T):	19,086		19,086	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm2) =	1848,046		1848,046	
Øc*Pn (T):	76,343		76,343	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 400	I: 1320	IPE 400	I: 1320
Fcr (Kg/cm2) =	197,185		197,185	
Øc*Pn (T):	14,996		14,996	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm2) =	462,011		462,011	
Øc*Pn (T):	19,086		19,086	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm2) =	942,503		942,503	
Øc*Pn (T):	38,94		38,94	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENTRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm2) =	433,83		433,83	
Øc*Pn (T):	17,92		17,92	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	IPE 270	I: 420	IPE 270	I: 420
Fcr (Kg/cm2) =	452,31		452,31	
Øc*Pn (T):	18,69		18,69	

Se observa que para todos los casos y para ambos tipos de acero, a excepción de la columna con apoyos empotrados y libre, el perfil seleccionado es de dimensiones menores, y como tal, el más económico.

Para el caso de la columna doblemente empotrada, se observa que a pesar de que se seleccionó el mismo perfil que para los casos anteriores, sin embargo, las cargas últimas de diseño tienen un valor mucho mayor que los demás casos, además que se encuentran

muy alejados del valor de la carga mayorada, por lo que, a pesar de ofrecer seguridad, no obstante, no se aprovecharía al máximo su capacidad de carga disponible.

Para el caso de las columnas con apoyos empotrado y libre se observa una situación interesante: El valor de la resistencia última de diseño, además de ser idéntico para ambos tipos de aceros, es el que tiene un menor margen de diferencia, sin embargo, esto se cumplirá en un perfil de mayores dimensiones que para los casos anteriores. Otra particularidad de este caso es la de que el mismo perfil funciona para ambos tipos de aceros lo que no sucedió en el perfil no rigidizado en donde los perfiles son diferentes y para el acero A588 se necesita de un perfil de mayores dimensiones y menos asequible.

Para el caso de la columna con extremo apoyado-empotrado, se observa que, a diferencia del perfil IPE no rigidizado, el valor de la resistencia última de diseño es el mismo para ambos aceros, a pesar de que es distante del valor de la carga mayorada su margen de diferencia es aceptable, para ambos aceros se requiere del mismo perfil que viene siendo el seleccionado para la mayoría de los casos.

Para los casos de las columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga y de columnas con geometría inicial no rectilínea, se observa que para ambos tipos de aceros los valores correspondientes a la resistencia última de diseño son idénticos además que su margen de error con respecto a la carga mayorada es discretamente aceptable, lo que permitirá que trabajen con un rendimiento óptimo. A diferencia de los perfiles IPE no rigidizados, los valores de las resistencias últimas, además de ser considerablemente menores, son seguros y confiables siendo su costo mucho más económico.

En el caso de las columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga, para ambos tipos de acero, los valores de resistencia última de diseño además de

ser idénticos, son superiores a los que corresponden al caso de las columnas con geometría inicial no rectilínea, siendo su margen de diferencia ligeramente mayor lo que no sucede con los perfiles IPE no rigidizados, además de que, como ya se mencionó, los perfiles son los mismos que para la mayoría de los casos.

Perfiles HEB

Tabla 9.- Resultados para el perfil HEB rigidizado.

PERFIL "HEB" (RIGIDIZADO)				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 120	I: 318	HEB 120	I: 318
Fcr (Kg/cm ²) =	462,33		462,33	
Øc*Pn (T):	14,15		14,15	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 120	I:318	HEB 120	I: 318
Fcr (Kg/cm ²) =	1888,97		1888,97	
Øc*Pn (T):	57,8		57,8	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 220	I: 2843	HEB 240	I: 3923
Fcr (Kg/cm ²) =	270,38		222,01	
Øc*Pn (T):	22,14		21,18	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A588	
PERFIL:	HEB 120	I: 318	HEB 120	I: 318
Fcr (Kg/cm ²) =	462,33		462,33	
Øc*Pn (T):	14,15		14,15	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 120	I: 318	HEB 120	I: 318
Fcr (Kg/cm ²) =	963,37		963,37	
Øc*Pn (T):	26,48		26,48	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 120	I: 318	HEB 220	I: 2843
Fcr (Kg/cm ²) =	442,5		442,5	
Øc*Pn (T):	13,54		13,54	

COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	HEB 120	I: 318	HEB 120	I: 318
Fcr (Kg/cm ²) =	462,33		462,33	
Øc*Pn (T):	14,15		14,15	

Se observa que, para casi todos los casos, a excepción del de la columna con apoyos empotrado y libre, el miembro trabaja de forma óptima en base a un perfil de dimensiones menores, y, por ende, de costo económico. A diferencia del perfil HEB no rigidizado, en este caso se ha podido seleccionar el mismo perfil para ambos tipos de acero, lo que no fue posible en el caso anterior (HEB no rigidizado), donde además de haberse seleccionado perfiles mayores para el acero A500, se tuvo que optar por perfiles superiores, lo que encarece el costo de material.

Para el caso de la columna doblemente empotrada, al igual que en los perfiles HEB no rigidizados, los valores de las resistencias últimas de diseño son considerablemente superiores a los de los demás sub casos, sin embargo, en este caso, los valores no son extremadamente mayores y para los dos aceros son los mismos y son aplicables para el mismo perfil que viene siendo de dimensiones óptimas y costo económico.

Para el caso de la columna con apoyos empotrado y libre, los perfiles seleccionados para ambos tipos de aceros, además de ser diferentes son de dimensiones superiores, sin embargo, la particularidad interesante de este caso radica en que los valores de las resistencias últimas de diseño vienen siendo iguales que para el caso del perfil HEB no rigidizado, y más interesante aún de que los perfiles vienen siendo también los mismos que se han seleccionado en el referido caso. Los valores en mención, además de ser idénticos para ambos casos, tienen un margen de diferencia razonablemente superior con respecto a la carga mayorada, lo que permite deducir que las columnas con apoyo empotrado – libre son funcionales tanto para perfil HEB no rigidizado como rigidizado

en ambos tipos de aceros con un rendimiento óptimo de aprovechamiento de la eficiencia del material.

Para el caso de la columna con extremo apoyado-empotrado, se tiene al igual que en las columnas con apoyo empotrado-libre también un aspecto interesante: Para los perfiles rigidizados, los valores de las resistencias últimas de diseño son los mismos con igual perfil y para los dos tipos de acero, lo que no se dio para el caso de los perfiles HEB no rigidizados además de que en el caso mencionado, dichos valores son los mayores de todos los casos en los dos tipos de aceros, lo que no ocurre con los perfiles HEB rigidizados.

Para los casos de columnas doblemente articuladas con excentricidad de carga y con geometría inicial no rectilínea, mientras que en el primer sub caso los valores de resistencia última son los mismos para los dos tipos de acero, sin embargo, requieren de perfiles diferentes lo que no sucede en el segundo sub caso de que los valores son iguales y con el mismo perfil para los dos tipos de acero. A diferencia de los perfiles no rigidizados, los valores de los dos sub casos son considerablemente menores y su margen de diferencia con respecto a la carga mayorada es ligeramente superior por lo que tienen un óptimo rendimiento de trabajo y los materiales son más económicos.

Perfiles huecos redondos

Tabla 10.- Resultados para perfiles huecos redondos.

PERFILES HUECOS REDONDOS				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 125.4	I: 279	Ø 125.4	I: 279
Fcr (Kg/cm ²) =	924,92		926,78	
Øc*Pn (T):	12,65		12,68	

COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 90.3	I: 77,6	Ø 90.3	I: 77,6
Fcr (Kg/cm ²) =	1913,61		1913,61	
Øc*Pn (T):	14,11		14,11	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 175.8	I: 1470	Ø 200.6	I: 1720
Fcr (Kg/cm ²) =	340,26		399,27	
Øc*Pn (T):	12,86		13,2	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 125.4	I: 279	Ø 125.4	I: 279
Fcr (Kg/cm ²) =	924,92		926,78	
Øc*Pn (T):	12,65		12,68	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 100.4	I: 139	Ø 100.4	I: 139
Fcr (Kg/cm ²) =	1118,25		1118,25	
Øc*Pn (T):	12,89		12,89	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENRICIDAD DE CARGA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 125.5	I: 340	Ø 125.5	I: 340
Fcr (Kg/cm ²) =	857,4		855,61	
Øc*Pn (T):	14,51		14,58	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	Ø 125.4	I: 279	Ø 125.4	I: 279
Fcr (Kg/cm ²) =	907,02		907,32	
Øc*Pn (T):	12,41		12,41	

Para este tipo de perfil se observa que su principal particularidad con respecto a los anteriores es la de que los valores de la resistencia última de diseño tienen márgenes de diferencia bastante estrechos con respecto a la carga mayorada por lo que su rendimiento de trabajo es muy favorable.

A pesar de que los valores de las resistencias últimas de diseño son ligeramente superiores al valor de la carga mayorada, sin embargo, los perfiles seleccionados vienen siendo de

dimensiones mayores lo que resultaría relativamente costoso, pero es importante que siempre prevalezca la seguridad sobre la economía, lo que justifica el empleo de los materiales seleccionados.

Para el caso de la columna con apoyos empotrado y libre, se observa que se ha tenido que seleccionar perfiles de dimensiones mayores para que puedan resistir de forma óptima la carga mayorada de diseño, sin embargo, los valores de la resistencia última de diseño vienen siendo ligeramente mayores a los de la carga mayorada, deduciendo así de que este tipo de perfil es muy ventajoso.

Para el caso de la columna doblemente empotrada, se observa que, a diferencia de los casos anteriores, la resistencia última de diseño si bien alcanza un valor con un razonable margen de diferencia con respecto a la carga mayorada de trabajo, además que es el mismo para los dos tipos de aceros, ya no viene siendo el mayor de todos siendo apenas superado por el caso de las columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga. En base a lo anterior, se tienen mayores argumentos que respaldan la ventaja del perfil en cuestión para los casos que han sido objeto de análisis.

Para los casos de las columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga y de geometría inicial no rectilínea, se observa que existe una cierta semejanza con los casos de los perfiles rigidizados en donde los valores de la resistencia última de diseño son bastante aproximados entre sí para los dos tipos de aceros, observando de forma detenida los resultados correspondientes tanto para el perfil HEB no rigidizado como para el perfil hueco redondo, se puede notar una cierta analogía entre estos (con excepción de la columna doblemente empotrada), sin embargo, en los perfiles HEB los materiales son más económicos que en los perfiles huecos redondos, no obstante, se puede deducir que ambos perfiles optimizan la carga de trabajo con la carga de diseño.

Perfiles "T"

Tabla 11.- Resultados para perfiles T.

PERFILES "T"				
COLUMNA AISLADA BI ARTICULADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	479,97		479,97	
Øc*Pn (T):	9,03		9,03	
Cargas modificadas:	CM: 4,4 (T)		CM: 4,4 (T)	
	CV: 2,34 (T)		CV: 2,34 (T)	
COLUMNA DOBLEMENTE EMPOTRADA				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I:88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	1919,88		1919,88	
Øc*Pn (T):	36,11		36,11	
Cargas modificadas:	CM: 4,4 (T)		CM: 4,4 (T)	
	CV: 2,34 (T)		CV: 2,34 (T)	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y LIBRE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	213,32		213,32	
Øc*Pn (T):	4,01		4,01	
Cargas modificadas:	CM: 2,4 (T)		CM: 2,4(T)	
	CV: 0,7 (T)		CV: 0,7(T)	
COLUMNA CON APOYOS EMPOTRADO Y DESLIZANTE				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	479,97		479,97	
Øc*Pn (T):	9,03		9,03	
Cargas modificadas:	CM: 4,4 (T)		CM: 4,4 (T)	
	CV: 2,34 (T)		CV: 2,34 (T)	
COLUMNA CON EXTREMO APOYADO - EMPOTRADO				
ACERO	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	979,14		979,14	
Øc*Pn (T):	18,42		18,42	
Cargas modificadas:	CM: 4,4 (T)		CM: 4,4 (T)	
	CV: 2,34 (T)		CV: 2,34 (T)	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS COMPRIMIDAS CON EXCENRICIDAD DE CARGA				

ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	T 100.11	I: 88,3
Fcr (Kg/cm ²) =	449,73		449,73	
Øc*Pn (T):	8,46		8,46	
Cargas modificadas:	CM: 4,1 (T)		CM: 4,1 (T)	
	CV: 2,2 (T)		CV: 2,2 (T)	
COLUMNAS DOBLEMENTE ARTICULADAS CON GEOMETRÍA INICIAL NO RECTILÍNEA				
ACERO A 500	ACERO A 500		ACERO A 588	
PERFIL:	T 100.11	I: 88,3	Ø 125.4	I: 279
Fcr (Kg/cm ²) =	469,89		469,89	
Øc*Pn (T):	8,84		8,84	
Cargas modificadas:	CM: 4,4 (T)		CM: 4,4 (T)	
	CV: 2,22 (T)		CV: 2,22 (T)	

Para este perfil en la totalidad de los casos se hizo necesario reducir los valores de las cargas de trabajo, así como de la longitud efectiva, siendo la merma más significativa la correspondiente a la columna con apoyo empotrado-libre en donde el valor de la carga mayorada equivale a un total de 4 (T) lo que representa apenas 80 sacos de cemento.

En todos los demás casos, si bien la reducción es moderada, se deduce que este tipo de perfiles es de un rendimiento muy limitado y debido a ello impone muchas condicionantes para su uso, por lo que es muy poco recomendable para diseños estructurales.

En todos los casos analizados para este tipo de perfil se tuvo que seleccionar el mayor de todos los perfiles disponibles, siendo estos de una existencia muy limitada (apenas seis unidades), lo que confirma la poca utilidad que estos pueden tener en diseños estructurales de alta complejidad en calidad de columnas.

Para el caso de la columna doblemente empotrada, se puede observar que los valores de la resistencia última de diseño son los más altos en relación al resto de casos a pesar de que hubo que reducirse los valores de las cargas, la longitud efectiva y seleccionarse el mayor de los seis perfiles disponibles, lo que permite deducir que si bien los perfiles T son de uso limitado pueden tener una cierta utilidad en el caso en cuestión, sin embargo,

su rendimiento sería poco óptimo debido a que su carga última de diseño es mucho mayor con relación a la carga de servicio mayorada.

Para el caso de la columna con extremo apoyado – empotrado, los valores de la resistencia última de diseño también son superiores a los de la carga mayorada siendo su margen de diferencia casi equivalente al cincuenta por ciento. Al igual que para las columnas doblemente empotradas, pueden ser tomadas en cuenta en diseños estructurales, pero con una cierta limitación.

Conclusiones generales

De acuerdo con el objetivo general:

- Se obtuvieron, de acuerdo a cada uno de los siete casos, las respectivas ecuaciones diferenciales de acuerdo con el comportamiento mecánico adoptado por las columnas. Para cada ecuación diferencial se hallaron sus respectivas soluciones, mismas que vienen siendo la carga crítica de Euler, que constituye el modelo matemático encargado de determinar el valor de la carga crítica de pandeo.

De acuerdo con los objetivos específicos:

- Por medio de las ecuaciones diferenciales de pandeo de columnas ha sido posible conocer la procedencia de las expresiones que definen la carga crítica de pandeo de acuerdo al tipo de apoyos que la sustentan, y de esta forma proceder con su respectivo análisis.
- De acuerdo a lo analizado en 3.1, la teoría lineal se limita a la obtención de la carga crítica, sin embargo, este viene siendo el parámetro fundamental para determinar el tipo de perfil que se requiere para que la columna pueda trabajar de forma óptima ante una carga compresiva de diseño previamente determinada.

- De acuerdo con los análisis de los perfiles efectuados en el capítulo IV y de los resultados analizados, se deduce que los perfiles cuadrados huecos, los perfiles HEB rigidizados y los perfiles huecos redondos vienen siendo los que mejor idoneidad ofrecen ante las acciones de la carga compresiva planteada en todos los casos propuestos, así como en ambos tipos de acero.
- Para los casos de columnas doblemente articuladas comprimidas con excentricidad de carga y columnas doblemente articuladas con geometría inicial no rectilínea, se ha observado que el análisis lineal para determinar su carga crítica de pandeo tanto por medio del diagrama de excentricidad de carga como por el de las curvas de carga ha resultado muy preciso y confiable, lo que se refleja en los resultados coherentes y precisos obtenidos en el capítulo IV además de que para ambos tipos de acero los perfiles seleccionados trabajarán con un óptimo rendimiento de la carga de servicio respecto a la resistencia última de diseño.
- De acuerdo con las sub conclusiones obtenidas en Perfiles “T”, se ratifica que los perfiles T no son idóneos para trabajar a cargas compresivas, y si se desea emplear estos perfiles con ese propósito deberán de delimitarse tanto la carga de servicio como la longitud efectiva, lo que permite deducir que su empleo para columnas es muy condicionado por lo que su uso deberá limitarse y dejarlo más para cargas y momentos flectores.

Recomendaciones

- De acuerdo con lo expresado en la cuarta conclusión, es recomendable efectuar un análisis previo entre los tres perfiles sugeridos con el objeto de poder decidir de una forma más segura y precisa acerca de cuál de ellos sería el que mejor

convenga para una determinada carga de servicio, así como para precisar los costos preliminares de material.

- Tal como se procedió en el capítulo IV, se aconseja efectuar los análisis en base a por lo menos dos tipos de aceros para de esta forma poder comparar de un modo más preciso y confiable acerca de cuál de ellos ofrece un mejor margen de seguridad junto con su respectiva utilidad de costo. Se hace esta recomendación en base a los resultados obtenidos en el referido capítulo en donde, sobre todo en los perfiles sugeridos, el rendimiento de las columnas es óptimo para las dos clases de aceros pudiéndose optar por idéntico perfil que responderá satisfactoriamente a la acción de las cargas de servicio.
- Como se pudo ver a lo largo del desarrollo del capítulo IV, los análisis efectuados en base a hojas electrónicas EXCEL son muy precisos, rápidos y confiables, por lo que se aconseja diseñar las referidas herramientas informáticas en base a los criterios y normativas de análisis y diseño establecidos por la AISC tratando en lo posible de simplificar su formato, es decir, lograr que el uso de la hoja sea sencillo, claro y práctico, con la finalidad de obtener los resultados de forma precisa, segura e inmediata.
- En la programación de las hojas electrónicas, con el objeto de que los resultados sean seguros y confiables, se aconseja para operaciones extensas efectuarlas aparte e ir las comprobando paso a paso, al final, cuando se hayan comprobado los resultados parciales se procederá a unir las operaciones y una vez hecho esto se efectuará la comprobación definitiva, si esta proporciona el resultado esperado se comprobará con datos diferentes hasta que los resultados sean idénticos a los obtenidos de forma manual, de esta forma se tendrá una herramienta de trabajo útil, segura y eficaz que permitirá ahorrar tiempo y energía.

- Es aconsejable mantener una actualización con respecto a las posibles modificaciones de la normativa AISC y de los perfiles de acero para de esta forma perfeccionar y reforzar los conocimientos adquiridos.
- En lo referente a la selección de los perfiles de acero, es aconsejable el respaldarse en tablas de confianza, bien sea editadas por las fábricas de acero o por la misma AISC, o mediante portales virtuales confiables. Se sugiere, además, elaborar en una hoja EXCEL propia las tablas de perfiles yendo estas concatenadas a las hojas de cálculo, de esta forma se obtendría una mayor precisión en el análisis.

Se sugiere, a partir de las ecuaciones diferenciales del pandeo de columnas, para cada uno de los casos analizados, bosquejar la correspondiente gráfica de la elástica que estas adquirirán, con ello se pretende conocer con mayor grado de amplitud el probable comportamiento que adoptarán para de esta forma poder seleccionar con un mejor criterio el perfil de diseño.

BIBLIOGRAFÍA

American Institute of Steel Construction Inc. (2005). *Specification of structural steel buildings*. Chicago: AISC.

Ayres JR, F. (1970). *Ecuaciones Diferenciales (Colección Schaum)*. México: Mc. Graw Hill.

Boyce, W., & Di Prima, R. (1999). *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valores en la frontera*. México: LIMUSA-NORIEGA.

Chapra, S., & Canale, R. (1999). *Métodos Numéricos para Ingenieros. Tercera Edición*. México: Mc. Graw Hill.

Estrada Mejía, M. (2017). *Análisis Estructural básico. Apuntes de clases*. Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Ferrer, M. (2010). *Resistencia de Materiales: Problemas Resueltos*. Barcelona: Ediciones UPC.

Gere, J., & Goodno, B. (2016). *Mecánica de Materiales. Octava Edición*. México D.F: CENGAGE. Learning.

González Cuevas, O. (2003). *Análisis Estructural*. México D.F: LIMUSA- NORIEGA.

Granville, W. A. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral. Sexta Edición*. México D.F: Limusa-Noriega.

Kassimali, A. (2014). *Análisis Estructural*. Missouri: Aprendizaje CENGAGE.

Martínez, A., Puertas, E., & Gallego, R. (2015). *Inestabilidad de Estructuras: Inestabilidad de barras comprimidas y pandeo global de estructuras*. Obtenido de file:///G:/Art%C3%ADculo%20UAF/Inestabilidad_AE_GradoIC_2014_2015_Apunte

- Mc. Cormac, J. (2005). *Análisis de Estructuras. Métodos clásico y matricial. Cuarta Edición*. Los Ángeles: Alfa Omega.
- Merrit, F., & Ricketts, J. (1997). *Manual Integral para Diseño y Construcción. Tomo I. Quinta Edición*. Bogotá: Mc. Graw Hill.
- Nilson, A. (1999). *Diseño de Estructuras de Concreto. Sexta Edición*. New York: Perentice Hall.
- Pérez White, T. (1992). *Resistencia de Materiales*. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Romero García, M. (2002). *Resistencia de Materiales*. Universitat JAUME.
- Vera Lázaro, A. (2013). *Análisis Estructural con matrices*. Arequipa: Arequipa MACRO.
- Wang, E. (2003). *Análisis Estructural avanzado (Serie Shaum)*. New York: Mc. Graw Hill.

ANEXOS

Anexo 1: Perfiles cuadrados huecos

r = Radio exterior de redondeo
u = Perímetro
A = Área de la sección
S = Momento estático de media sección, respecto al eje X o Y
I = Momento de inercia de la sección, respecto al eje X o Y
W = 2I : d. Módulo resistente de la sección, respecto al eje X o Y
i = $\sqrt{I/A}$. Radio de giro de la sección, respecto al eje X o Y
It = Módulo de torsión de la sección

Perfil	Dimensiones				Términos de sección						Peso	
	a mm	e mm	r mm	u mm	A cm ²	S cm ³	I cm ⁴	W cm ³	i cm	I _t cm ⁴		p kg/m
# 40.2	40	2	5	151	2,90	2,04	6,60	3,40	1,53	11,3	2,28	P
# 40.3	40	3	8	147	4,13	2,80	9,01	4,51	1,48	15,6	3,24	P
# 40.4	40	4	10	143	5,21	3,40	10,50	5,26	1,42	18,9	4,09	P
# 45.2	45	2	5	171	3,30	2,63	9,94	4,42	1,74	16,3	2,59	C
# 45.3	45	3	8	167	4,73	3,65	13,40	5,95	1,68	22,9	3,71	C
# 45.4	45	4	10	163	6,01	4,49	15,90	7,07	1,63	28,2	4,72	C
# 50.2	50	2	5	191	3,70	3,30	13,90	5,57	1,94	22,7	2,91	P
# 50.3	50	3	8	187	5,33	4,62	19,00	7,59	1,89	32,0	4,18	P
# 50.4	50	4	10	183	5,81	5,73	22,90	9,15	1,83	39,9	5,35	P
# 55.2	55	2	5	211	4,10	4,04	18,90	6,86	2,14	30,5	3,22	C
# 55.3	55	3	8	207	5,93	5,70	25,90	9,43	2,09	43,4	4,66	C
# 55.4	55	4	10	203	7,61	7,12	31,60	11,50	2,04	54,5	5,97	C
# 60.2	60	2	5	231	4,50	4,86	24,80	8,28	2,35	39,9	3,53	P
# 60.3	60	3	8	227	6,53	6,89	34,40	11,50	2,30	57,1	5,13	P
# 60.4	60	4	10	223	8,41	8,66	42,30	14,10	2,24	72,2	6,60	P
# 60.5	60	5	13	219	10,10	10,20	48,50	16,20	2,19	85,2	7,96	C
# 70.2	70	2	5	271	5,30	6,71	40,30	11,50	2,76	64,1	4,16	P
# 70.3	70	3	8	267	7,73	9,60	56,60	16,20	2,71	92,6	6,07	P
# 70.4	70	4	10	263	10,00	12,20	70,40	20,10	2,65	118,0	7,86	P
# 70.5	70	5	13	259	12,10	14,50	82,00	23,40	2,60	141,0	9,53	P
# 80.3	80	3	8	307	8,93	12,80	86,60	21,70	3,11	140,0	7,01	P
# 80.4	80	4	10	303	11,60	16,30	108,80	27,20	3,06	180,0	9,11	P
# 80.5	80	5	13	299	14,10	19,50	128,00	32,00	3,01	217,0	11,10	P
# 80.6	80	6	15	294	16,50	22,40	144,00	36,00	2,95	250,0	13,00	C
# 90.3	90	3	8	347	10,10	16,40	126,00	37,90	3,52	202,0	7,95	P
# 90.4	90	4	10	343	13,20	21,10	159,00	35,40	3,47	281,0	10,40	P
# 90.5	90	5	13	339	16,10	25,30	189,00	41,90	3,42	316,0	12,70	P
# 90.6	90	6	15	334	18,90	29,20	214,00	47,60	3,36	366,0	14,90	P
# 100.3	100	3	8	387	11,30	20,10	175,00	35,00	3,93	279,0	8,89	P
# 100.4	100	4	10	383	14,80	26,40	223,00	44,60	3,88	363,0	11,60	P
# 100.5	100	5	13	379	18,10	31,90	266,00	53,10	3,83	440,0	14,20	P
# 100.6	100	6	15	374	21,30	37,00	304,00	60,70	3,77	513,0	16,70	P
# 120.4	120	4	10	463	18,00	38,90	397,00	66,20	4,70	638,0	14,10	P
# 120.5	120	5	13	459	22,10	47,20	478,00	79,60	4,64	780,0	17,40	P
# 120.6	120	6	15	454	26,10	55,10	551,00	91,80	4,59	913,0	20,50	C
# 140.5	140	5	13	539	26,10	65,60	780,00	111,00	5,46	260,0	20,50	P
# 140.6	140	6	15	534	30,90	76,80	905,00	129,00	5,41	480,0	24,30	P
# 140.8	140	8	20	526	40,00	97,50	1.130,00	161,00	5,30	890,0	31,40	P
# 160.5	160	5	13	619	30,10	86,90	1.190,00	149,00	6,28	1.901,0	23,70	P
# 160.6	160	6	15	614	35,70	102,00	1.390,00	173,00	6,23	2.240,0	28,00	P
# 160.8	160	8	20	609	46,40	131,00	1.740,00	218,00	6,12	2.890,0	36,50	P
# 170.5	170	5	13	659	32,10	98,70	1.440,00	169,00	6,69	2.290,0	25,20	C
# 170.6	170	6	15	654	38,10	116,00	1.680,00	198,00	6,64	2.710,0	29,90	C
# 170.8	170	8	20	646	49,60	149,00	2.120,00	249,00	6,53	3.410,0	39,00	P

Anexo 2: Perfiles IPE

A = Área de la sección
 S_x = Momento estático de media sección, respecto a X
 I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X
 $W_x = 2I_x : h$: h. Módulo resistente de la sección, respecto a X
 $i_x = \sqrt{I_x : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X
 I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y
 $W_y = 2I_y : b$: b. Módulo resistente de la sección, respecto a Y
 $i_y = \sqrt{I_y : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y

I_t = Módulo de torsión de la sección
 I_a = Módulo de alabeo de la sección
 u = Perímetro de la sección
 a = Diámetro del agujero del roblón normal
 w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
 h_1 = Altura de la parte plana del alma
 p = Peso por m

Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso	
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁶	w mm	a mm	e ₂ mm	p kp/m	
IPE 80	80	46	3,8	5,2	5	60	328	7,64	11,6	80,1	20,0	3,24	8,49	3,69	1,05	0,721	118	—	—	3,8	6,00	C
IPE 100	100	55	4,1	5,7	7	75	400	10,30	19,7	171,0	34,2	4,07	15,90	5,79	1,24	1,140	351	—	—	4,1	8,10	C
IPE 120	120	64	4,4	6,3	7	93	475	13,20	30,4	318,0	53,0	4,90	27,70	8,65	1,45	1,770	890	35	—	4,4	10,40	C
IPE 140	140	73	4,7	6,9	7	112	551	16,40	44,2	541,0	77,3	5,74	44,90	12,30	1,65	2,630	1.981	40	11	4,7	12,90	C
IPE 160	160	82	5,0	7,4	9	127	623	20,10	61,9	869,0	109,0	6,58	68,30	16,70	1,84	3,640	3.959	44	13	5,0	15,80	P
IPE 180	180	91	5,3	8,0	9	146	698	23,90	83,2	1.320,0	146,0	7,42	101,00	22,20	2,05	5,060	7.431	48	13	5,3	18,80	P
IPE 200	200	100	5,6	8,5	12	159	788	28,50	110,0	1.940,0	194,0	8,26	142,00	28,50	2,24	6,670	12.990	52	13	5,6	22,40	P
IPE 220	220	110	5,9	9,2	12	178	848	33,40	143	2.770	252	9,11	205	37,3	2,48	9,15	22.670	58	17	5,9	26,20	P
IPE 240	240	120	6,2	9,8	15	190	922	39,10	183	3.890	324	9,97	284	47,3	2,69	12,00	37.390	65	17	6,2	30,70	P
IPE 270	270	135	6,6	10,2	15	220	1.040	45,90	242	5.790	429	11,20	420	62,2	3,02	15,40	70.580	72	21	6,6	36,10	P
IPE 300	300	150	7,1	10,7	15	249	1.160	53,80	314	8.360	557	12,50	604	80,5	3,35	20,10	125.900	80	23	7,1	42,20	P
IPE 330	330	160	7,5	11,5	18	271	1.250	62,60	402	11.770	713	13,70	788	98,5	3,55	26,50	199.100	85	25	7,5	49,10	P
IPE 360	360	170	8,0	12,7	18	299	1.350	72,70	510	16.270	904	15,00	1.040	123,0	3,79	37,30	313.600	90	25	8,0	57,10	P
IPE 400	400	180	8,6	13,5	21	331	1.470	84,50	654	23.130	1.160	16,50	1.320	146,0	3,95	48,30	490.000	95	28	8,6	66,30	P
IPE 450	450	190	9,4	14,6	21	379	1.610	98,80	851	33.740	1.500	18,50	1.680	176,0	4,12	65,90	791.000	100	28	9,4	77,60	P
IPE 500	500	200	10,2	16,0	21	426	1.740	116,00	1.100	48.200	1.930	20,40	2.140	214,0	4,31	91,80	1.249.000	110	28	10,2	90,70	P
IPE 550	550	210	11,1	17,2	24	468	1.880	134,00	1.390	67.120	2.440	22,30	2.670	254,0	4,45	122,00	1.884.000	115	28	11,1	106,00	C
IPE 600	600	220	12,0	19,0	24	514	2.010	155,00	1.760	92.080	3.070	24,30	3.390	308,0	4,66	172,00	2.846.000	120	28	12,0	122,0	C

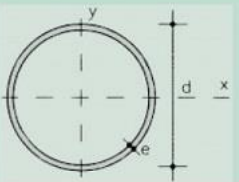
Anexo 3: Perfiles T

A = Área de la sección
 I_x = Momento de inercia de media sección, respecto al eje X
 $W_x = I_x : (b - z)$: b. Módulo resistente de la sección, respecto al eje X
 $i_x = \sqrt{I_x : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a X
 I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y

$W_y = 2I_y : b$: b. Módulo resistente de la sección, respecto a Y.
 $i_y = \sqrt{I_y : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a Y
 u = Perímetro de la sección
 p = Peso por m
 I_t = Módulo de torsión de la sección

Perfil	Dimensiones					Posición del centro	Términos de sección										Agujeros		Peso
	b mm	e=r mm	r ₁ mm	r ₂ mm	u mm	z cm	A cm	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	w mm	a mm	p kp/m		
T 40	5	40	5	2,5	1,0	153	1,12	3,77	5,28	1,84	1,18	2,58	1,29	0,83	0,350	21	6,4	2,96	C
T 50	6	50	6	3,0	1,5	191	1,39	5,66	12,10	3,36	1,46	6,06	2,42	1,03	0,757	30	6,4	4,44	C
T 60	7	60	7	3,5	2,0	229	1,66	7,94	23,80	5,48	1,73	12,20	4,07	1,24	1,450	34	8,4	6,23	C
T 70	8	70	8	4,0	2,0	268	1,94	10,60	44,50	8,79	2,05	22,10	6,32	1,44	2,520	38	11,0	8,32	C
T 80	9	80	9	4,5	2,0	307	2,22	13,60	73,70	12,80	2,33	37,00	9,25	1,65	4,110	45	11,0	10,70	C
T 100	11	100	11	5,5	3,0	383	2,74	20,90	179,00	24,60	2,92	88,30	17,70	2,05	9,380	60	13,0	16,40	C

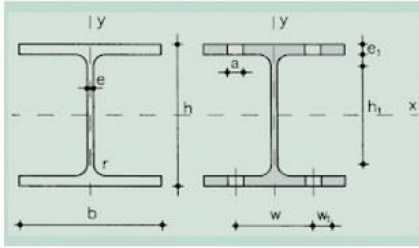
Anexo 4: Perfiles huecos redondos



u = Perímetro
A = Área de la sección
S = Momento estático de media sección, respecto a un eje baricéntrico
I = Momento de inercia de la sección, respecto a un eje baricéntrico
W = 2I : d. Módulo resistente de la sección, respecto a un eje baricéntrico
i = $\sqrt{I : A}$. Radio de giro de la sección, respecto a un eje baricéntrico
I_t = Módulo de torsión de la sección

Perfil	Dimensiones			Términos de sección						Peso	
	d mm	e mm	u mm	A cm ²	S cm ³	I cm ⁴	W cm ³	i cm	I _t cm ⁴	p kp/m	
∅ 40.2	40	2	126	2,39	1,44	4,33	2,16	1,35	8,66	1,88	P
∅ 40.3	40	3	126	3,49	2,05	6,01	3,00	1,31	12,00	2,74	P
∅ 40.4	40	4	126	4,52	2,60	7,42	3,71	1,28	14,80	3,55	C
∅ 45.2	45	2	141	2,70	1,85	6,26	2,78	1,52	12,50	2,12	P
∅ 45.3	45	3	141	3,96	2,65	8,77	3,90	1,49	17,50	3,11	P
∅ 45.4	45	4	141	5,15	3,37	10,90	4,84	1,45	21,80	4,04	C
∅ 50.2	50	2	157	3,02	2,30	8,70	3,48	1,69	17,40	2,37	P
∅ 50.3	50	3	157	4,43	3,31	12,20	4,91	1,66	24,50	3,47	P
∅ 50.4	50	4	157	5,78	4,23	15,40	6,16	1,63	30,80	4,53	P
∅ 55.2	55	2	173	3,33	2,81	11,70	4,25	1,87	23,40	2,61	C
∅ 55.3	55	3	173	4,90	4,06	16,60	6,04	1,84	33,20	3,85	C
∅ 55.4	55	4	173	6,41	5,21	21,00	7,64	2,01	42,00	5,03	C
∅ 60.2	60	2	188	3,64	3,36	15,30	5,11	2,05	30,60	2,86	P
∅ 60.3	60	3	188	5,37	4,87	21,80	7,29	2,01	43,70	4,21	P
∅ 60.4	60	4	188	7,04	6,27	27,70	9,24	1,98	55,40	5,52	P
∅ 65.2	65	2	204	3,96	3,97	19,70	6,06	2,23	39,40	3,11	C
∅ 65.3	65	3	204	5,84	5,78	28,10	8,65	2,19	56,20	4,58	C
∅ 65.4	65	4	204	7,67	7,46	35,80	11,60	2,16	71,60	6,02	C
∅ 70.2	70	2	220	4,27	4,62	24,70	7,05	2,41	49,40	3,35	P
∅ 70.3	70	3	220	6,31	6,73	35,50	10,10	2,37	71,00	4,95	P
∅ 70.4	70	4	220	8,29	8,72	45,30	12,90	2,34	90,60	6,51	C
∅ 75.2	75	2	236	4,58	5,33	30,50	8,15	2,58	61,10	3,60	P
∅ 75.3	75	3	236	6,78	7,78	44,00	11,70	2,54	88,00	5,32	P
∅ 75.4	75	4	236	8,92	10,10	56,30	15,00	2,51	113,00	7,00	P
∅ 80.2	80	2	251	4,90	6,09	37,30	9,33	2,76	74,60	3,85	C
∅ 80.3	80	3	251	7,26	8,90	53,90	13,50	2,72	108,00	5,70	C
∅ 80.4	80	4	251	9,55	11,60	69,10	17,30	2,69	138,00	7,50	C
∅ 90.3	90	3	283	8,19	11,40	77,60	17,30	3,07	155,00	6,43	P
∅ 90.4	90	4	283	10,80	14,80	100,00	22,30	3,04	200,00	8,48	P
∅ 90.5	90	5	283	13,40	18,10	121,00	26,90	3,01	242,00	10,50	P
∅ 100.3	100	3	314	9,14	14,10	108,00	21,50	3,43	215,00	7,17	P
∅ 100.4	100	4	314	12,10	18,40	139,00	27,80	3,39	278,00	9,47	P
∅ 100.5	100	5	314	14,90	22,60	169,00	33,80	3,36	238,00	11,70	P
∅ 100.6	100	6	314	17,70	26,50	196,00	39,30	3,33	393,00	13,90	C
∅ 125.4	125	4	393	15,20	29,30	279,00	44,60	4,28	557,00	11,90	C
∅ 125.5	125	5	393	18,80	36,00	340,00	54,40	4,24	680,00	14,80	C
∅ 125.6	125	6	393	22,40	42,50	398,00	63,70	4,21	796,00	17,60	C
∅ 155.5	155	5	487	23,60	56,20	663,00	85,50	5,30	1.330,00	18,50	C
∅ 155.6	155	6	487	28,10	66,60	781,00	101,00	5,27	1.560,00	22,10	C
∅ 155.8	155	8	487	36,90	86,50	1.000,00	129,00	5,21	2.000,00	29,00	C
∅ 175.5	175	5	550	26,70	72,30	966,00	110,00	6,01	1.330,00	21,00	C
∅ 175.6	175	6	550	31,90	85,70	1.140,00	130,00	5,98	2.280,00	25,00	C
∅ 175.8	175	8	550	42,00	112,00	1.470,00	168,00	5,92	2.940,00	33,00	C
∅ 200.5	200	5	628	30,60	95,10	1.460,00	146,00	6,91	2.920,00	24,00	C
∅ 200.6	200	6	628	36,60	113,00	1.720,00	172,00	6,86	3.440,00	28,70	C
∅ 200.8	200	8	628	48,30	148,00	2.230,00	223,00	6,79	4.460,00	37,90	C

Anexo 5: Perfiles HEB



A = Área de la sección
 S_x = Momento estático de media sección, respecto a X
 I_x = Momento de inercia de la sección, respecto a X
 $W_x = 2I_x / h$: h. Módulo resistente de la sección, respecto a X
 $i_x = \sqrt{I_x / A}$: Radio de giro de la sección, respecto a X
 I_y = Momento de inercia de la sección, respecto a Y
 $W_y = 2I_y / b$: Módulo resistente de la sección, respecto a Y
 $i_y = \sqrt{I_y / A}$: Radio de giro de la sección, respecto a Y
 I_t = Módulo de torsión de la sección
 I_a = Módulo de alabeo de la sección
 u = Perímetro de la sección
 a = Diámetro del agujero del roblón normal
 w = Gramil, distancia entre ejes de agujeros
 h_1 = Altura de la parte plana del alma
 p = Peso por m

Perfil	Dimensiones							Términos de sección										Agujeros			Peso	
	h mm	b mm	e mm	e ₁ mm	r ₁ mm	h ₁ mm	u mm	A cm ²	S _x cm ³	I _x cm ⁴	W _x cm ³	i _x cm	I _y cm ⁴	W _y cm ³	i _y cm	I _t cm ⁴	I _a cm ⁶	w mm	w ₁ mm	a mm		p kg/m
HEB 100	100	100	6.0	10.0	12	56	567	26.0	52.1	450	90	4.16	167	93	2.53	9.34	3.375	55	—	13	20.4	P
HEB 120	120	120	6.5	11.0	12	74	686	34.0	82.6	864	144	5.04	318	53	3.06	14.90	9.410	65	—	17	26.7	P
HEB 140	140	140	7.0	12.0	12	92	805	43.0	123.0	1.509	216	5.93	550	79	3.58	22.50	22.480	75	—	21	33.7	P
HEB 160	160	160	8.0	13.0	15	104	918	54.3	177.0	2.492	311	6.78	889	111	4.05	33.20	47.940	85	—	23	42.6	P
HEB 180	180	180	8.5	14.0	15	122	1.040	65.3	241.0	3.831	426	7.66	1.363	151	4.57	46.50	93.750	100	—	25	51.2	P
HEB 200	200	200	9.0	15.0	18	134	1.150	78.1	321.0	5.696	570	8.54	2.003	200	5.07	63.40	171.100	110	—	25	61.3	P
HEB 220	220	220	9.5	16.0	18	152	1.270	91.0	414.0	8.091	736	9.43	2.843	258	5.59	84.40	295.400	120	—	25	71.5	P
HEB 240	240	240	10.0	17.0	21	164	1.380	106.0	527.0	11.259	938	10.30	3.923	327	6.08	110.00	486.900	90	35	25	83.2	P
HEB 260	260	260	10.0	17.5	24	177	1.500	118.4	641.0	14.919	1.150	11.20	5.135	395	6.58	130.00	753.700	100	40	25	93.0	P
HEB 280	280	280	10.5	18.0	24	196	1.620	131.4	767.0	19.270	1.380	12.10	6.595	471	7.09	153.00	1.130.000	110	45	25	103.0	P
HEB 300	300	300	11.0	19.0	27	208	1.730	149.1	934.0	25.166	1.680	13.00	8.563	571	7.58	192.00	1.688.000	120	50	25	117.0	P
HEB 320	320	300	11.5	20.5	27	225	1.770	161.3	1.070.0	30.823	1.930	13.80	9.239	616	7.57	241.00	2.069.000	120	50	25	127.0	P
HEB 340	340	300	12.0	21.5	27	243	1.810	170.9	1.200.0	36.656	2.160	14.60	9.690	646	7.53	278.00	2.454.000	120	50	25	134.0	P
HEB 360	300	300	12.5	22.5	27	261	1.850	180.6	1.340.0	43.193	2.400	15.50	10.140	676	7.49	320.00	2.883.000	120	50	25	142.0	P
HEB 400	400	300	13.5	24.0	27	298	1.930	197.8	1.620.0	57.680	2.880	17.10	10.819	721	7.40	394.00	3.817.000	120	50	25	155.0	P
HEB 450	450	300	14.0	26.0	27	344	2.030	218.0	1.990.0	79.887	3.550	19.10	11.721	781	7.33	500.00	5.258.000	120	50	25	171.0	P
HEB 500	500	300	14.5	28.0	27	390	2.120	238.6	2.410.0	107.176	4.290	21.20	12.624	842	7.27	625.00	7.018.000	120	45	28	187.0	C
HEB 550	550	300	15.0	29.0	27	438	2.220	254.1	2.800.0	136.691	4.970	23.20	13.077	872	7.17	701.00	8.856.000	120	45	28	199.0	C
HEB 600	600	300	15.5	30.0	27	486	2.320	270.0	3.210.0	171.041	5.700	25.20	13.530	902	7.08	783.00	10.965.000	120	45	28	212.0	C