

UNIDAD ACADÉMICA:

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADOS

TEMA:

DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE DERIVACIÓN DE FUNCIONES EN TERCER AÑO DE BACHILLERTO GENERAL UNIFICADO

Proyecto de Investigación y Desarrollo de Grado previo a la obtención del título de

Magister en Ciencias de la Educación

Línea de Investigación, Innovación y Desarrollo principal:

Pedagogía, Andragogía, Didáctica y/o Currículo

Clasificación técnica del trabajo:

Desarrollo

Autor:

Edwin Xavier Morillo Cadena

Director:

Mario Armando Freire Torres, Mg

Ambato - Ecuador

Agosto 2016

Diseño de una Estrategia Didáctica para la enseñanza de Derivación de funciones en Tercer Año de Bachillerto General Unificado

Informe de Trabajo de Titulación
presentado ante la
Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Sede Ambato

por

Edwin Xavier Morillo Cadena

En cumplimiento parcial
de los requisitos para el Grado de
Magister en Ciencias de la Educación



Departamento de Investigación y Posgrados
Agosto 2016

Diseño de una Estrategia Didáctica para la enseñanza de Derivación de funciones en Tercer Año de Bachillerto General Unificado

Aprobado por:

Varna Hernández Junco, Ph.D.
Presidente del Comité Calificador
Director del DIP

Zandra Elizabeth Altamirano León, Mg
Miembro Calificador

Mario Armando Freire Torres, Mg
Miembro Calificador
Director de Proyecto

Dr. Hugo Altamirano Villaroel
Secretario General

Carlos Ernesto Flores Tapia, Mg
Miembro Calificador

Fecha de aprobación: Agosto 2016

Ficha Técnica

Programa: Magister en Ciencias de la Educación

Tema: Diseño de una Estrategia Didáctica para la enseñanza de Derivación de funciones en Tercer Año de Bachillerto General Unificado

Tipo de trabajo: Proyecto de Investigación y Desarrollo de Grado

Clasificación técnica del trabajo: Desarrollo

Autor: Edwin Xavier Morillo Cadena

Director: Mario Armando Freire Torres, Mg

Líneas de Investigación, Innovación y Desarrollo

Principal: Pedagogía, Andragogía, Didáctica y/o Currículo

Secundaria:

Resumen Ejecutivo

La dificultad que presentan los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado dentro del Sistema Escolar Secundario de la República del Ecuador en la materia de Matemática Superior, en el momento de llevar a cabo una de las más importantes operaciones dentro del Cálculo como lo es la derivación, ha conllevado al diseño e implementación de una estrategia didáctica para enseñar a derivar correctamente funciones compuestas, y en particular, en la enseñanza de la Regla de la Cadena aplicada a funciones compuestas algebraicas y trascendentes. Para el efecto, diseñamos la estrategia didáctica basándonos en el Aprendizaje Basado en Problemas, es decir, desarrollamos problemas matemáticos para mostrar la aplicación de la Regla de la Cadena al derivar funciones compuestas tanto de funciones algebraicas como de funciones trascedentes dentro del aula de clase, luego de efectuado este paso, se comprobaron los resultados obtenidos por los estudiantes empleando de forma combinada el motor de búsqueda computacional WolframAlpha® y el programa geométrico Geogebra®. Posteriormente, para evaluar la efectividad de la estrategia didáctica diseñada, efectuamos un análisis de las calificaciones de los estudiantes antes y después de la implementación de dicha estrategia, y, efectivamente, como se supuso, existió una evidente mejoría en las calificaciones de los estudiantes luego de aplicada la estrategia didáctica.

Declaración de Originalidad y Responsabilidad

Yo, Edwin Xavier Morillo Cadena, portador de la cédula de ciudadanía y/o pasaporte No. 1715147342, declaro que los resultados obtenidos en el proyecto de titulación y presentados en el informe final, previo a la obtención del título de Magister en Ciencias de la Educación, son absolutamente originales y personales. En tal virtud, declaro que el contenido, las conclusiones y los efectos legales y académicos que se desprenden del trabajo propuesto, y luego de la redacción de este documento, son y serán de mi sola y exclusiva responsabilidad legal y académica.

Edwin Xavier Morillo Cadena
1715147342

Dedicado a mis Padres

Luis Morillo y Emma Cadena

a mi Hermano

Diego Morillo

Reconocimientos

Agradezco primeramente a Dios por estar conmigo en cada decisión que he tomado principalmente en continuar preparándome con mis estudios para poder aplicar en mi campo profesional y segundo agradezco el apoyo incondicional brindado por mi padre Luis Morillo, mi madre Emma Cadena, a mi hermano Diego Morillo por el apoyo que ellos siempre me han brindado y a toda mi familia que me apoyaron para continuar con esta meta.

Resumen

El objetivo de este trabajo se enfocará en que el estudiante aplique el uso de la regla de la cadena para derivar funciones, donde se aplicará la estrategia del aprendizaje basado en problemas, es decir, a más de la explicación que el docente realiza mediante la clase demostrativa, se enfocará más en los trabajos en grupo e individuales, en donde se comprobará el trabajo eficaz que realiza el estudiante, y con esto el docente demostrará que los alumnos ponen más énfasis en buscar soluciones a los problemas que se presenten, dando oportunidad al docente de equilibrar los grupos de trabajo con un líder que domine la materia y dos estudiantes más que presenten dificultad en el desarrollo de las aplicaciones; una vez aplicado, el docente podrá evaluar de forma individual para así poder ver si los estudiantes pueden resolver aplicaciones de derivadas de funciones compuestas. Además los estudiantes podrán ayudarse con el uso de las TIC´S, ya que con esto los alumnos van a demostrar más interés por aprender a derivar funciones de cualquier tipo de función, como por ejemplo WolframAlpha permite ir comparando paso a paso el desarrollo de algunos ejercicios; y así ellos se sientan más seguros para el desarrollo de sus aplicaciones. Finalmente, la estrategia busca que los estudiantes que piensan seguir carreras universitarias como en ciencias exactas como en ingeniería no presenten dificultad en la materia de Cálculo Diferencial.

Palabras Clave: regla de la cadena, derivar funciones, estrategia, aplicaciones, ciencias exactas, ingenierías, cálculo diferencial.

Abstract

The objective of this work is for the student to apply the use of the chain rule to calculate the derivative of a function, in which the strategy of problem based learning will be applied; in order words, besides the teacher´s explanation during a class the teacher will focus on team and individual work. This is where the effectiveness of the student´s work will be proven, so the teacher will show how the student emphasize on solving problems, giving the teacher opportunity to balance teamworking with a leader who knows the subject very well and two students who are struggling solving its applications. Once it has been applied, the teacher will be able to assess individually and therefore, to see if the students are able to solve derivatives of composite functions. Furthermore, the students can rely on the use if ICT´S, because they will be more interested at learning the derivative of a function of any kind, for example the Wolfram Alpha that allows the students to compare step by step the development of some mathematics exercises and then, they would feel more comfortable developing them. Finally, the strategy is aiming to avoid any difficulty in differential calculus for the students who think to study exact sciences such as engineering at universities.

Key words: chain rule, derivative of functions, strategy, application, exact sciences, engineering, differential calculus.

Tabla de Contenidos

Ficha Técnica III

Declaración de Originalidad y Responsabilidad IV

Dedicatoria V

Reconocimientos VI

Resumen VII

Abstract VIII

Lista de Tablas XII

Lista de Figuras XIII

CAPÍTULOS

1. Introducción **1**

1.1. Presentación del trabajo 2

1.2. Descripción del documento 3

2. Planteamiento de la Propuesta de Trabajo **5**

2.1. Información técnica básica 5

2.2. Descripción del problema 5

2.3. Preguntas básicas 6

2.4. Formulación de meta 6

2.5. Objetivos 6

2.5.1. Objetivo general 6

2.5.2. Objetivos específicos 6

2.6. Delimitación funcional 7

2.6.1. ¿Qué será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación? 7

2.6.2. ¿Qué no será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación? . . 7

3. Marco Teórico **8**

3.1. Definiciones y conceptos 8

3.1.1. Cálculo 9

3.1.2. Historia de la Derivada 9

3.1.3. ¿Qué es la derivada? 10

3.1.4. Importancia de las Derivadas de Funciones 14

3.1.5. Didáctica de la Matemática 14

3.1.6. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) . . . 15
3.1.7. Diferencias entre el Aprendizaje Basado en Problemas y la Enseñanza Tradicional en la Matemática . . . 16
3.1.8. Etapas del Aprendizaje Basado en Problemas . . . 17
3.1.9. Funciones del Docente y del Alumno . . . 17
3.1.10. Evaluación del Aprendizaje Basado en Problemas . . . 18
3.2. Estado del Arte . . . 19
3.2.1. Propuestas Didácticas para Introducir la Derivada . . . 22
3.2.2. El Desarrollo de la Comprensión de la Regla de la Cadena . . . 22
4. Metodología . . . 23
4.1. Diagnóstico . . . 23
4.1.1. Evaluación 1 . . . 23
4.2. Método(s) aplicado(s) . . . 24
4.2.1. Desarrollo del Proceso de ABP con los Alumnos . . . 24
4.2.2. Función Compuesta . . . 26
4.2.3. Derivada de Función Compuesta . . . 28
4.3. Materiales y herramientas . . . 33
4.3.1. Geogebra . . . 33
4.3.2. WolframAlpha . . . 39
4.3.3. Evaluación en el Internet . . . 42
5. Resultados . . . 44
5.1. Evaluación preliminar . . . 44
5.2. Análisis de resultados . . . 45
5.2.1. Análisis de la Encuesta Realizados a los Estudiantes de Tercero de Bacillerato General Unificado . . . 47
5.3. Resultados de antes y después de aplicar la estrategia didáctica . . . 59
6. Conclusiones y Recomendaciones . . . 63
6.1. Conclusiones . . . 63
6.2. Recomendaciones . . . 64

APÉNDICES

Apéndice A. — Aplicaciones de Derivadas de Funciones . . . 65

REFERENCIAS . . . 69

Apéndice B. — Evaluación 1 . . . 70

Apéndice C. — Evaluación 2 . . . 73

Apéndice D. — TABLA PARA DERIVAR FUNCIONES 76

Apéndice E. — Rúbricas de Evaluación 77

Apéndice F. — Encuesta 79

Lista de Tablas

1. Contenido Precedente a la Derivada en los textos de Cálculo Diferencial 13
2. Diferencia Enseñanza Tradicional y el ABP 16
3. Funciones del Docente y Alumno 18
4. Parámetros de Evaluación 23
5. Evaluación de Derivadas de Funciones Compuestas 24
6. Evaluación para Derivar Funciones en General 45
7. Clase mediante exposición oral 47
8. Clase mediante presentación de diapositivas 48
9. Solución de Aplicaciones y Demostraciones 49
10. Uso de Software Matemático. 50
11. Retroalimentación de los conocimientos aprendidos. 51
12. Diálogos para intercambiar ideas entre estudiantes. 52
13. Organización de grupos de trabajo. 53
14. Discusiones entre los grupos de trabajo. 54
15. Uso de materiales (computador, libros, entre otros). 55
16. Trabajos en forma independiente. 56
17. Trabajos extraescolares. 57
18. Procedimientos escritos (lecciones escritas, participación en clase, trabajos de refuerzo). 58
19. Aplicaciones recta tangente y recta normal. 65
20. Aplicaciones con las reglas de derivación. 65
21. Aplicaciones de derivadas con funciones compuestas. 66
22. Aplicaciones de derivadas con funciones trigonométricas. 66
23. Aplicaciones de derivadas con funciones exponenciales y logarítmicas. 67
24. Aplicaciones de derivadas con funciones trigonométricas inversas. 68
25. Reglas para Derivar Funciones. 76
26. Lecciones escritas 77
27. Evaluaciones Sumativas y Examen Quimestral 77
28. Trabajos Académicos Independientes (Tareas Extra escolares) 77
29. Actividad Grupal en Clase 78
30. Actividad Individual en Clase 78

Lista de Figuras

1. Derivadas 8
2. Interpretación gráfica de la derivada de la función en un punto dado 11
3. Derivada de una función en un punto dado 13
4. Evolución del Aprendizaje Basado en Problemas 17
5. Proceso del Aprendizaje Basado en Problemas 25
6. Función Compuesta. 27
7. Representación Gráfica de Función Compuesta. 28
8. Ejemplo de Función Compuesta. 29
9. Pantalla Principal de Geogebra. 34
10. Ecuación de la Recta Tangente en Geogebra. 35
11. Derivada de una Función Compuesta. 36
12. Derivada de una Función Exponencial. 37
13. Derivada de una Función Trigonometrica. 38
14. Pantalla Principal de WolframAlpha. 39
15. Ejemplo de Derivada en WolframAlpha. 40
16. Derivada Compuesta en WolframAlpha 1. 41
17. Derivada Compuesta en WolframAlpha 2. 42
18. Evaluación a través del EDMODO 43
19. Evaluación a los Estudiantes - Prueba Piloto 1. 44
20. Evaluación a los Estudiantes - Prueba Piloto 2. 46
21. Pregunta 1. 47
22. Pregunta 2. 48
23. Pregunta 3. 49
24. Pregunta 4. 50
25. Pregunta 5. 51
26. Pregunta 6. 52
27. Pregunta 7. 53
28. Pregunta 8. 54
29. Pregunta 9. 55
30. Pregunta 10. 56
31. Pregunta 11. 57
32. Pregunta 12. 58

33. Calificaciones antes y después de la aplicación de la estrategia didáctica 62

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo se originó con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en el temario de Derivadas de Funciones, para esto, elaboramos una estrategia didáctica destinada a la comprensión de definiciones, uso de propiedades y en especial el manejo de la Regla de la Cadena; con la aplicación de la Estrategia Didáctica, los estudiantes pudieron desarrollar un progreso continuo y perenne en la resolución de problemas y como consecuencia de esto, los educandos se volvieron unos aprendices exitosos alcanzando el dominio de su propio aprendizaje, logrando además despertar en ellos la necesidad de fortalecer sus conocimientos con la finalidad de resolver los retos difíciles que se les presentarán durante la resolución de problemas matemáticos especialmente cuando quieran obtener la correcta derivada de una función compuesta.

El aprendizaje del Cálculo Diferencial para los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado es una de las ventajas que presenta la malla curricular, ya que los estudiantes desarrollarán un pensamiento lógico y crítico en el momento de resolver problemas matemáticos que demanden un alto conocimiento en Análisis Matemático. La derivada es un concepto fundamental para el estudio de la Matemática, se le considera como una de las herramientas más poderosas y a la vez muy difícil de entender si no se conoce a profundidad su definición, es por esa razón que la comprensión de la noción de derivada de funciones presenta dificultades para los estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado.

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje buscamos desarrollar la capacidad analítica de los estudiantes mediante la implementación de una estrategia didáctica que optimice las capacidades y competencias al momento de plantear, solucionar y analizar los diversos problemas que aparecen especialmente en derivación tanto para funciones algebraicas como para funciones trascendentes; ya que el concepto de derivada es de tal importancia que ciencias tales como la Física, Estadística, Biología, Economía, entre otras, utilizan sus definiciones y teoremas para desarrollar sus propias y correspondientes teorías. Con éste estudio de las derivadas de funciones, es obligatorio para los estudiantes de Bachillerato que quieran aspirar continuar con sus estudios universitarios principalmente en las carreras de ciencias, ingeniería, economía o contabilidad; ya que les permitirá apropiarse de sus elementos básicos y prepararlos para sus estudios universitarios.

Para solucionar este problema, en este trabajo se analizaron algunos de los problemas que surgen en estas aplicaciones y en lo fundamental, se llegó al planteamiento de una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Tercer Año de Bachillerato General Unificado, con el propósito de proporcionar a los estudiantes los elementos esenciales que les faciliten a comprender el concepto de derivada.

1.1. Presentación del trabajo

i) El objetivo general de esta propuesta consiste en el diseño e implementación de una estrategia educativa, cuya principal finalidad fue el desarrollo del aprendizaje significativo en los estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado con respecto al tema de derivación, es decir, se estableció la conexión entre el conocimiento previo de composición de funciones algebraicas y trascendentes con el concepto de la Regla de la Cadena, tanto desde el punto de vista analítico como desde el punto de vista gráfico.

ii) Uno de los aspectos importantes del estudio de la derivada de una función reside en que el estudiante pueda determinar que la pendiente de la recta tangente a una curva determinada en un punto representa la rapidez de cambio instantáneo, es decir, mientras mayor es la inclinación de la recta tangente en un punto, mayor será la rapidez de cambio del valor de la función en las proximidades del punto. Además los estudiantes podrán aplicar las diversas reglas de derivación para obtener dicha derivada y en especial para funciones trascendentes compuestas, los alumnos podrán aplicar el uso de la necesaria Regla de la Cadena para facilitar el proceso de derivación.

iii) La estrategia que se utilizó para el presente trabajo está basado en el Aprendizaje Basado en Problemas, para el efecto, los estudiantes fueron los protagonistas del aprendizaje, es decir, ellos trabajaron en forma grupal para generar soluciones a los problemas planteados mediante una lluvia de ideas para luego, juntar sus criterios y finalmente llegar a la resolución de cualquier problemática presentada en el aula y en las tareas escolares. Con esto finalmente se pretende que los estudiantes que presentan una mayor dificultad puedan reforzar los conocimientos impartidos en clases y de esa manera, el Docente pueda también evaluarlos en forma individual, ya sea con talleres y evaluaciones escritas.

iv) Luego de aplicada la estrategia didáctica, se pudo evidenciar desde el punto de vista estadístico una mejoría en el aprendizaje de los estudiantes con respecto a la derivación de funciones, es decir, se logró trabajar eficientemente con los estudiantes en el aula de forma grupal para que cada uno de ellos puedan resolver cualquier problema, esto se lo evidenció una vez efectuados

los talleres y las evaluaciones escritas.

1.2. Descripción del documento

i) En el primer capítulo, se presenta una breve introducción, enfocándose principalmente en el hecho de que los estudiantes se deben convertir en aprendices exitosos que logren alcanzar un auto aprendizaje continuo con respecto a la temática de la derivación de funciones compuestas. También se presentará la descripción del problema donde se explica la temática y se detalla además la estrategia a utilizar en este proyecto.

ii) En el segundo capítulo, se presenta la información básica, tales como: el tema, el tipo de trabajo y las líneas de investigación, innovación y desarrollo. También se presenta la descripción del problema que surge con los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en el momento de derivar funciones, principalmente cuando se involucra la noción de derivada a través de la expresión analítica y en el no manejo del uso de la Regla de la Cadena o a través de su interpretación gráfica. Se contestan las preguntas básicas que nos ayudarán a resolver este problema y poder estructurar de mejor manera la estrategia didáctica. Se plantean el objetivo general y los objetivos específicos para poder cumplir este trabajo. En este capítulo, adicionalmente, se plantean diferentes puntos de vista con respecto a la capacidad para manejar el producto final, es decir, establecer el como los estudiantes comprenden los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, con esto último se pretende que los estudiantes no presenten dificultad en esta área de la Matemática, principalmente para los estudiantes que aspiran seguir en carreras universitarias que se relacionen con ciencias exactas.

iii) En el tercer capítulo, se presenta el Marco Teórico en el que se basa el proyecto, en el mismo se presentan definiciones y conceptos sobre la derivada de funciones, la historia de la derivada, la importancia de la derivada, la conceptualización sobre la estrategia a aplicarse en nuestro caso el Aprendizaje Basado en Problemas y el Estado del Arte sobre la temática investigada.

iv) En el cuarto capítulo, se presenta la Metodología que se aplicó en este proyecto, es decir, el mecanismo que se usó para dar solución a este problema que presentan los estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado en no poder obtener con claridad la derivada de funciones compuestas, el mismo está basado en los parámetros de evaluación que presenta el Ministerio de Educación de la República del Ecuador para esta sección y con esto se podrá identificar con claridad el momento en el cual se les dificulta más a los estudiantes en el instante de hallar las derivadas de las funciones compuestas. El método aplicado derivado de la estrategia didáctica consiste básicamente en que los estudiantes dominen bien la definición de

la Regla de la Cadena y puedan aplicarla en la parte práctica para cualquier tipo de función a derivar y como estrategia de refuerzo se utilizaron herramientas Informáticas tales como Geogebra en el que le permitió al estudiante comparar resultados como visualizar la parte gráfica y como herramienta más completa se usó el meta buscador denominado WolframAlpha en donde también se podrá comparar resultados y además una de las ventajas de esta herramienta es que esta aplicación permite resolver paso a paso los ejercicios y también presenta la parte gráfica para su interpretación.

v) En el quinto capítulo, se presenta el análisis de los resultados y comparaciones de los resultados tabulados, en este caso, con las evaluaciones realizados a los estudiantes en el temario de derivadas de funciones.

vi) Finalmente en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones y recomendaciones que se aplican luego del desarrollo de este proyecto para la elaboración de esta propuesta que es el diseño de la estrategia didáctica.

Capítulo 2

Planteamiento de la Propuesta de Trabajo

2.1. Información técnica básica

Tema: Diseño de una Estrategia Didáctica para la enseñanza de Derivación de funciones en Tercer Año de Bachillerto General Unificado

Tipo de trabajo: Proyecto de Investigación y Desarrollo de Grado

Clasificación técnica del trabajo: Proyecto de Investigación y Desarrollo de Grado

Líneas de Investigación, Innovación y Desarrollo

Principal: Pedagogía, Andragogía, Didáctica y/o Currículo

Secundaria:

2.2. Descripción del problema

El diseño e implementación de una estrategia educativa surge por la dificultad que tienen los estudiantes de educación secundaria en su último año de estudios según los lineamientos curriculares en no aplicar correctamente la definición de derivada y además en no lograr el dominio en el uso de la Regla de la Cadena para determinar la derivada de funciones compuestas de dos o más funciones trascendentales.

Debido a esta problemática, se pretende diseñar una estrategia didáctica para que los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado no presenten dificultad en derivar funciones y la importancia de este aspecto se evidencia sobre todo sabiendo que la derivación de funciones es un requisito fundamental para que los estudiantes puedan continuar con sus estudios universitarios principalmente en carreras de Ingeniería y Ciencias Exactas, sin embargo el tratamiento que se le da a este concepto generalmente se apunta principalmente en el manejo de fórmulas y métodos algebraicos generales, esta situación puede provocar deficiencias en los estudiantes para reconocer y manipular este concepto matemático en contextos matemáticos más avanzados.

En sí, el principal problema que surge con los estudiantes del Tercero de Bachillerato General Unificado en derivar funciones es precisamente en manejar el significado de la noción de derivada a través de su definición como límite, en no interpretar bien el manejo del uso de la Regla de la Cadena

o a través de su interpretación geométrica, con la ayuda de esta estrategia didáctica se mejora la comprensión de los estudiantes para que tengan una buena formación en este concepto matemático.

2.3. Preguntas básicas

¿Cómo aparece el problema que se pretende solucionar? No aplica.

¿Por qué se origina? Se origina porque no se tiene claro la parte conceptual, el análisis de una función y la interpretación gráfica de funciones; se produce además la dificultad en el alumno de no comprender la definición de la derivada, el uso de la Regla de la Cadena para funciones trascendentes y/o a través de la interpretación gráfica.

¿Qué lo origina? No aplica.

¿Cuándo se origina? Cuando no se tiene claro la noción de derivada y además no se tiene claro la definición del uso de la Regla de la Cadena.

¿Dónde se origina? Se origina en la derivación de funciones trascendentes compuestas.

¿Dónde se detecta? Principalmente se detecta a los estudiantes que tienen que aplicar la Regla de la Cadena en el instante de derivar funciones trascendentes compuestas.

2.4. Formulación de meta

Que los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado posean las habilidades necesarias y suficientes para que puedan derivar funciones trascendentes compuestas de manera correcta mediante el uso de la Regla de la Cadena.

2.5. Objetivos

2.5.1. Objetivo general

Diseñar una Estrategia Didáctica para la enseñanza de derivación de funciones destinada a estudiantes del Tercer Año de Bachillerato General Unificado.

2.5.2. Objetivos específicos

1. Diagnosticar el nivel de manejo del concepto de derivada de funciones trascendentes compuestas.
2. Fundamentar la Estrategia Didáctica en base al constructivismo.
3. Construir los elementos de la Estrategia Didáctica para que contenga un grado de aplicabilidad y habilidad antes, durante y después de su desarrollo.

2.6. Delimitación funcional

2.6.1. ¿Qué será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación?

- Que los estudiantes comprendan los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales dentro de la conceptualización de la derivada de funciones trascendentes compuestas.
- Que los estudiantes, a través de la Estrategia Didáctica logren interpretar correctamente el concepto de derivada a través del uso de la Regla de la Cadena y a través de la interpretación gráfica, ya sea de forma analítica o mediante la utilización de paquetes informáticos especializados.
- Que con la estrategia didáctica, los profesores detecten a los estudiantes que no entiendan el problema a resolver y para de esta forma, estar atento a las discusiones evidenciadas en los grupos de trabajo.
- Que con la Estrategia Didáctica, se busque que los estudiantes al finalizar el último año de Bachillerato General Unificado no presenten dificultades, sobre todo a aquellos que aspiran ingresar a carreras universitarias tanto en ciencias exactas como en ingenierías.
- Que con la Estrategia Didáctica, se busque la motivación de los estudiantes en la materia de Matemática Superior en el temario de derivadas de funciones, a comprender principalmente la definición y el uso correcto de la Regla de la Cadena, para que no presenten dificultades en sus estudios posteriores dentro de la Universidad.

2.6.2. ¿Qué no será capaz de hacer el producto final del trabajo de titulación?

No aplica.

Capítulo 3

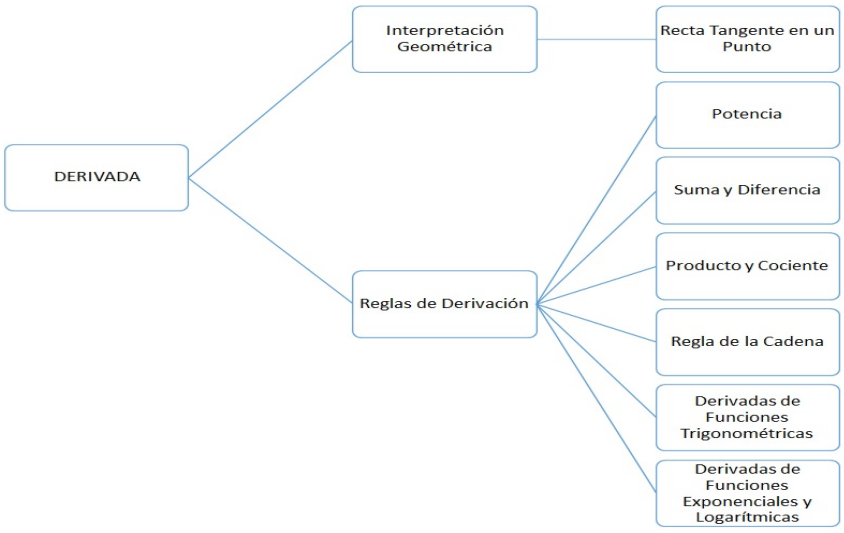
Marco Teórico

3.1. Definiciones y conceptos

Con el propósito de cumplir con los objetivos mencionados anteriormente, diseñamos un material con una serie de problemas cuidadosamente establecidos con la finalidad de realizar el estudio referente al concepto de la derivada y algunos conceptos asociados a la misma, como lo es el valor de la derivada de la función en un punto dado en el plano, el uso de las reglas de derivación, el manejo de la Regla de la Cadena, entre otros; para este trabajo tomamos en cuenta al Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como Estrategia Didáctica, debido a que esta metodología nos permite interactuar con las habilidades individuales mediante la integración de grupos de trabajo, es decir, el ABP produce la interacción entre los estudiantes aumentando algunas habilidades y competencias tales como: el trabajo dinámico en los grupos, la coevaluación entre compañeros y principalmente la defensa de sus trabajos en clase.

A continuación se mostrará en resumen el contenido sobre Derivada de Funciones que los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado deben dominar.

Figura 1: Derivadas



Mapa conceptual del estudio de la derivada
Fuente: Elaboración Propia

3.1.1. Cálculo

El Cálculo según [7] es la parte de la Matemática que se encarga de los estudios de los incrementos de las variables, pendientes de curvas, valores máximos y mínimos de funciones y de la determinación de longitudes, áreas y volúmenes; y se le considera un tema muy extenso y extremadamente útil principalmente para las carreras de Ciencias Exactas e Ingenierías.

Cabe mencionar que el Cálculo nace con la necesidad de lograr la comprensión y el entendimiento de ciertas cosas tales como los fenómenos de la Astronomía, la Astrofísica, la Mecánica Clásica y la Óptica Geométrica.

En la actualidad podemos encontrar al Cálculo introducido en diferentes áreas del conocimiento humano concerniente al estudio de los seres humanos y de la naturaleza: en la Economía, en la Física, en la Biología, en la Química, y en otras ramas esenciales de la Matemática, es decir, podemos concluir que el Cálculo es parte fundamental en nuestra vida y que muchas veces lo usamos sin siquiera saberlo.

3.1.2. Historia de la Derivada

Según la Historia de las Matemáticas, fueron cuatro los aspectos fundamentales que motivaron a la invención del Cálculo:

1. Determinación de la velocidad y aceleración de un cuerpo.
2. Determinación de longitudes, áreas y volúmenes por definidos por lineas curvas.
3. Determinación de puntos máximos y mínimos en la gráfica de una función en particular.
4. Determinación del valor de la pendiente de la recta tangente en un punto dado.

Según [3], Sir Isaac Newton, se encargó del estudio de los lugares geométricos definidos por las ecuaciones algebraicas, en donde se descubrió el método para hallar máximos y mínimos de funciones. Además descubrió el método para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva que fue antecedente del concepto de la Derivada, la ecuación para determinar la pendiente de la recta tangente es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.1}$$

Adicionalmente, [12] afirma que las cantidades y razón de cantidad, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales", es decir, el límite de una función o "el de la derivada" propiamente dicha, le dio más énfasis al desarrollo de las

tangentes a las curvas, se trataba de un método inverso al de hallar las áreas y volúmenes a través de sumas. Por otro lado, Gottfried Leibniz ofreció las reglas de las derivadas como resultados de la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones utilizando la notación con diferenciales, como se las pude ver a continuación:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x).\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x).\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x).\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \tag{3.5}$$

3.1.3. ¿Qué es la derivada?

La derivada de una función se la define como el límite de la rapidez con la que cambia la función en cierto intervalo, es decir, el intervalo que es elegido como variable independiente se vuelve cada vez más pequeño.

Se puede relacionar las derivadas con las demás ciencias tales como:

1. Con respecto a la Mecánica Clásica se puede obtener la velocidad y aceleración instantánea.

2. Con respecto a la Química se puede obtener la concentración de algunas sustancias en función al tiempo.

3. Con respecto a la Economía se puede encontrar en la resolución de costos marginales, ingresos marginales y utilidades marginales, también la podemos encontrar en problemas de optimización.

4. Con respecto a la Geometría le permite ayudar a encontrar áreas y volúmenes.

5. También es posible usar derivadas en Biología, Psicología y Sociología, dado que nos ayuda a representar el cambio de una variable con respecto a otra variable.

En sí, la definición de la derivada de la función es un concepto principal dentro del Cálculo y se la define como el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente tiende a cero, es decir, en simbología matemática, tenemos:

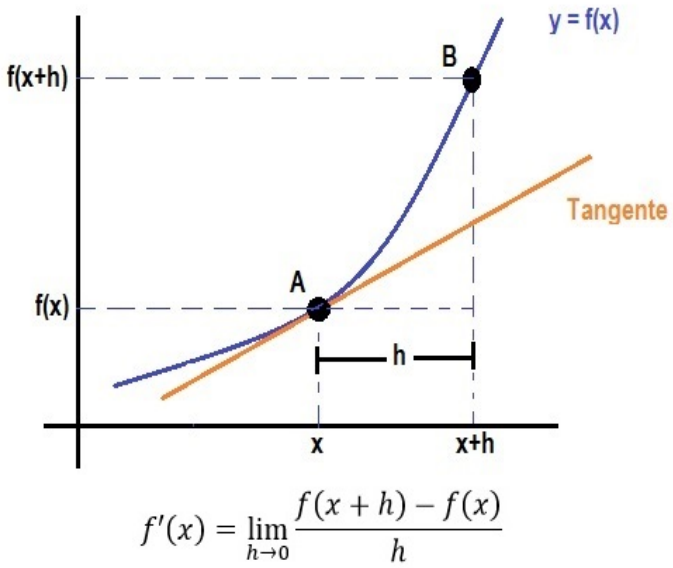
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.6}$$

Esta definición se la puede aplicar con el fin de obtener la derivada de una función utilizando el concepto de límite, principalmente para las funciones algebraicas se la puede visualizar y representar mediante gráficas, en donde se puede construir una función $y = f(x)$ y el punto $A = (x, f(x))$ y

el punto $B = ((x + h), f(x + h))$ y con esto conseguir la recta tangente de la curva en el punto A, partiendo de una recta secante de la curva en los puntos A y B.

A continuación mostraremos en el sistema de coordenadas la interpretación gráfica de la derivada de una función aplicada en un punto dado.

Figura 2: Interpretación gráfica de la derivada de la función en un punto dado



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada
Fuente: Elaboración Propia

Como ejemplo, podemos calcular la derivada de una función polinómica $f(x)$ en un punto dado y además encontrar la ecuación de la recta tangente en ese punto con su gráfica respectiva, tenemos la siguiente función:

$$f(x) = x^2 + 3 \tag{3.7}$$

Y requerimos encontrar la derivada de la función en el punto:

$$P = (1, 4) \tag{3.8}$$

De la definición de la derivada se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.9}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 + 3] - [x^2 + 3]}{h} \tag{3.10}$$

Luego de analizar los signos de agrupación y reducir términos semejantes se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \tag{3.11}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \tag{3.12}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h)}{h} \tag{3.13}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} (2x + h) \tag{3.14}$$

$$f'(x) = \ 2x \tag{3.15}$$

Además como determinar la ecuación de la recta tangente, se sabe que la derivada representa la pendiente de la recta tangente y tenemos que $m = f'(1) = 2$. Por tanto, para determinar la ecuación de la recta tangente se usa la ecuación de la recta Punto-Pendiente, es decir, sustituimos en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ y nos queda:

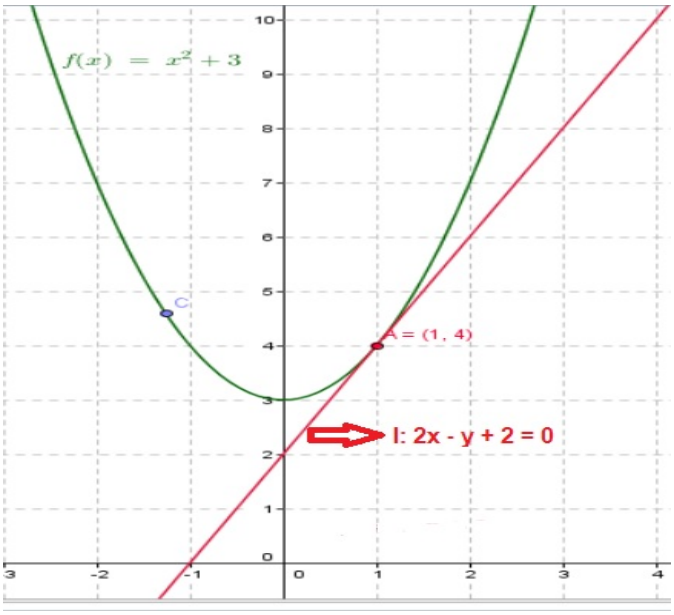
$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{3.16}$$

$$y - 4 = 2(x - 1) \tag{3.17}$$

$$2x - y + 2 = 0 \tag{3.18}$$

Finalmente en este ejemplo debemos graficar la función y también señalar la recta tangente en la misma gráfica para hacer una comparación visual de las dos gráficas.

Figura 3: Derivada de una función en un punto dado



Función y recta tangente en un punto dado.
Fuente: Elaboración Propia

Para algunos autores de varios textos que tratan acerca de la temática de la derivada, la conceptualizan de la siguiente manera:

Tabla 1: Contenido Precedente a la Derivada en los textos de Cálculo Diferencial

GRANVILLE W. A. (2009)	**ANFOSSI (1991)**	**AYRES F. JR. (1989)**
Incrementos	Incrementos	Incrementos
Comparación de incrementos	Derivada	Derivada en un punto
Derivada de una función	Operaciones para la derivación	Cálculo de Derivadas
Notación para derivadas	Cálculo de derivadas	Interpretación geométrica
Regla general	Representación geométrica	
Cálculo de derivadas	Aplicación	
Interpretación Geométrica		

Fuente: Elaborado por Dolores Flores

Además las derivadas de no todas las funciones son tan fáciles de hallar mediante la utilización de la definición de la derivada mediante el uso del límites, para el efecto, y como alternativa principal tenemos a la Regla de la Cadena sobre todo cuando se presentan funciones compuestas de origen trascendental.

3.1.4. Importancia de las Derivadas de Funciones

Las derivada de una función es de gran importancia para la investigación en diferentes ramas de saber, con ellas es posible realizar una gama de estudios dentro de los campos de la relatividad, la mecánica, la ingeniería, las ecuaciones diferenciales, la teoría de las probabilidades, el análisis matemático y la informática.

Para los estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado hoy en día no les interesa este importante herramienta del Cálculo, esto es causado debido al desconocimiento de las reglas de derivación más , sin embargo para los expertos son esenciales ya que pueden comprender la realidad en la cual los humanos se desarrollan día a día.

Por medio de las derivadas, la información que usan los científicos es concreta, directa y científica. Dan información acerca de muchos temas en los cuales está inmerso el ser humano, y pueden explicar fenómenos como el vuelo de un avión o con la construcción de un edificio. Si no se usaran derivadas probablemente todas estas situaciones serian inexplicables.

3.1.5. Didáctica de la Matemática

La Didáctica de la Matemática es la parte de la Matemática que ayuda a los estudiantes a lograr el entendimiento pleno de los problemas matemáticos, así como también ayuda a la resolución de los mismos.

Una de las experiencias sobre la Didáctica realizada por [5] presenta una línea de investigación que permite profundizar el estudio de los contenidos matemáticos, siendo los siguientes:

1. Los procesos cognitivos que intervienen en el proceso de aprendizaje de los estudiantes se encuentran en progreso justo en los años superiores de colegiatura, este es el caso de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado, en donde ellos ya se encuentran en plenas condiciones de analizar, conceptualizar, definir, demostrar y visualizar cuestiones de índole matemática.

2. El uso de las TIC'S y las calculadoras gráficas pueden aplicarse en la enseñanza-aprendizaje de algunos conceptos importante en la Matemática, las mismas constituyen herramientas de vital importancia para que los estudiantes puedan comprobar los resultados obtenidos de las derivadas de las funciones obtenidas con el papel y el lápiz. Con esto, los docentes también están en la capacidad de realizar evaluaciones y controles en el manejo de estas herramientas tecnológicas que conforman un excelente complemento a las clases impartidas en el aula de clase.

3.1.6. Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una estrategia didáctica que se enfoca en el aprendizaje y en la investigación en el aula de clase, para que de esta forma, los alumnos puedan resolver los diferentes problemas que proponen los docentes.

Diferentes autores definen al Aprendizaje Basado en Problemas como:

Según [4] se define al ABP como una metodología en donde el protagonista del aprendizaje es el alumno y también se la define como una estrategia eficaz y flexible; además enfatiza la resolución de los problemas, toma de decisiones y lo principal, el trabajo en equipo.

Una de las técnicas del Aprendizaje Basado en Problemas es la realización de trabajos en equipos y trabajos individuales en el aula para que los estudiantes se acostumbren a trabajar de una manera colaborativa con el propósito último de dilucidar cualquier tipo de problemas de derivación de funciones.

3.1.6.1. Estrategias Grupales

Con las estrategias grupales diseñadas con un máximo de tres estudiantes por grupo en el aula, los estudiantes mantienen un ambiente de participación activa, en donde se les permite desarrollar un trabajo colaborativo constante con el fin de resolver correctamente todos los problemas planteados por el profesor en el aula de clase.

Como señala [4], las estrategias didácticas facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje de los profesores para con los alumnos, ya que brindan aportaciones para cada equipo de trabajo, empleando su propia creatividad e ingenio y lo principal fortaleciendo los conocimientos con los compañeros que presentan algunas dificultades en el procesos de aprendizaje.

Para lograr un buen aprendizaje los estudiantes con los trabajos en equipo deben considerar los siguientes puntos:

1. Cada grupo de trabajo debe familiarizarse con los diferentes problemas planteados por el docente.

2. Cada grupo de trabajo debe buscar posibles estrategias de solución con aportes basados en diferentes ideas.

3. Cada grupo debe reflexionar sobre las soluciones encontradas y sobre el proceso de resolución.

4. Los coordinadores de cada equipo de trabajo deben dar cuenta de los procesos y logros obtenidos con respecto a los problemas planteados.

3.1.6.2. Trabajos Individuales

Estos trabajos son asignados a los estudiantes de forma individual por cada docente mediante la asignación de una tarea o actividad a desarrollarse diariamente, esta puede ser realizada en el aula o enviada a casa como tarea escolar.

La mayor parte de las tareas que son enviadas por los docentes a los estudiantes deben en lo posible ser trabajadas en el aula para que así los alumno tengan la facilidad de consultar al docente las inquietudes que tengan en ese instante, recordando principalmente que este campo se lo considera un temario muy esencial para la continuidad de sus estudios universitarios.

Con esta actividad el docente tendrá la facilidad de analizar individualmente las dificultades que presenta cada estudiante y así poder tomar las acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. [4]

3.1.7. Diferencias entre el Aprendizaje Basado en Problemas y la Enseñanza Tradicional en la Matemática

El ABP se diseña como un medio para que los estudiantes logren los conocimientos necesarios y suficientes con la finalidad de que los empleen para dilucidar el problema y además desarrollen sus habilidades de investigación, ya que en el proceso de aprendizaje debe de lograrse además que los alumnos analicen y evalúen la solución por ellos encontrada.

A continuación se mostrará una tabla comparativa sobre el ABP y la Enseñanza Tradicional como estrategias didácticas para la enseñanza de las Matemáticas con especial atención en la enseñanza-aprendizaje de derivación de funciones.

Tabla 2: Diferencia Enseñanza Tradicional y el ABP

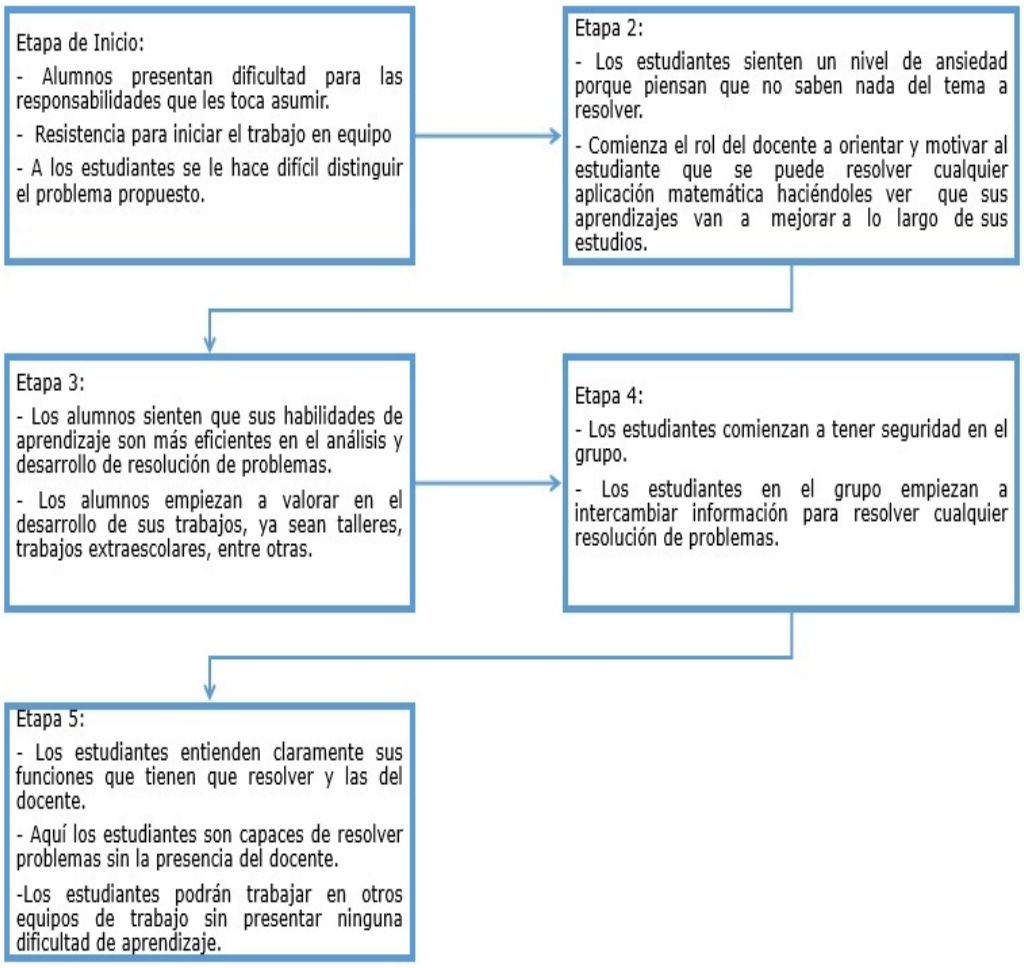
Enseñanza Tradicional	**ABP**
El proceso de enseñanza-aprendizaje está centrado en el docente	El proceso de enseñanza-aprendizaje está centrado en el estudiante
Los estudiantes trabajan en forma individual	Los estudiantes trabajan en forma grupal e individual
Los estudiantes aprenden de solo de memoria los contenidos y las definiciones	Los estudiantes razonan las definiciones y contenidos
Los ejercicios que se trabajan en clases son hasta cierto punto irreales	Los ejercicios que se trabajan en clases se relacionan con la vida real

Fuente: Elaboración propia.

3.1.8. Etapas del Aprendizaje Basado en Problemas

Para conseguir que los estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado resuelvan problemas matemáticos relacionados con la derivación de funciones, se procede a estructurar una secuencia de etapas para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje que utiliza esta estrategia que es el de Aprendizaje basado en problemas, el cual se muestra a continuación :

Figura 4: Evolución del Aprendizaje Basado en Problemas



Etapas del Aprendizaje basado en problemas.
Fuente: Elaboración Propia

3.1.9. Funciones del Docente y del Alumno

A continuación se presentan las funciones del docente y del alumno:

Tabla 3: Funciones del Docente y Alumno

Docente	Alumno
Da importancia al alumno en la construcción de su aprendizaje.	Toma responsabilidad frente el aprendizaje.
Hace valer los logros que consiguen sus alumnos.	Trabajan en diferentes grupos para solucionar los problemas planteados.
Es un facilitador del aprendizaje que acude a los alumnos para brindar su ayuda	Tener una actitud hacia el intercambio de ideas con los compañeros.
Ayuda a sus alumnos a que piensen críticamente orientado a sus reflexiones y a cuestiones importantes.	Ser autónomo en el aprendizaje, debe pedir ayuda y orientación para no presentar dificultades.
Realiza sesiones de tutoría con los alumnos.	Dispone de las estrategias necesarias para planificar, controlar y evaluar los pasos para llevar a cabo su aprendizaje.

Fuente: Universidad Politécnica de Madrid.

3.1.10. Evaluación del Aprendizaje Basado en Problemas

El docente busca las diferentes maneras para evaluar al estudiante enfocándose al Aprendizaje Basado en Problemas, es decir, el docente podrá evaluar con:

1. Examen escrito al finalizar el quimestre:

Las preguntas deben de diseñarse de manera estructurada, es decir, con opción múltiple, enlace, resolución de problemas, entre otras.

2. Lecciones escritas:

Estas actividades están destinadas para descubrir si los estudiantes tienen la habilidad de resolver en lecciones escritas problemas similares a los propuestos tanto en clase como con las tareas escolares.

3. Talleres Grupales e Individuales:

Aquí se verá si el estudiante tiene la capacidad de aplicar las habilidades aprendidas durante la clase y además el estudiante tiene la posibilidad de utilizar su cuaderno de clase como material de refuerzo.

4. Exposiciones:

Aquí el docente podrá ver en forma individual las habilidades que presenta cada estudiante frente a las resolución de problemas.

En sí todas estas evaluaciones se puede hacer uso de las Rúbricas de Evaluación estructuradas por el docente, la misma que se detalla en los Anexos.

3.2. Estado del Arte

Se ha llevado a cabo una investigación por [5] acerca del proceso de aprendizaje del concepto de derivada de una función, deteniéndose en el análisis de los perfiles cognitivos de los estudiantes y de su evolución a lo largo del proceso de aprendizaje. Es así que se ha construido un modelo que incorpora concepciones correctas tanto de la noción de velocidad instantánea como el de la tasa instantánea de variación y, por tanto, resuelven satisfactoriamente situaciones problemáticas. Realmente los métodos son diversos pero se debe tener en cuenta que para aplicar estos conceptos se debe usar correctamente las matemáticas algebraicas y el concepto de límite para alcanzar a desarrollar el cálculo diferencial. La Enseñanza de la Derivada afirma que la enseñanza del concepto de la Derivada ha sido marcada por dos tendencias:

1. Se desarrolla el enfoque clásico formal bajo la estructura del análisis matemático para finalmente buscar sus aplicaciones.

2. Se busca el desarrollo del pensamiento matemático desde la resolución de problemas de modo que los conceptos básicos se forman a partir de la resolución de los mismos, como el problema de la tangente, razón de cambio y significado físico [17]

En base a los antecedentes de la derivada entre los textos usuales mencionan una vía numérica y algebraica en la construcción del concepto de la derivada de funciones, para finalmente dar su interpretación gráfica por los programas que proponen como vía la de las razones de cambio o la vía geométrica en su proceso de formación. En la mayoría de los textos, la definición de la derivada es visualizado por medio de un ejemplo específico en donde se utilizan las aproximaciones numéricas de los incrementos, donde se analiza de cocientes del incremento de y con los incrementos de x donde al incremento de x se le da valores muy próximos a cero.[17]

Con respecto a los textos tradicionales en su mayoría plantean la interpretación gráfica de la derivada de una función como parte de las aplicaciones de la derivada, con la pendiente de la tangente como su interpretación geométrica da idea de algo estático, en cambio la derivada en sí es un concepto dinámico.[17]

Sobre la enseñanza de la derivada varios investigadores se enfocan en el desarrollo de los procesos del pensamiento propio de la Matemática en la resolución de problemas, en el desarrollo conceptual, en las ideas de las definiciones y su significado práctico. La enseñanza de la derivada depende, en gran parte, en resolver problemas prácticos, de modo que los conceptos básicos se forman a partir del problema de las tangentes o de su significado físico. [17]

Una opción didáctica para el aprendizaje de la derivada en la sección del Bachillerato General

Unificado, es constituir los contenidos tanto de los textos usuales como el que sugieren hoy en la actualidad en la mayoría de los programas oficiales que se asemejan más a la estructura formal del Análisis Matemático y por tanto esconden el origen intuitivo de sus conceptos básicos, priorizan el cambio de contenidos y el aprendizaje de algoritmos por encima de la comprensión de las ideas básicas. [8]

En otros de los resultados sobre una estrategia para qué los estudiantes tengan un conocimiento más profundo del concepto de derivada y su interpretación en el contexto de las funciones; se utiliza la estrategia de promover resultados, para luego probarlos de acuerdo al nivel del Bachillerato, finalmente se podrán ejercitar y realizar las respectivas evaluaciones sobre los procesos de la estrategia [15]

En [16], la aplicación de la derivada se aplica una estrategia didáctica en donde se pretende amplificar una teoría como aprendizaje significativo crítico, en donde él se apunta que el docente y el alumno que es el eje central deben trabajar conjuntamente en el aula.

Además, una de las maneras para derivar funciones compuestas que se ha utilizado es el llamado uso de "adentro hacia afuera" que en sí viene a ser un proceso mecánico y esto se desprende de la noción de función y también de la composición de funciones. [13]

Para el caso del cálculo de derivadas de funciones [10], el creciente desarrollo de programas informáticos o de sitios web permiten hoy en día adaptar a los procesos de enseñanza para que los estudiantes tengan una guía de comparar resultados; el cual esto lleva a un cambio significativo en el estudio del cálculo de las derivadas.

Según la enseñanza de la matemática para el desarrollo de la derivada de funciones se concluye que es necesario trabajar con el uso de modelos sencillos y prácticos, como es a través del cociente incremental, que conlleva a los estudiantes a conceptualizar el límite de una forma natural. [12]

La relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada mencionados por [14], se da a conocer que resultó difícil la comprensión gráfica de $f(a)$, $f'(a)$ y $f'(x)$, ya que hubo varias inconsistencias como:

- La confusión que se presentaba en calcular la derivada en un punto $x = a$, $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$

- El uso de la expresión $f'(x)$ a la ecuación de la recta tangente.

- El uso de las formas de obtener la derivada en forma directa e indirectas, es decir, con la definición de límite y las reglas de la derivación.

El resultado de esta investigación según [14] llevó a reparar la comprensión de derivada a la relación entre lo local (derivada en un punto) y lo global (función derivada).

En cuanto a las **Investigaciones Didácticas** realizadas hoy en la actualidad tenemos:

a. Historia y Epistemología de la función Derivada

"El trabajo de diferentes seres humanos enfocados al estudio, en distintas épocas y culturas, han hecho aportes que han permitido los cambios y el refinamiento de las ideas matemáticas de la función derivada para convertirla en un objeto (puro, aplicado y a enseñar), muy potente. Es tal la importancia de este objeto matemático que permite resolver problemas de las matemáticas, de las ciencias naturales, sociales y humanas." [12]

b. Descripción de Niveles de Comprensión del Concepto de Derivada

"El marco teórico utilizado se concentra en el desarrollo del esquema de derivada a través de tres niveles: Intra, Inter, Trans. Se encontró un enfoque en algunos a interpretar la derivada en términos del proceso algorítmico y también como dependencia de la expresión algebraica de la función. Por otra parte, se presentaron las dificultades para analizar las gráficas de las funciones hacia la gráfica de la función derivada." [12]

c. Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de la Derivada

"El problema motiva a esta investigación con los clases tradicionales de Cálculo Diferencial en el nivel preuniversitario y que se podrá usar para los estudiantes de Bachillerato, con cantidades significativas para los estudiantes que no logran comprender sus conceptos básicos, principalmente en el concepto de derivada. Para esta investigación se tiene una propuesta Didáctica que contribuya a la comprensión del concepto de derivada a través de la formación de ideas variacionales, particularmente a través de la noción de rapidez de la variación" [12]

d. La Comprensión de la Derivada como objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática

"Este trabajo revisa y organiza las aportaciones de las investigaciones hechas en Matemática Educativa para identificar el conocimiento generado. La revisión se ha estructurado de la siguiente manera:

- Lo que entienden los estudiantes sobre la derivada de una función en un punto;
- El diseño de los sistemas de representación;
- Las principales características del análisis y el desarrollo de derivada de funciones.

Con esta investigación lo que en sí se pretende es aumentar la comprensión de cómo los estudiantes comprenden el significado y usan el concepto de derivada" [12]

Con esto se pretende que con la estrategia didáctica que se va a desarrollar, los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado no presenten dificultad en derivar funciones trascendentes con el uso de la Regla de la Cadena y así con esta ayuda ellos no presenten dificultad en sus estudios

universitarios en los primeros años principalmente en carreras de ciencias exactas o de una ingeniería.

En esta sección se debe pasar revista a las investigaciones o desarrollos que ya se han realizado sobre la temática en el ámbito regional, nacional o internacional. Se debe hacer explícito el alcance de cada uno de estos trabajos y su conexión con el presente trabajo de titulación.

Queda a discreción del autor la posibilidad de dividir esta sección en subsecciones, para mejorar la calidad de la exposición.

3.2.1. Propuestas Didácticas para Introducir la Derivada

A continuación se indicará algunas propuestas por [11] para introducir el concepto de la derivada:

a) La propuesta empieza enfocándose con la tasa de variación o a veces llamada velocidad media. A través de los problemas se tiene el desarrollo de la variación instantánea y de la velocidad instantánea.

b) La propuesta para estudiantes de 16 a 19 años, los alumnos deben estudiar los libros según lo que ellos aspiran seguir. Para esto aquí se hace una introducción del estudio de la derivada sin tratar previamente el concepto de límite. Aquí los estudiantes aprenden a usar las calculadoras graficadoras o con programas instalados en los ordenadores. Por ejemplo, con cálculos de pendientes a curvas, cálculos de pendientes y gráficas de pendientes.

c) Los programas franceses consideran tres aspectos inseparables en la derivación:

- El aspecto geométrico que se enfoca en el dominio de la tangente.
- El aspecto numérico está relacionado al entorno de un punto por una función a fin.
- Es aspecto cinemático que está relacionado con el concepto de velocidad instantánea

3.2.2. El Desarrollo de la Comprensión de la Regla de la Cadena

Una de las investigaciones realizadas por [14] supuso el desarrollo para el uso de la Regla de la Cadena en tres aspectos: intra, inter y trans.

- En el proceso intra los alumnos tienen un conjunto de varias reglas para hallar las derivadas.
- En el desarrollo inter, los alumnos tienen la habilidad para observar todos los casos diferentes.
- En el proceso trans, los alumnos construyen la Regla de la Cadena, es decir, comparan con la Composición de Funciones con las derivadas de las Funciones Compuestas.

Con esta investigación se llevó a cabo una descomposición genética inicial para aplicar el concepto de la Regla de la Cadena en el cual describieron una trayectoria para el aprendizaje en donde el estudiante pueda dominar el aprendizaje del concepto.

Capítulo 4

Metodología

4.1. Diagnóstico

El mecanismo que se utilizó para analizar el problema planteado sobre la dificultad que presentan los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en derivar funciones, con referencia especial al uso de la Regla de la Cadena, es mediante las calificaciones según los parámetros de evaluación que establece hoy en la actualidad el Ministerio de Educación de la República del Ecuador; según se lo puede visualizar en la siguiente tabla:

Tabla 4: Parámetros de Evaluación

Escala Cualitativa	**Escala Cuantitativa**
Domina los aprendizajes requeridos (DAR)	9.00 - 10
Alcanza los aprendizajes requeridos (AAR)	7.00 - 8.99
Esta próximo alcanzar los aprendizajes requeridos (EPAAR)	4.01 - 6.99
No alcanza los aprendizajes requeridos (NAAR)	menor o igual a 4.00

Fuente: Ministerio de Educación

Con el fin de realizar el trabajo, se llevaron a cabo dos evaluaciones piloto para realizar el respectivo diagnóstico, en donde el docente tuvo en cuenta los siguientes puntos:

1. Detectar los conocimientos previos que se necesitan para la impartición del nuevo tema a ver.

2. Tomar conciencia sobre el curso del proceso de aprendizaje, en este caso para la derivación de funciones.

3. Diagnosticar las condiciones de los todos los alumnos.

Con respecto a la Tabla 3, se obtuvo la problemática que presentan los estudiantes en la asignatura de Matemática Superior en el temario de Derivación de Funciones, en especial, la derivación de las funciones trascendentales compuestas.

4.1.1. Evaluación 1

Para este diagnóstico se realizó en el Colegio Aeronáutico de Aviación Civil, ubicado en la ciudad de Quito, provincia de Pichincha, en el Tercer Año de Bachillerato General Unificado en la asignatura de Matemática Superior (Optativa), la conformación de dos grupos (grupo 1 y grupo 2) los cuales constan de 42 estudiantes cada uno, teniendo un total de 84 estudiantes que escogieron

esta asignatura con el mismo docente a cargo de la mencionada asignatura. (Nota: el resto de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado escogen otras asignaturas de las asignaturas optativas).

A continuación se presenta la tabla del cálculo de las notas basado en la escala cualitativa, para comprobar que los estudiantes presentan la dificultad en la problemática mencionada.

Tabla 5: Evaluación de Derivadas de Funciones Compuestas

Escala Cualitativa Prueba Piloto 1	**Número de Estudiantes**
Domina los aprendizajes requeridos (DAR)	11
Alcanza los aprendizajes requeridos (AAR)	15
Esta próximo alcanzar los aprendizajes requeridos (EPAAR)	26
No alcanza los aprendizajes requeridos (NAAR)	32
TOTAL ESTUDIANTES	84

Fuente: Elaboración Propia.

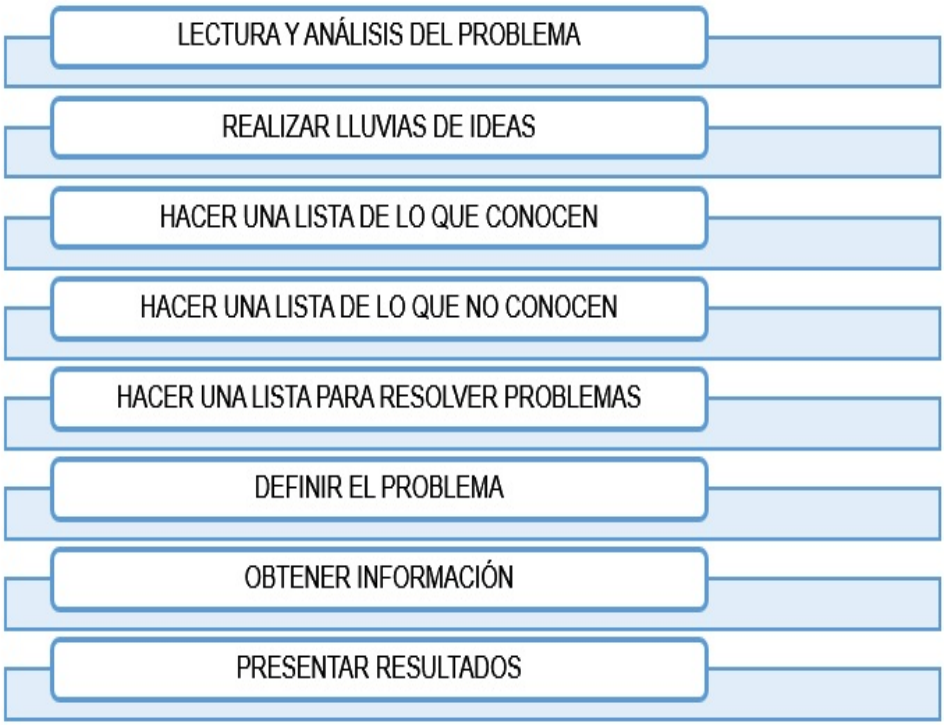
4.2. Método(s) aplicado(s)

Dentro de los Métodos Aplicados tenemos la estructura de manejo con los estudiantes basado en la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), el cual se detalla a continuación:

4.2.1. Desarrollo del Proceso de ABP con los Alumnos

En el desarrollo de las Metodologías por [4] establece que el desarrollo del proceso del ABP ocurre en ocho fases para el trabajo en grupos:

Figura 5: Proceso del Aprendizaje Basado en Problemas



Fases del Aprendizaje Basado en Problemas.
Fuente: Elaboración Propia

A continuación se detallará cada una de las fases del Proceso del Aprendizaje basado en Problemas para trabajar con los alumnos:

1. Lectura y análisis del problema:

Con los equipos de trabajo formado por los estudiantes, se pretende que comprendan los enunciados, es decir, que todos los integrantes del equipo de trabajo entiendan los problemas matemáticos a desarrollarse y con esto le permitirá al docente estar más atento en las discusiones de los grupos.

2. Realizar lluvias de Ideas:

Es un proceso didáctico y práctico en donde cada integrante del grupo de trabajo genera una creatividad mental.

3. Hacer una lista de lo que conocen:

Se pretende que cada grupo de trabajo elabore aquellos conocimientos que ellos ya manejan si dificultad para así poder resolver los problemas de derivadas de funciones.

4. Hacer una lista de lo que no conocen:

Con esta fase el docente podrá ayudar a los grupos de trabajo con aquello que no saben y que presentan dificultad para el desarrollo de problemas de derivadas de funciones.

5. Hacer una lista para resolver problemas:

En esta fase los estudiantes ya están en condiciones de agrupar todas las ideas para llevar a cabo un buen desarrollo en la solución de los problemas de derivadas de funciones.

6. Definir el problema:

En este caso los estudiantes ya se centran en resolver los problemas propuestos por el docente.

7. Obtener información:

Cada integrante del equipo de trabajo debe ser responsable de la tarea asignada, y si es necesario cada estudiante o el equipo de trabajo puede solicitar ayuda al docente en sao de haber alguna inquietud.

8. Presentar resultados:

Finalmente en este punto el docente tendrá la oportunidad de analizar y concluir si cada equipo de trabajo comprendió los conceptos para el desarrollo de los problemas de derivadas de funciones.

4.2.2. Función Compuesta

El principal objetivo de la Función Compuesta es que los estudiantes puedan resolver composiciones con distintas funciones, es decir, tengan claro primero la definición de Función Compuesta para luego enfocarnos a trabajar con la definición de la Regla de la Cadena para así facilitar el proceso de trabajo en derivar funciones con los estudiantes.

Según [9] menciona que dadas dos funciones f y g, la función compuesta, denotada por fog,

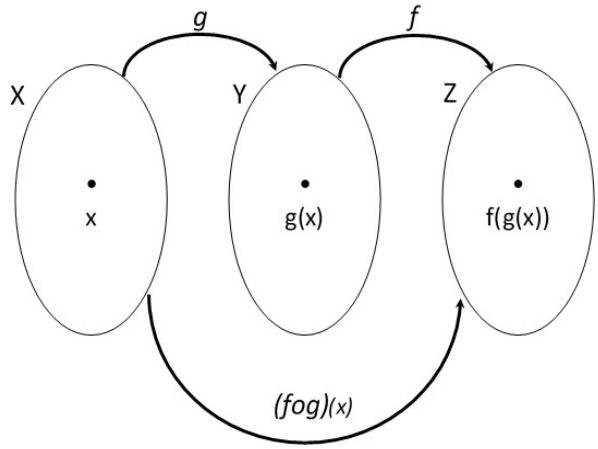
está definida por:

$$(fog)(x) = f(g(x)) \tag{4.1}$$

y el dominio de fog es el conjunto de todos los números x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Esta definición nos indica que para hallar la función compuesta $(fog)(x)$, primero tenemos que indicar que se sustituye a la función g y luego se aplica f a $g(x)$. Para entender este cálculo se lo puede visualizar en la gráfica.

Figura 6: Función Compuesta.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

En resumen en el gráfico se observa que la composición de dos funciones es una función evaluada en otra función. Una vez explicado la definición de función compuesta se le pide al estudiante aplicar en el siguiente ejemplo:

Si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas por:

$$f(x) = 2x^2 + 1 \quad y \quad g(x) = x - 1 \tag{4.2}$$

Calcular $(fog)(x)$

Aplicar la definición de Función Compuesta de la ecuación, reemplazamos $g(x)$ por $x-1$, tenemos:

$$(fog)(x) = f(x - 1) \tag{4.3}$$

Luego para determinar la función compuesta evaluamos $x - 1$ en la función $f(x)$

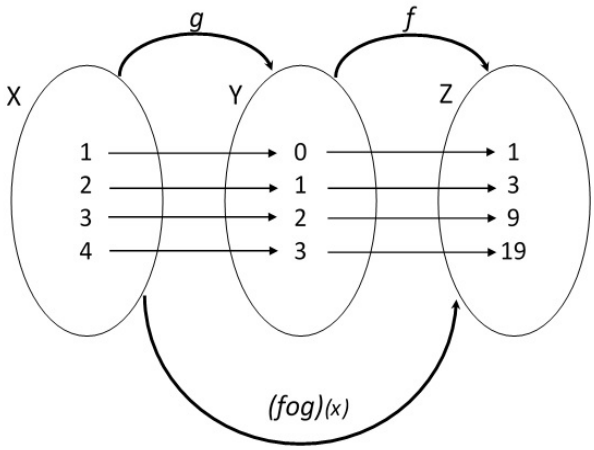
$$(fog)(x) = 2(x - 1)^2 + 1 \tag{4.4}$$

Finalmente resolver la ecuación, encontramos la Función Compuesta $(fog)(x)$

$$(fog)(x) = \ 2x^2 - 4x + 3 \tag{4.5}$$

Este ejemplo se lo puede también entender mediante la parte gráfica con valores para x:

Figura 7: Representación Gráfica de Función Compuesta.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Estos valores de x también lo podemos sustituir en la ecuación anterior para determinar la función compuesta y poder comparar con la parte gráfica:

$$(fog)(1) = \ 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1 \tag{4.6}$$

$$(fog)(2) = \ 2(2)^2 - 4(2) + 3 = 3 \tag{4.7}$$

$$(fog)(3) = \ 2(3)^2 - 4(3) + 3 = 9 \tag{4.8}$$

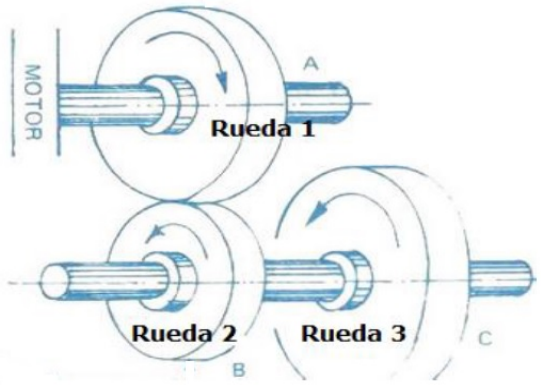
$$(fog)(4) = \ 2(4)^2 - 4(4) + 3 = 19 \tag{4.9}$$

4.2.3. Derivada de Función Compuesta

Según [6] la Regla de la Cadena es una regla de derivación que se utiliza en las funciones compuestas, debido a que existen funciones que al determinar su derivada sin aplicar la regla de la cadena se vuelve difícil, por tal razón es uno de los teoremas más importantes del cálculo.

Por ejemplo, si relacionamos esta definición con un engranaje compuesto por tres ruedas (Figura 8), de manera que la segunda y tercera rueda están colocadas sobre un mismo eje. Al girar el primer eje, arrastra al segundo y esté a su vez arrastra el tercero. Si se llama y, u, x al número de revoluciones por minuto de los ejes 1, 2 y 3.

Figura 8: Ejemplo de Función Compuesta.



Fuente: Libro-Taller para la enseñanza del concepto de derivada en el grado 11°
Elaborado por: Paula Andrea Barrientos Tascón

Con la ayuda de este ejemplo se debe probar que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.10}$$

Demostración por [6]:

Se tiene que 2 es 3 veces la rueda 1 y la rueda 2 es 2 veces la rueda 3. Por lo tanto:

$$\frac{dy}{du} = 3 \tag{4.11}$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \tag{4.12}$$

Por lo que se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (3)(2) = 6 \tag{4.13}$$

Es decir, que la razón de cambio de y con respecto a x es el producto de la razón de cambio de y respecto de u por la de u respecto a x.

Por lo tanto se tiene que la regla de la cadena en forma general es:

Si $y = f(x)$ es derivable en u y $u = g(x)$ es derivable de x, entonces: $y = f(g(x))$ es función derivable de x, con:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.14}$$

La definición (4.14) puede notarse por:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g(x) \tag{4.15}$$

Para visualizar mejor la definición de la Regla de la Cadena, al estudiante se le pide que halle la derivada de la siguiente función compuesta.

$$f(x) = (x^2 - 2x + 5)^6 \tag{4.16}$$

Para aplicar la definición de la regla de la cadena, lo primero que se debe hacer es:

$$u = x^2 - 2x + 5 \quad y \quad y = u^6 \tag{4.17}$$

Sustituir en la definición de la Regla de la Cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[u^6]\frac{d}{dx}[x^2 - 2x + 5] \tag{4.18}$$

Luego aplicar las propiedades de las derivación (Apéndice D) en la ecuación (4.18):

$$\frac{dy}{dx} = \ (6u^5)\ (2x - 2) \tag{4.19}$$

Por último para determinar la derivada de la función compuesta, sustituimos la variable u en función de la variable x, y se tiene como resultado final la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \ 6(x^2 - 2x + 5)^5\ (2x - 2) \tag{4.20}$$

Por ejemplo, para que el estudiante también derive funciones trigonométricas, se muestra la siguiente aplicación en donde se ve que se usa la Regla de la Cadena. Se pide encontrar la derivada de la función

$$h(x) = f(x)g(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2 + 1) \tag{4.21}$$

Para desarrollar esta derivada de funciones, al estudiante primero se le hace observar que antes de aplicar la derivada de la función compuesta, primero debe aplicar la derivada del producto de funciones (Apéndice D) o se debe aplicar la ecuación (3.4) mencionada anteriormente en las reglas de derivación donde $f(x) = x^2$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{4.22}$$

Sustituir las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en la condición (4.22), tenemos:

$$\frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(x^2 + 1)] = x^2\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x^2 + 1)] + \operatorname{sen}(x^2 + 1)\frac{d}{dx}[x^2] \tag{4.23}$$

Ahora para derivar la función $\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}(x^2 + 1)]$, usamos la definición de la Regla de la Cadena, es decir, para este caso se usa la condición (4.14):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.24}$$

Para esto $u = x^2 + 1$, lo que $y = \operatorname{sen} u$, sustituir esto en (4.24), tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} u)}{du}\frac{d(x^2+1)}{dx} \tag{4.25}$$

Aplicar derivadas trigonométricas, derivada de la potencia y la derivada de una constante, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (\cos(u))(2x) \tag{4.26}$$

Como $u = x^2 + 1$, sustituir en (4.16) en la expresión cos(u), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = (\cos(x^2+1))(2x) \tag{4.27}$$

Una vez aplicado la Regla de la Cadena en este ejercicio, sustituimos este resultado en la condición (4.23):

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(x^2+1)] = x^2[(2x)\cos(x^2+1)] + 2x\operatorname{sen}(x^2+1) \tag{4.28}$$

Luego simplificar esta expresión, tenemos:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(x^2+1)] = 2x^3\cos(x^2+1) + 2x\operatorname{sen}(x^2+1) \tag{4.29}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(x^2+1)] = 2x[x^2\cos(x^2+1) + \operatorname{sen}(x^2+1)] \tag{4.30}$$

También con funciones exponenciales y logarítmicas podemos aplicar la Regla de la Cadena, por ejemplo: Hallar la derivada de la siguiente función $h(x) = f(x)g(x) = xe^{x^2-1}$

Para esto también al estudiante le indicamos que primero debe aplicar la derivada del producto de funciones (Apéndice D) o se usa la condición (3.4)

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{4.31}$$

Donde $f(x) = x$ y $g(x) = e^{x^2-1}$

Se le indica al estudiante que sustituya en la condición (4.31):

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = (x)\frac{d}{dx}[e^{x^2-1}] + (e^{x^2-1})\frac{d}{dx}[x] \tag{4.32}$$

Para esto debemos aplicar la Regla de la Cadena en la condición $\frac{d}{dx}[e^{x^2-1}]$, es decir, para esto $u = x^2 - 1$ donde y $y = e^u$. En la condición (4.14) y con las propiedades de las derivadas (Apéndice D), tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.33}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\frac{d(x^2-1)}{dx} \tag{4.34}$$

Derivar la expresión (4.34):

$$\frac{dy}{dx} = (e^u)(2x) \tag{4.35}$$

Sustituir $u = x^2 - 1$ en (4.35):

$$\frac{dy}{dx} = (e^{x^2-1})(2x) \tag{4.36}$$

Reemplazar en (4.32):

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[xe^{x^2-1}] = (x)(e^{x^2-1})(2x) + (e^{x^2-1})(1) \tag{4.37}$$

Finalmente al simplificar, se tiene como resultado:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[xe^{x^2-1}] = (2x^2)(e^{x^2-1}) + e^{x^2-1} \tag{4.38}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[xe^{x^2-1}] = (e^{x^2-1})(2x^2+1) \tag{4.39}$$

Otra aplicación que los estudiantes deben dominar son las funciones logarítimicas, es decir: Encontrar la derivada de la función $h(x) = x\ln(x^2+1)$.

Para esto se le indica al estudiante que encuentre primero la derivada de la función compuesta usando la regla de la cadena:

$$u = x^2 + 1 \quad y \quad y = \ln u \tag{4.40}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.41}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln u)}{du}\frac{d(x^2+1)}{dx} \tag{4.42}$$

Usando las tablas de derivación ubicadas en el Apéndice D, tenemos como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{u}\right)(2x) \tag{4.43}$$

Luego reemplazar la variable u en la ecuación (4.42), se obtiene como resultado final de la derivada de la función compuesta:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x) \tag{4.44}$$

Se aplica ahora la regla del producto de derivada de funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x\ln(x^2+1)] = x\frac{d}{dx}[\ln(x^2+1)] + \ln(x^2+1)\frac{d}{dx}[x] \tag{4.45}$$

Luego se reemplaza el resultado aplicado de la Regla de la Cadena (4.43) en la expresión (4.44):

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x\ln(x^2+1)] = (x)\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + (\ln(x^2+1))(1) \tag{4.46}$$

Finalmente el resultado final es:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[x\ln(x^2+1)] = \frac{2x^2}{x^2+1} + \ln(x^2+1) \tag{4.47}$$

4.3. Materiales y herramientas

Para asegurar la comprensión de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado sobre la derivación de funciones, tanto polinómicas como compuestas; se les recomienda usar dos herramientas que son de ayuda para la comprobación de su desarrollo analítico ya sea para los talleres en laboratorios o para los trabajos a realizar en casa. Las herramientas a utilizar son:

a) Software Libre: Geogebra

b) Sitio Online: WolframAlpha

4.3.1. Geogebra

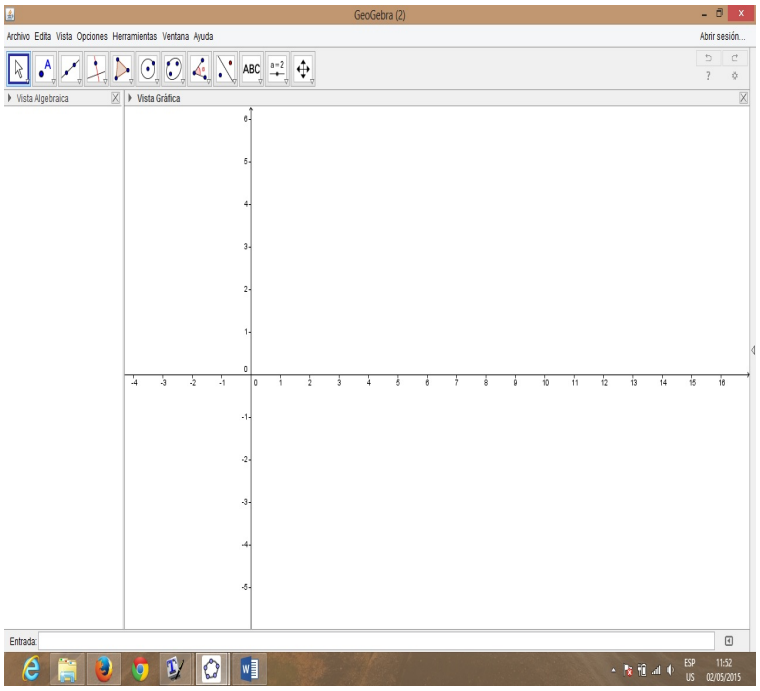
Geogebra es un Software Matemático Interactivo Libre fácil de utilizar para los estudiantes tanto de colegios como de universidades, el mismo que puede ser descargado de la página principal de Geogebra [1], donde se ofrecen las posibilidades de descarga para diferentes sistemas operativos.

Geogebra se puede aplicar en cualquier nivel educativo, lo cual esta aplicación se convierte en un recurso fundamental para los docentes que quieran incorporar las TIC'S a su trabajo diario.

Con la utilización de Geogebra permitirá abordar la parte matemática, a través de la experimentación y el manejo de diferentes elementos, facilita el desarrollo de problemas matemáticos para obtener resultados a través de la observación directa.

Una vez instalado Geogebra, tenemos a continuación como se visualiza la pantalla principal para comenzar a realizar las derivadas de funciones.

Figura 9: Pantalla Principal de Geogebra.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

4.3.1.1. Derivada en un Punto

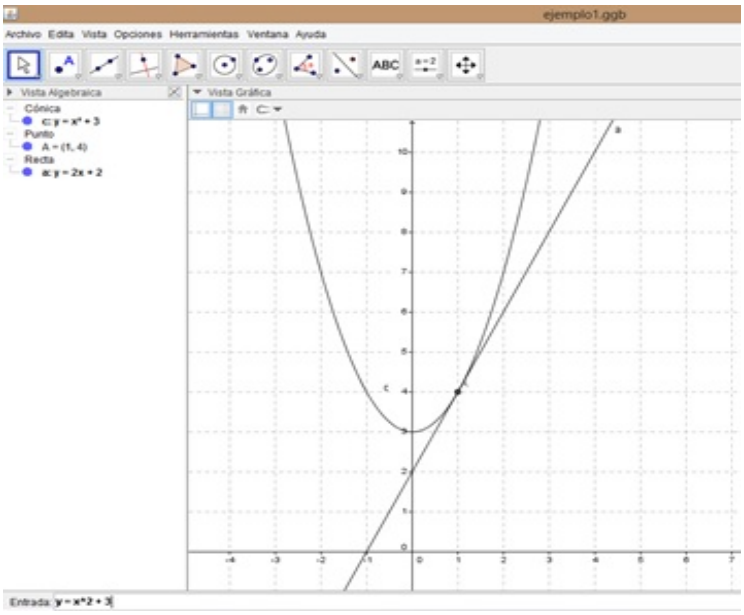
Como ejemplo se tomará en cuenta el mismo ejemplo desarrollado en la condición (3.6), el mismo que se va a observar como graficar la función, como representar la ecuación de la recta tangente en un punto.

Para esto en la parte inferior izquierda de la pantalla principal de Geogebra se les indica a los estudiantes que tenemos que ingresar la función que se va a graficar; en este caso vamos a ingresar:

$$y = f(x) = x^2 + 3 \tag{4.48}$$

Además en este mismo gráfico se les indica a los estudiantes que pueden graficar la ecuación de la recta tangente con el respectivo punto donde se obtiene dicha recta.

Figura 10: Ecuación de la Recta Tangente en Geogebra.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

4.3.1.2. Derivada de una Función Compuesta

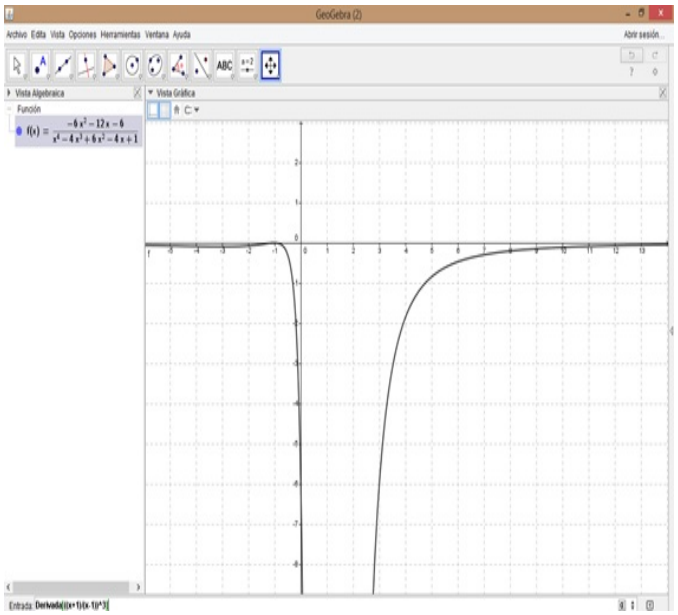
Para este desarrollo se le pide al estudiante que ingrese una función compuesta para graficar la derivada de la misma con la ayuda de las TIC'S. Para este ejemplo igual que el anterior se ingresará en la parte inferior izquierda la función:

$$y = f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \tag{4.49}$$

En Geogebra se ingresará la función (4.22) de la siguiente manera como se ve en la siguiente imagen, en donde se tiene el resultado de $f(x)$ y la gráfica respectiva de su derivada:

Para comparar los resultados de esta aplicación con el resultado obtenido analíticamente (Regla de la Cadena), el estudiante debe desarrollar en este caso toda la fracción para obtener el mismo resultado de la aplicación, es decir, esta aplicación en los resultados no muestra en forma simplificada.

Figura 11: Derivada de una Función Compuesta.



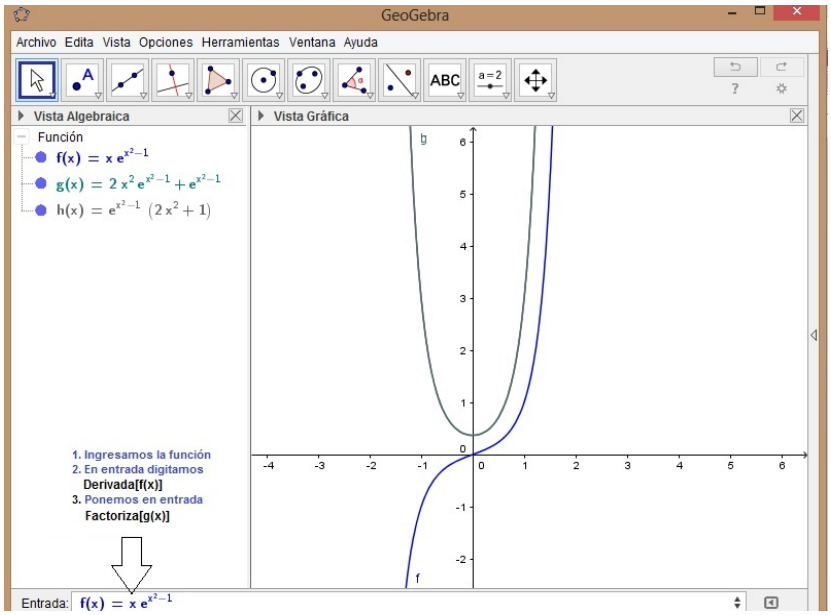
Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Aquí al estudiante dentro de la estrategia en el cual se aplica puede hacer uso de las TIC'S, para así también pueda comparar los resultados que se realizan analíticamente de la Derivada de cualquier Función y así tenga más seguridad en la realización de sus aplicaciones. Por ejemplo en el apartado anterior se le pide al estudiante que encuentre analíticamente la derivada de la función $h(x) = f(x)g(x) = xe^{x^2-1}$ en donde se obtuvo el resultado

$$\frac{d}{dx}[h(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = (e^{x^2-1})(2x^2+1) \tag{4.50}$$

Esto lo podemos comparar con el programa Geogebra, como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 12: Derivada de una Función Exponencial.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

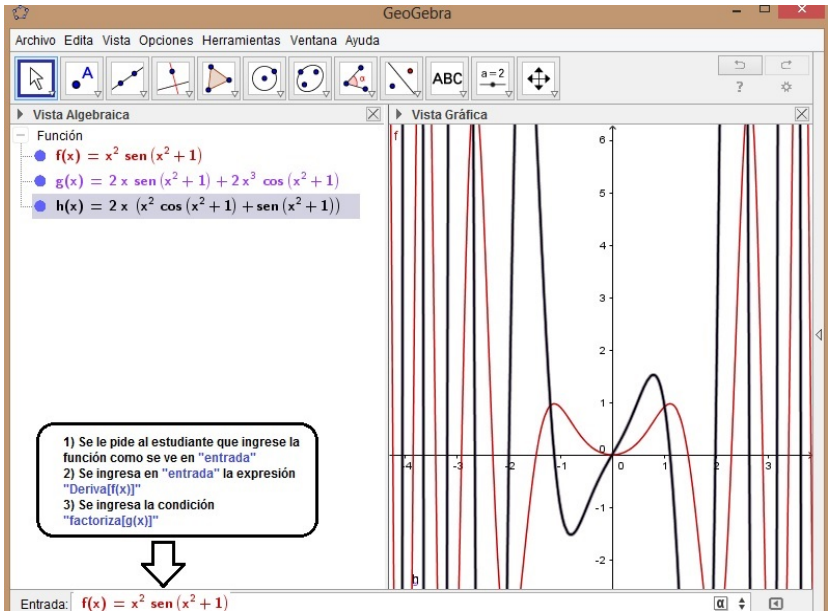
En esta Figura 12 se le indica al estudiante que primero debe ingresar la función tal como se visualiza en la parte de entrada y que de enter, luego se observa que Geogebra muestra el resultado de la derivada de la función ingresada y además indica su respectiva gráfica, pero para obtener el mismo resultado que se lo hizo analíticamente al estudiante se le indica que Geogebra tiene la opción de simplificar, y nos da el resultado simplificado que se obtuvo analíticamente, es decir, nos simplifica a:

$$\frac{d}{dx}[h(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = (e^{x^2-1})(2x^2+1) \tag{4.51}$$

También se puede realizar en Geogebra derivada de funciones trigonométricas, para esto se va a comparar el resultado de la derivada de la función (4.21):

$$h(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2+1) \tag{4.52}$$

Figura 13: Derivada de una Función Trigonometrica.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

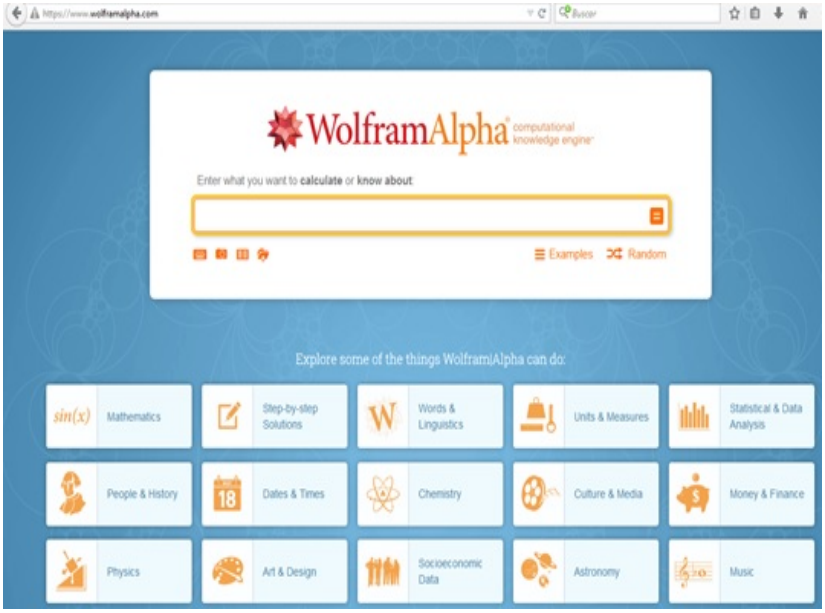
Igual que el análisis anterior, en la Figura 12 se le indica al estudiante que primero debe ingresar la función tal como se visualiza en la parte de entrada y que de enter, luego se observa que Geogebra nos muestra el resultado de la derivada de la función ingresada además indicándonos con su respectiva gráfica, pero para obtener el mismo resultado que se lo hizo analíticamente al estudiante se le indica que Geogebra tiene la opción de simplificar, y nos da el resultado simplificado que se obtuvo analíticamente, es decir, nos simplifica a:

$$\frac{d}{dx}[x^2 \operatorname{sen}(x^2+1)] = 2x[x^2\cos(x^2+1) + \operatorname{sen}(x^2+1)] \tag{4.53}$$

4.3.2. WolframAlpha

WolframAlpha es una herramienta Online en donde el estudiante necesita tener Internet y lo puede ingresar a la página [2] y tenemos como pantalla principal la siguiente imagen:

Figura 14: Pantalla Principal de WolframAlpha.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Además esta aplicación Online tiene una ventaja con respecto a Geogebra ya que esta le permite al estudiante ver paso a paso el proceso del cálculo de la derivada de la función.

Para esto el estudiante o cualquier persona tiene que registrarse; en el cual los campos obligatorios son:

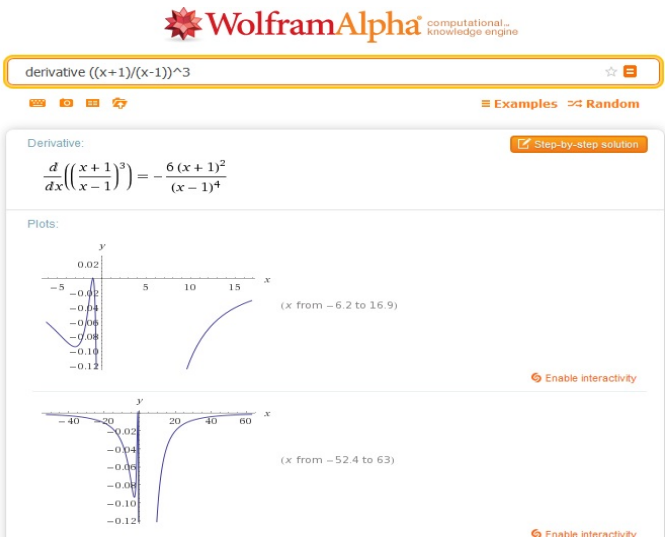
1. Tener una cuenta de correo electrónico
2. Ingresar su Nombre
3. Ingresar su Apellido
4. Ingresar un Password (solo necesita tener 6 caracteres)

A continuación se muestra el mismo ejemplo anterior realizado en Geogebra en encontrar la derivada de la función:

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \tag{4.54}$$

Para que el estudiante realice sus comprobaciones de los ejercicios de derivadas, se ingresa para este temario la palabra "derivative" seguido de la función (4.23) que se requiere evaluar, como se puede observar en la siguiente imagen:

Figura 15: Ejemplo de Derivada en WolframAlpha.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Otra diferencia con Geogebra es que el resultado en WolframAlpha el resultado nos expresa en forma simplificada, en donde se puede concluir que el estudiante debe manejar bien los casos estudiados anteriormente como son casos del algebra como potenciación, casos del factoreo, entre otros; para así poder obtener el mismo resultado de la aplicación.

Este ejemplo resuelto en WolframAlpha se le puede comprobar su solución mediante el uso de la Regla de la Cadena, como se muestra a continuación:

Si

$$y = f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \tag{4.55}$$

Hallar su derivada de $f(x)$

Para esto se recuerda la ecuación (4.14) lo primero que el estudiante debe realizar un cambio de variable, es decir, primero selecciona un u y luego forma la función:

$$u = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{y} \quad y = u^3 \tag{4.56}$$

Sustituir la ecuación (4.25) en la ecuación (4.14), tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4.57}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d}{du}(u^3)\right]\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] \tag{4.58}$$

Para obtener la derivada de esta función, el estudiante debe recordar lo que es la derivada de la potencia y la regla del cociente, para obtener como resultado:

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2\left[\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right] \tag{4.59}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\left[\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}\right] \tag{4.60}$$

Finalmente sustituir la variable u, se simplifica el segundo factor, tenemos la derivada de la función (4.24); y el estudiante puede comparar con la aplicación resuelto en WolframAlpha y con esto el estudiante puede asegurar su resultado con su desarrollo analítico:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4} \tag{4.61}$$

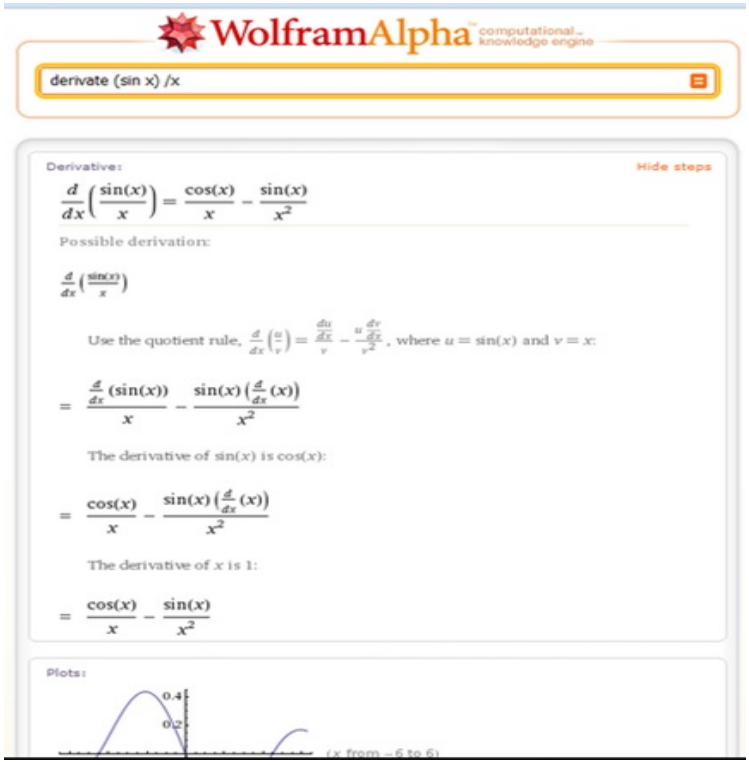
A continuación se muestra otros ejemplos para indicar que en esta aplicación se puede ingresar cualquier tipo de función basado en el tutorial de WolframAlpha en Español [18]:

Figura 16: Derivada Compuesta en WolframAlpha 1.



Fuente:
http://www.wolframalpha0.blogspot.com/2012/01/como-calcular-derivadas-con-wolfram.html
Elaborado por: WolframAlpha

Figura 17: Derivada Compuesta en WolframAlpha 2.



Fuente:
http://www.wolframalpha0.blogspot.com/2012/01/como-calcular-derivadas-con-wolfram.html
Elaborado por: WolframAlpha

4.3.3. Evaluación en el Internet

Los docentes del Área de Matemática tienen la facilidad de poder realizar las evaluaciones de base estructurada a través del Internet, es decir, al ingresar a la página https://www.edmodo.com que es libre, el docente podrá registrarse y acceder a dicha página para comenzar a elaborar diferentes tipos de evaluaciones; ya sean de opción múltiple, verdadero o falso, de completación, enlaces, entre otras.

El objetivo de esta aplicación es que los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado tengan una ventaja para rendir las evaluaciones de grado 'Ser estudiante' a través del Internet.

Para lograr esto el docente debe llevar a los estudiantes al Laboratorio de Informática y además que la Institución posee Internet.

A continuación se mostrará un ejemplo de una de las preguntas que se realizó en la evaluación 2 sobre derivadas de funciones:

Figura 18: Evaluación a través del EDMODO



Fuente: Elaboración Propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Capítulo 5

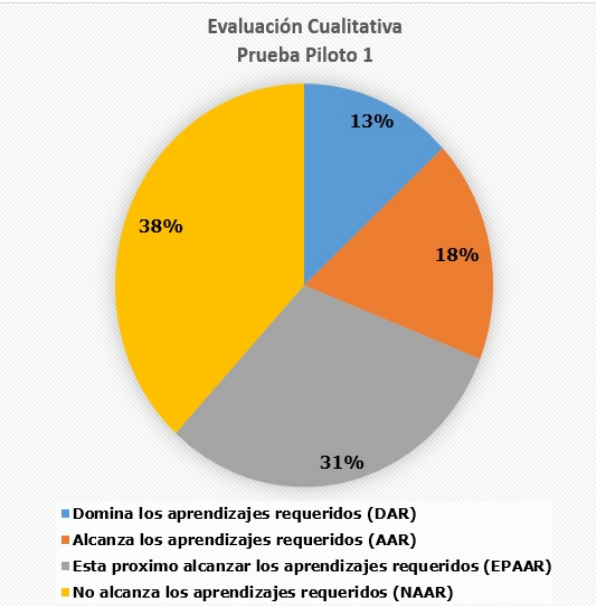
Resultados

5.1. Evaluación preliminar

Con la tabla 4 presentada en el Diagnóstico de la Evaluación Piloto 1, se presenta gráficamente los resultados en una diagrama de pastel que fue realizado en Microsoft Excel para poder visualizar mejor los resultados y confirmar que en realidad los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado presentan la dificultad en derivar funciones compuestas, es decir, ellos presentan dificultad en aplicar la definición de derivadas, interpretar gráficamente, aplicar propiedades y aplicar la Regla de la Cadena:

A continuación se muestra un diagrama de pastel que fue realizado en Microsoft Excel, en donde se puede visualizar los porcentajes que corresponden a cada evaluación cualitativa:

Figura 19: Evaluación a los Estudiantes - Prueba Piloto 1.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Como se puede observar en la Figura 19, solamente un 13 % de los estudiantes dominan el uso de la Regla de la Cadena para obtener la derivada de las funciones compuestas, es decir, estos estudiantes no presentan dificultades para obtener los resultados correctos; un 18 % alcanzan los aprendizajes pero no en su totalidad tienen el dominio de derivar funciones compuestas; un 31 % de los estudiantes de los dos grupos están próximos a alcanzar los aprendizajes y un 38 % no alcanzan los aprendizajes requeridos, es decir, para estos dos últimos casos el profesor es donde debe tomar más en cuenta el aprendizaje y donde debe aplicar la Estrategia Didáctica para lograr obtener resultados positivos. Con esto se puede concluir que los estudiantes de la materia de Matemática Superior con la primera evaluación piloto si presentan dificultad en encontrar la derivada de funciones compuestas mediante el uso la Regla de la Cadena.

5.2. Análisis de resultados

Procedimos a analizar el impacto generado por la implementación del presente trabajo, para esto se ha realizado una segunda prueba piloto con el mismo número de estudiantes que se realizó en la evaluación piloto 1, se presentan los siguientes resultados en la siguiente tabla:

Tabla 6: Evaluación para Derivar Funciones en General

Escala Cualitativa Prueba Piloto 2	**Número de Estudiantes**
Domina los aprendizajes requeridos (DAR)	19
Alcanza los aprendizajes requeridos (AAR)	27
Esta proximo alcanzar los aprendizajes requeridos (EPAAR)	33
No alcanza los aprendizajes requeridos (NAAR)	5
TOTAL ESTUDIANTES	84

Fuente: Elaboración Propia.

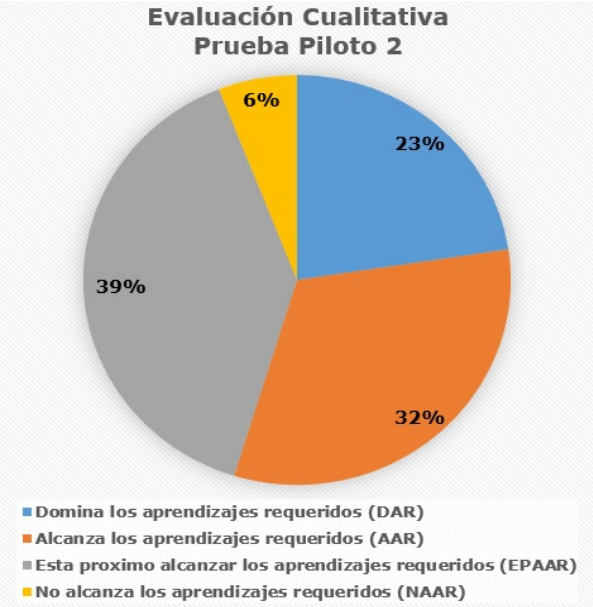
Para este caso al igual que en la evaluación 1 se realizaron los cálculos en Microsoft Excel y se los represento en un diagrama de pastel, para poder verificar si hay mejoras con respecto a los datos obtenidos en la Figura 4.

Para esto una vez que se refuerza los conocimientos de definiciones, aplicación de propiedades y el manejo y uso de regla de la cadena en funciones compuestas, en la figura 5 se podrá ver los resultados en sí que hay mejorar en este campo de las Derivadas de Funciones.

Para esto lo que se evaluó es el manejo de la definición de derivada con su respectiva interpretación gráfica, otra actividad que se consideró en esta evaluación es aplicar correctamente las propiedades de las derivadas (suma, resta, producto, cociente, regla de la potencia), y lo fundamental el manejo de la regla de la Cadena con funciones polinóminas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

A contiuación se muestra el diagrama con sus respectivos porcentajes de los resultados obtenidos en la evaluación piloto 2:

Figura 20: Evaluación a los Estudiantes - Prueba Piloto 2.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Para esta evaluación se puede visualizar en la figura 5 que se obtiene una bastante mejora con los estudiantes de Tercero de bachillerato General Unificado con respecto a los resultados de la figura 4, es decir, ahora los estudiantes llegan a un 23 % que si dominan los aprendizajes requeridos, un 32 % los estudiantes ya alcanzan los aprendizajes requeridos, es decir, ya no presentan mucha dificultad en obtener la derivada de las funciones; pero todavía se tiene un 39 % que están cerca los estudiantes en alcanzar los aprendizajes requeridos y lo principal que un 6 % que es un porcentaje mínimo son los estudiantes que todavía presentan dificultad.

Además se ha realizado una encuesta a los estudiantes para verificar el mejoramiento de aprendizaje por parte del Docente de la asignatura de Matemática, el cual se mostrará el porcentaje obtenido en gráficos tipo pastel.

5.2.1. Análisis de la Encuesta Realizados a los Estudiantes de Tercero de Bacillerato General Unificado

Se presenta el análisis de la encuesta realizada a los estudiantes con 12 preguntas, mostrada en una tabla y en diagramas de pastel el porcentaje para comprobar el mejoramiento de los estudiantes.

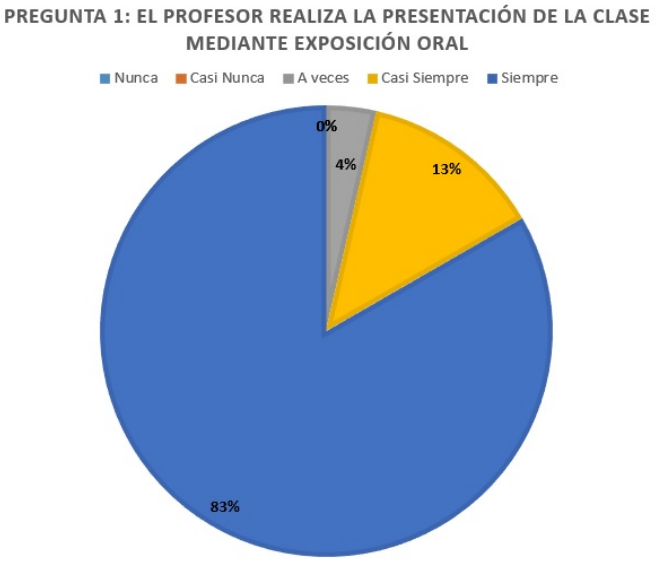
1. El profesor realiza la presentación de la clase mediante exposición oral

Tabla 7: Clase mediante exposición oral

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	3	3,57
Casi Siempre	11	13,10
Siempre	70	83,33
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 21: Pregunta 1.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Con los datos presentados tanto en la tabla como en el diagrama de pastel, se puede observar que los estudiantes indican en su mayoría que el docente que dicta la asignatura de Matemática Superior si aplica la exposición oral en el aula, lo que se puede mencionar que con esto el docente si aplica las demostraciones y resuelve aplicaciones para la comprensión de los estudiantes de la clase demostrativa y con esto se puede indicar que se puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje

en los estudiantes.

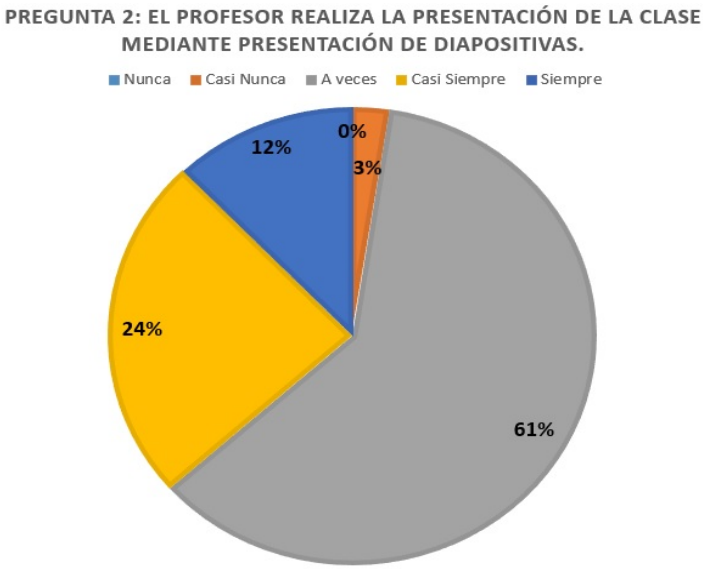
2. El profesor realiza la presentación de la clase mediante presentación de diapositivas.

Tabla 8: Clase mediante presentación de diapositivas

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	2	2,43
A veces	50	60,98
Casi Siempre	20	24,39
Siempre	10	12,20
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 22: Pregunta 2.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Con los datos presentados tanto en la tabla como en el diagrama de pastel, se puede observar que los estudiantes indican que el docente si trabaja con presentaciones en diapositivas, lo que con esto se puede ver que en la parte matemática si se puede trabajar con este tipo de herramientas de trabajo, principalmente la parte teórica y también se puede reforzar presentando aplicaciones resueltas y además presentar aplicaciones propuestas para que los estudiantes puedan resolver en forma individual o grupal en el aula.

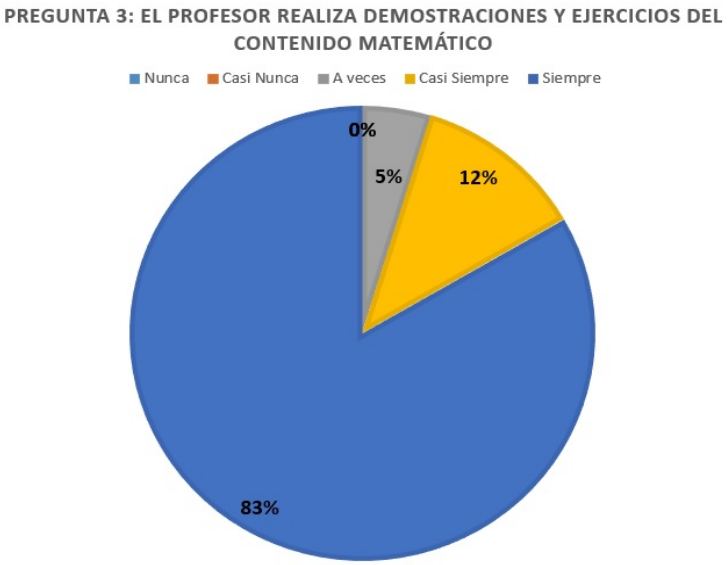
3. El profesor realiza las demostraciones y aplicaciones del contenido matemático.

Tabla 9: Solución de Aplicaciones y Demostraciones

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	4	4,76
Casi Siempre	10	11,90
Siempre	70	83,33
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 23: Pregunta 3.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Con respecto a este item se puede observar que el docente si realiza las demostraciones y aplicaciones con respecto al contenido matemático, es decir, con esto los estudiantes se van a sentir más seguros para desarrollar cualquier tipo de aplicación matemática principalmente en el tema de Derivadas de Funciones.

En sí, con respecto a esta pregunta la demostración es un orden a seguir para la resolución de los ejercicios o de algún teorema; así el docente puede aplicar este proceso didáctico del aprendizaje en el aula.

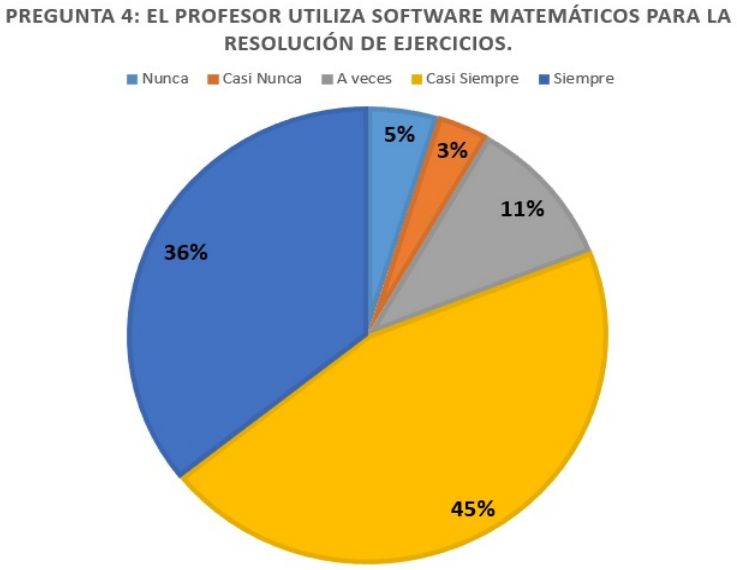
4. El profesor utiliza software matemáticos para la resolución de ejercicios.

Tabla 10: Uso de Software Matemático.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	4	4,76
Casi Nunca	3	3,57
A veces	9	10,71
Casi Siempre	38	45,24
Siempre	30	35,71
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 24: Pregunta 4.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

El análisis para esta pregunta indican los estudiantes que el docente si aplica esta estrategia de usar software matemáticos para resolución de ejercicios matemáticos, es decir, hoy en día los docentes deben hacer uso de las TIC´s para así ayudar al estudiante a realizar y comprobar la solución de los ejercicios, principalmente para realizar gráficas; y con esto los decentes de matemáticas pueden aplicar como parte del proceso didáctico de enseñanza con la utilización de software matemáticos o a través de programas online como los detallamos anteriormente como son el Geogebra o WolframAlpha respectivamente.

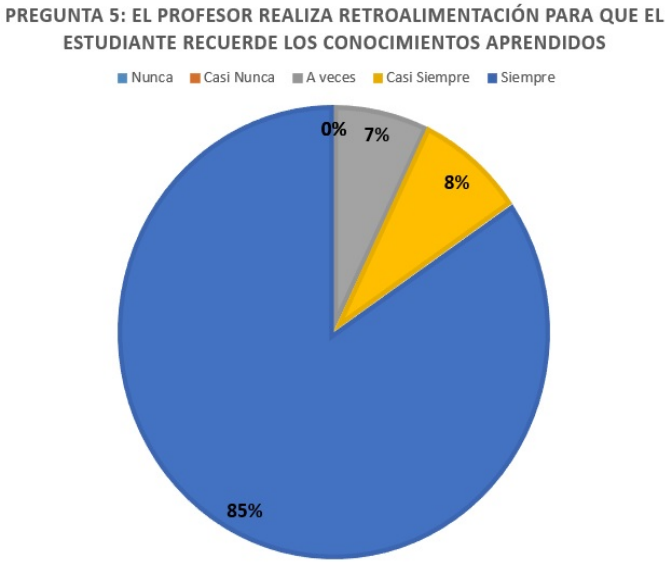
5. El profesor realiza retroalimentación para que el estudiante recuerde los conocimientos aprendidos.

Tabla 11: Retroalimentación de los conocimientos aprendidos.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	6	7,14
Casi Siempre	7	8,33
Siempre	71	84,52
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 25: Pregunta 5.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Para lograr un buen proceso de enseñanza-aprendizaje vemos en esta pregunta que los estudiantes encuestados manifiestan en su mayoría que el docente si realiza la retroalimentación, es decir, el docente cumple según la Ley de Educación que debe realizar la retroalimentación en el aula ya sea con trabajos de refuerzo, talleres individuales, talleres grupales o evaluaciones escritas.

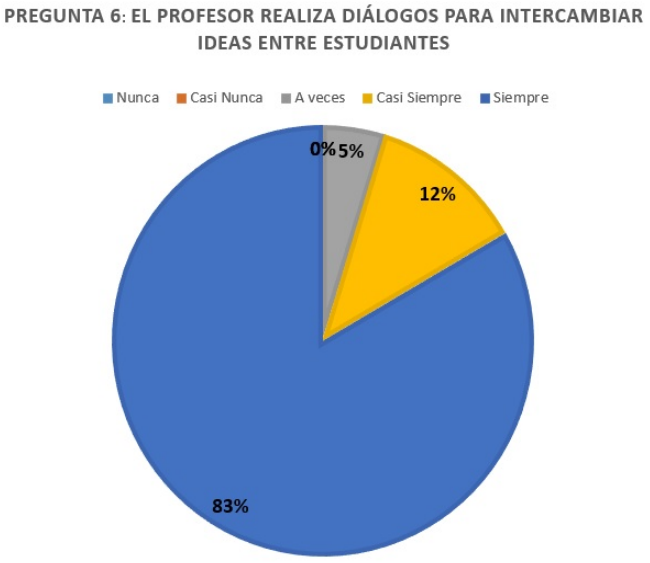
6. El profesor realiza diálogos para intercambiar ideas entre estudiantes.

Tabla 12: Diálogos para intercambiar ideas entre estudiantes.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	4	4,76
Casi Siempre	10	11,90
Siempre	70	83,33
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 26: Pregunta 6.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Para reforzar los conocimientos matemáticos en los estudiantes se puede observar que el docente si aplica el intercambio de ideas entre estudiantes, ya que hay algunos estudiantes que si tienen algunos conocimientos más avanzados que otros de los temas a tratarse y así se promueve en ellos una actitud crítica.

7. El profesor organiza grupos de trabajo para realizar diferentes actividades.

Tabla 13: Organización de grupos de trabajo.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	1	1,19
Casi Siempre	3	3,57
Siempre	80	95,24
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 27: Pregunta 7.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

En esta pregunta vemos que en mayoría de las clases el docente si realiza la organización de trabajos en grupo para desarrollar diferentes actividades como son realización de talleres y así los alumnos logren reforzar más sus conocimientos y puedan aplicar en el desarrollo de las evaluaciones sin presentar ninguna dificultad. Además con esta estrategia el docente debe aplicar en cada clase para ver si los estudiantes han comprendido el tema tratado.

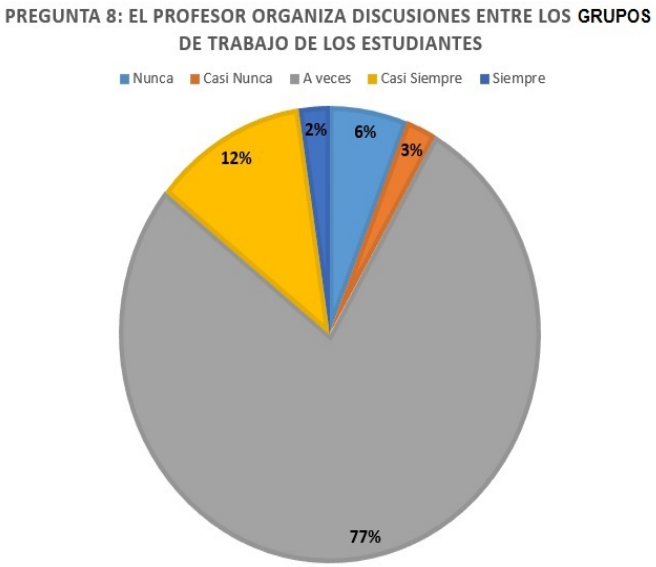
8. El profesor organiza discusiones entre los grupos de trabajo de los estudiantes.

Tabla 14: Discusiones entre los grupos de trabajo.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	5	5,95
Casi Nunca	2	2,38
A veces	65	77,38
Casi Siempre	10	11,90
Siempre	2	2,38
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 28: Pregunta 8.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Con respecto a esta pregunta, el docente en la mayoría de las clases se puede observar que si les permite realizar discusiones entre los grupos de trabajo, es decir, se puede manifestar que lo mejor es realizar las discusiones entre los integrantes de cada grupo de trabajo que sería lo más recomendable para así cada estudiante permita ejercitar el desarrollo del análisis, el razonamiento, el conocimiento y la comprensión de los contenidos matemáticos.

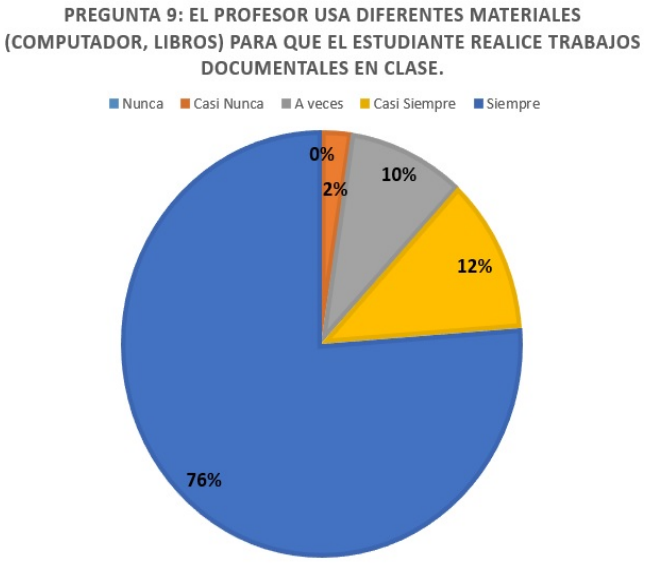
9. El profesor usa diferentes materiales (computador, libros, entre otros) para que el estudiante realice trabajos documentales en clase.

Tabla 15: Uso de materiales (computador, libros, entre otros).

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	2	2,38
A veces	8	9,52
Casi Siempre	10	11,90
Siempre	64	76,19
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 29: Pregunta 9.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Aquí se puede observar que los estudiantes encuestados indican que el docente si usa otros recursos para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje para poder profundizar más sus conocimientos matemáticos como son el uso de los libros, el uso de aplicaciones informáticas como son los software matemáticos o aplicaciones matemáticas online, entre otras.

10. El profesor promueve a realizar trabajos en forma independiente.

Tabla 16: Trabajos en forma independiente.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	5	5,95
Casi Siempre	5	5,95
Siempre	74	88,10
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 30: Pregunta 10.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Esta es una de las preguntas fundamentales en donde el docente puede realizar el análisis individual de cada estudiante, es decir, aquí se verá si el estudiante ha comprendido los temas tratados mediante los trabajos independientes en el aula, ya sean estas con talleres individuales, actuación en clase o lo fundamental con las evaluaciones escritas.

11. El profesor envía trabajos extraescolares sobre el tema tratado de la clase para reforzar los conocimientos.

Tabla 17: Trabajos extraescolares.

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	0	0
Casi Siempre	4	4,76
Siempre	80	95,24
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 31: Pregunta 11.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Se puede observar en el diagrama que en su mayoría los estudiantes indican que el docente si envía trabajos extraescolares sobre temas tratados en la clase para reforzar los conocimientos matemáticos, es decir, aquí el estudiante debe poner más énfasis en el desarrollo de las aplicaciones matemáticas.

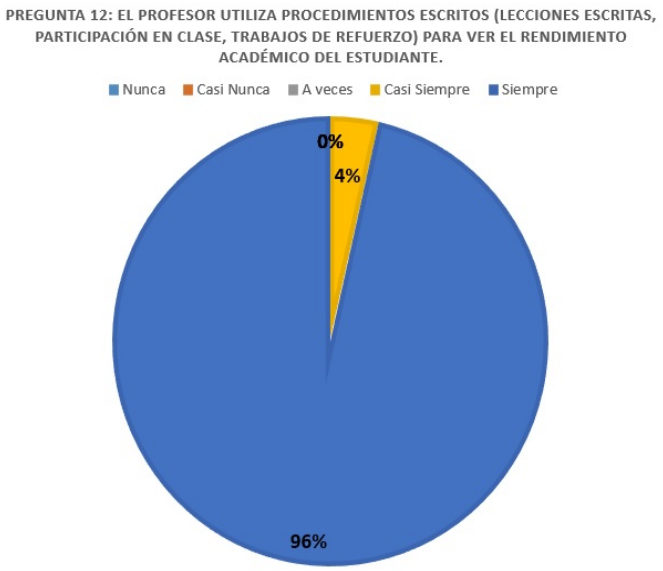
12. El profesor utiliza procedimientos escritos (lecciones escritas, participación en clase, trabajos de refuerzo) para ver el rendimiento académico del estudiante.

Tabla 18: Procedimientos escritos (lecciones escritas, participación en clase, trabajos de refuerzo).

	Número de Estudiantes	**Porcentaje (%)**
Nunca	0	0
Casi Nunca	0	0
A veces	0	0
Casi Siempre	3	3,57
Siempre	81	96,43
TOTAL ESTUDIANTES	84	

Fuente: Elaboración Propia.

Figura 32: Pregunta 12.



Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Finalmente los estudiantes encuestados indican en su mayoría que el docente si realiza evaluaciones escritas, participación en clase, trabajos de refuerzo para así poder ver el rendimiento académico de cada estudiante y así con la utilización de esta estrategia el docente permite tener una evaluación más integral.

5.3. Resultados de antes y después de aplicar la estrategia didáctica

Para el análisis de resultados, consideramos al inicio la calificación antes de haber aplicado la estrategia didáctica, en la cual se evaluaron las siguientes evidencias: actividades individuales, actividades grupales, tareas extraescolares, lecciones escritas y una prueba final del bloque durante un periodo de cinco semanas, tiempo en el cual se enfatizó principalmente en el temario de derivación de funciones. Similar actividad se ha realizado para obtener la calificación después de haber aplicado la estrategia didáctica dentro de un periodo similar al anteriormente expuesto.

A continuación se indica la tabla donde se encuentran los resultados de las dos evaluaciones sobre una calificación de 10 puntos en segunda y tercera columnas, es decir, la calificación antes y después de la aplicación de la estrategia didáctica para cada uno de los 84 estudiantes que formaron parte del experimento.

En la cuarta columna se muestra la diferencia entre la primera calificación (antes de haber aplicado la estrategia didáctica) y la segunda calificación (después de haber aplicado la estrategia didáctica), y debido a que el número de estudiantes es mayor que 30, para el contraste de hipótesis que se detallará a continuación se utilizará la prueba estadística paramétrica Z pareada.

Finalmente en la tabla se tiene que adicionar como resultado el cálculo de la media y de la desviación estándar muestrales para realizar los análisis respectivos.

Contraste de hipótesis

Prueba estadística seleccionada: Prueba Z pareada

Variables aleatorias:

X_1: La calificación en la asignatura de Matemática Superior de un estudiante de Tercero de Bachillerato General Unificado antes de haber aplicado la estrategia didáctica para el temario de derivación de funciones.

X_2: La calificación en la asignatura de Matemática Superior de un estudiante de Tercero de Bachillerato General Unificado después de haber aplicado la estrategia didáctica para el temario de derivación de funciones.

Parámetro objetivo (Diferencia de medias de las calificaciones):

$$\mu_D = \mu_1 - \mu_2$$

Estimador puntual (Media aritmética de la diferencia de medias de las calificaciones):

$$\overline{D} = -1.4$$

Valor de referencia:

$$D_0 = 0$$

Hipótesis nula: La estrategia didáctica no incide positivamente en la calificación de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en la asignatura de Matemática Superior dentro del temario de derivación de funciones

$$H_0 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

Hipótesis alternativa: La estrategia didáctica incide positivamente en la calificación de los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en la asignatura de Matemática Superior dentro del temario de derivación de funciones

$$H_1 : \mu_D = \mu_1 - \mu_2 < 0$$

Valor α

$$\alpha = 0.05$$

Estadístico de prueba:

$$z = \frac{\overline{D} - D_0}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \approx \frac{\overline{D} - D_0}{\frac{s_D}{\sqrt{n}}} \approx \frac{-1.43 - 0}{\frac{1.54}{\sqrt{84}}} \approx -8.511$$

Región de rechazo:

La hipótesis nula se rechaza si

$$z < -z_\alpha$$

$$-8.511 < -1.645$$

Conclusión del contrate de hipótesis:

Con un 95 % de confianza podemos rechazar la hipótesis nula, en favor de la hipótesis alternativa, esto implica que la implementación de la estrategia didáctica para la enseñanza de derivación de funciones incide positivamente sobre las calificaciones de estudiantes de Tercer Año de Bachillerato General Unificado.

Figura 33: Calificaciones antes y después de la aplicación de la estrategia didáctica

ALUMNOS	PRUEBA 1	PRUEBA 2	DIFERENCIA
Alumno 1	8.00	8.50	-0.50
Alumno 2	5.50	6.00	-0.50
Alumno 3	8.50	9.00	-0.50
Alumno 4	5.75	6.50	-0.75
Alumno 5	5.00	5.00	0.00
Alumno 6	10.00	10.00	0.00
Alumno 7	4.75	6.00	-1.25
Alumno 8	10.00	10.00	0.00
Alumno 9	8.75	9.00	-0.25
Alumno 10	3.50	7.00	-3.50
Alumno 11	5.00	7.00	-2.00
Alumno 12	9.00	10.00	-1.00
Alumno 13	5.50	9.25	-3.75
Alumno 14	4.00	6.00	-2.00
Alumno 15	3.50	6.00	-2.50
Alumno 16	4.00	7.00	-3.00
Alumno 17	3.50	4.00	-0.50
Alumno 18	3.50	5.00	-1.50
Alumno 19	6.75	9.00	-2.25
Alumno 20	7.00	7.00	0.00
Alumno 21	9.00	9.00	0.00
Alumno 22	8.00	8.00	0.00
Alumno 23	5.00	6.00	-1.00
Alumno 24	3.50	6.00	-2.50
Alumno 25	7.00	10.00	-3.00
Alumno 26	3.50	4.00	-0.50
Alumno 27	4.75	7.25	-2.50
Alumno 28	6.00	7.75	-1.75
Alumno 29	6.00	9.50	-3.50
Alumno 30	8.50	8.25	0.25
Alumno 31	7.00	9.00	-2.00
Alumno 32	3.50	6.00	-2.50
Alumno 33	9.00	9.50	-0.50
Alumno 34	3.50	7.00	-3.50
Alumno 35	3.50	7.00	-3.50
Alumno 36	3.50	6.00	-2.50
Alumno 37	10.00	9.00	1.00
Alumno 38	7.00	6.00	1.00
Alumno 39	3.50	6.00	-2.50
Alumno 40	9.00	9.00	0.00
Alumno 41	5.00	9.00	-4.00
Alumno 42	3.50	4.00	-0.50
Alumno 43	3.50	6.00	-2.50
Alumno 44	5.00	6.00	-1.00
Alumno 45	4.00	7.50	-3.50
Alumno 46	5.00	7.00	-2.00
Alumno 47	7.00	7.00	0.00
Alumno 48	5.00	7.50	-2.50
Alumno 49	3.50	6.00	-2.50
Alumno 50	3.50	5.00	-1.50
Alumno 51	9.00	7.50	1.50
Alumno 52	5.00	6.00	-1.00
Alumno 53	5.00	6.00	-1.00
Alumno 54	4.00	7.00	-3.00
Alumno 55	4.00	6.00	-2.00
Alumno 56	5.00	6.00	-1.00
Alumno 57	4.00	6.00	-2.00
Alumno 58	5.00	7.00	-2.00
Alumno 59	8.00	9.75	-1.75
Alumno 60	3.50	5.00	-1.50
Alumno 61	6.00	7.00	-1.00
Alumno 62	6.00	6.00	0.00
Alumno 63	8.00	8.50	-0.50
Alumno 64	5.00	7.00	-2.00
Alumno 65	3.50	6.00	-2.50
Alumno 66	9.00	10.00	-1.00
Alumno 67	7.25	7.50	-0.25
Alumno 68	9.50	7.00	2.50
Alumno 69	3.50	6.00	-2.50
Alumno 70	6.00	9.00	-3.00
Alumno 71	4.00	6.00	-2.00
Alumno 72	3.50	6.00	-2.50
Alumno 73	3.50	7.00	-3.50
Alumno 74	5.00	6.00	-1.00
Alumno 75	3.00	9.00	-6.00
Alumno 76	10.00	7.00	3.00
Alumno 77	4.50	6.00	-1.50
Alumno 78	3.50	7.00	-3.50
Alumno 79	7.00	7.00	0.00
Alumno 80	7.00	6.00	1.00
Alumno 81	4.00	6.00	-2.00
Alumno 82	3.00	6.00	-3.00
Alumno 83	3.00	4.00	-1.00
Alumno 84	5.00	4.00	1.00
MEDIA	5.6	7.0	-1.43
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	2.12	1.58	1.54

Fuente: Elaboración propia
Elaborado por: Xavier Morillo

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Conclusiones

1. Basado en el problema que presentan los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado en la materia de Matemática Superior en donde se evidencia una notoria dificultad en la derivación de funciones, este trabajo se enfocó básicamente en que el estudiante domine el concepto de derivada de funciones poniendo especial atención al empleo de la Regla de la Cadena con el fin de efectuar la derivación de funciones compuestas.

2. El trabajo se fundamentó en la Estrategia Didáctica del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), en donde la explicación que el docente da durante la clase demostrativa se enfoca más en los trabajos grupales e individuales, los resultados obtenidos muestran que el empleo de la Estrategia Didáctica es eficaz durante el trabajo que realiza el estudiante, con esto, el docente observa que los alumnos ponen más énfasis en buscar soluciones a los problemas que se les presenta.

3. Con el ABP, el docente tiene la oportunidad de conformar los grupos con un líder que domine la materia y dos estudiantes más que presenten dificultad durante desarrollo de las aplicaciones; una vez aplicado esto, el docente puede ya, evaluar de forma individual para así, observar si los estudiantes pueden resolver aplicaciones de derivadas de funciones principalmente enfocadas a derivadas de funciones compuestas y además con esto el docente también puede reforzar mediante el uso de las tareas extra escolares para que de esta forma el estudiante practique más sobre el tema estudiado.

4. También se puede observar con los resultados de las evaluaciones y en la encuesta realizada, que los estudiantes hoy en día muestran un gran interés por usar las TIC'S, constituyéndose éstas como una de las herramientas más poderosas que contribuyen con el desarrollo del estudio de la Matemática, ya que con esto los alumnos muestran una mayor responsabilidad por aprender a derivar funciones de cualquier tipo, ya que con cualquier software seleccionado, ellos pueden comparar resultados e incluso con la utilización de aplicaciones especializadas como WolframAlpha en la cual les permite verificar paso a paso el desarrollo de algunos ejercicios

ya resueltos previamente por ellos; y así de esta manera, se sientan más seguros durante el desarrollo de sus problemas con la comparación de los resultados obtenidos.

5. Con este trabajo lo que se pretende es que los estudiantes que piensan seguir carreras universitarias sobre todo a los estudiantes que aspiran a ingresar a carreras tanto en ciencias exactas como en ingenierías no presenten dificultad en este tema que es derivar funciones.

6.2. Recomendaciones

1. Es fundamental que los docentes del Área de Matemática usen la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas, ya que con la misma, el docente emplea de manera clara y atractiva la clase; y así se logrará la motivación del estudiante a que logre ser participe de la construcción de su conocimiento.

2. Con respecto a las estrategias grupales, se recomienda realizar talleres y trabajos de grupo para que así los estudiantes logren analizar e intercambiar ideas en sus trabajos para profundizar sus conocimientos.

3. Se recomienda a los docentes también aplicar las estrategias individuales ya que con esto los estudiantes van a realizar de manera óptima investigaciones ya sea en libros o a través del internet para profundizar más en sus conocimientos y con esto los estudiantes se pueden enfocar a resolver problemas que se les presente en la vida cotidiana.

4. Los docentes deben enseñar a los estudiantes a usar las TIC'S para incentivar la seguridad en el desarrollo de aplicaciones matemáticas, principalmente para la comparación de resultados, realización de gráficas, entre otras; con el fin de que los estudiantes se sientan seguros de su trabajo realizado. Esto se lo puede realizar de la siguiente manera:

   a) Exponer al docente en la misma aula con la ayuda de un proyector y de una computador.

   b) Si hay la disponibilidad en las instituciones llevar a los estudiantes a los laboratorios de Informática.

Apéndice A

Aplicaciones de Derivadas de Funciones

Usar la definición de la Derivada para completar el siguiente cuadro:

Tabla 19: Aplicaciones recta tangente y recta normal.

Función	**Punto**	**Recta Tangente**	**Recta Normal**
$h(x) = 4x^2 + 6$	$P = (1, 10)$		
$h(x) = -3x^2 + 2x + 1$	$P = (0, 1)$		
$h(x) = 8x^3 - 10$	$P = (1, -2)$		
$h(x) = \sqrt{x+2}$	$P = (7, 3)$		
$h(x) = \frac{1}{5}x^2 + \sqrt{x}$	$P = (1, \frac{6}{5})$		

Fuente: Tomado de [7]

Utilizar las reglas o leyes, calcule la derivada de las siguientes funciones:

Tabla 20: Aplicaciones con las reglas de derivación.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 12$	$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 - 3x^{-1}$
$f(x) = (x^2 + 4)(x^3 - 3x + 2)$	$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$
$h(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$	$j(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3}(x^2 - 2x^{-1} + 1)$
$g(x) = \frac{3\sqrt{x}+1}{2+\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{x^{-2}+x^{-3}}{x^{-5}+x^{-4}}$
$h(x) = \frac{ax^2+bx+c}{ax+b}$	$i(x) = \left(\frac{9}{5}x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(3x^3 + 6x - \frac{5}{\sqrt{x}}\right)$
$f(x) = \frac{\sqrt[3]{2ax^5}}{2a^2} - \frac{3b^3}{\sqrt[3]{3bx^5}}$	$i(x) = \frac{(2x^2+1)(2x^2-1)}{4x^2+2}$

Fuente: Tomado de [7]

Hallar la derivada de las siguientes funciones compuestas.

Tabla 21: Aplicaciones de derivadas con funciones compuestas.

$f(x) = (9x^3 + 5x - 1)^3$	$f(x) = (x^{-3} + 5x^{-2} + \frac{1}{2}x)^5$
$f(x) = \sqrt{9x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 5x + 1}$	$f(x) = \sqrt[4]{16x^4 + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}}}$
$h(x) = (9x^3 + 5x - 1)^{-\frac{1}{4}}$	$j(x) = \frac{1}{(10x^3 - 3x^2 + 4x + 8)^6}$
$g(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{7}{x^6}}$	$f(x) = \left(\frac{3x+1}{2x-5}\right)^3$
$h(x) = (x + 5)^4.(x^2 - 1)$	$i(x) = \frac{(x^2+1)^3}{(2x-3)^2}$
$f(x) = \left(\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{x^2-3x+1}}\right)^3$	$i(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+5x-1}}$

Fuente: [7]

Utilice las leyes de las derivadas de funciones trigonométricas y calcule la derivada de las siguientes funciones.

Tabla 22: Aplicaciones de derivadas con funciones trigonométricas.

$f(x) = 3\,\mathrm{sen}(3x)$	$f(x) = \frac{\mathrm{sen}\, x}{1 - 2\cos x}$
$f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x^3+1)}{1 - 2\cos(x^3+1)}$	$f(x) = \frac{\tan x}{\cos x - 4}$
$h(x) = \frac{2\tan^2(x+2)}{\cos(x+2)}$	$j(x) = \sqrt{\frac{\cot x^2}{1 - \tan(x^2)}}$
$g(x) = \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{\cot^2 x + 1}}$	$f(x) = \cos^2\left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)$
$h(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$	$i(x) = \cos\left(\sqrt{\mathrm{sen}\, x}\right)$
$f(x) = \frac{\mathrm{sen}(3x+4)}{\cos(5x-2)}$	$i(x) = (\mathrm{sen}^2\, x)(\cos^2 x)$

Fuente: Tomado de [7]

Utilice las leyes de las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas; y calcule la derivada de las siguientes funciones:

Tabla 23: Aplicaciones de derivadas con funciones exponenciales y logarítmicas.

$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$	$f(x) = \log(x^3 + 2x) + \ln(\sqrt{2x-1})$
$f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$	$f(x) = 5e^{x^2-2x+1} - \log(3x^2 + 7x - 6)$
$h(x) = \ln\left[\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$	$j(x) = -\frac{1}{\text{sen}^2 x} + \ln(\tan x)$
$g(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^5}{(x+1)^5}\right]$	$f(x) = 2x(3)^{x^2+2} + \ln(x^2 - x + 2)$
$h(x) = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$	$i(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$
$f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2-a^2})$	$i(x) = \ln\left[\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}\right]$

Fuente: Tomado de [7]

Utilice las leyes de las derivadas de funciones trigonométricas inveras y calcule la derivada de las siguientes funciones:

Tabla 24: Aplicaciones de derivadas con funciones trigonométricas inversas.

$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)\arctan x$	$f(x) = \sqrt{1+\operatorname{arc\,sen} x}$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arc\,sen}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$
$h(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	$j(x) = \sqrt{a}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$
$g(x) = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$	$f(x) = \ln\left[\tan(\frac{x}{\sqrt{2}})\right]$
$h(x) = \sqrt{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$	$i(x) = \tan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right)$
$f(x) = \operatorname{arccsc}\left(\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}-2}\right) + \operatorname{arcsec}\left(\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}-2}\right)$	$i(x) = \frac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$

Fuente: Tomado de [7]

Referencias

[1] *Geogebra*. Disponible en: http://www.geogebra.org/. Consultado en Marzo 20, 2016.

[2] *Wolfram Alpha*. Disponible en: https://www.wolframalpha.com/. Consultado en Marzo 20, 2016.

[3] *Biografías y Vidas*, La Enciclopedia Biográfica en Línea - Pierre de Fermat, (2004-2016).

[4] *Aprendizaje Basado en Problemas*, Universidad Politécnica de Madrid, (2008).

[5] C. Azcárate, *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*, No 2 (2003).

[6] P.A. Barrientos, *Libro - Taller para la Enseñanza del Concepto de Derivada es el Grado 11°*

[7] G.P. Escobar, *Matemática 3 para el Tercer Curso Diversificado de Físico Matemático*, Quito, 2009.

[8] C. D. Flores, *Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de la Derivada en el Bachillerato*, Habana, 1996.

[9] L. Leithold, *El Cálculo*, México, 1998.

[10] Nieto, J. B., *Las matemáticas en el bachillerato*. Disponible en: http://roble.pntic.mec.es/jbrihueg/Principal/MBgonz.htm. Consultado en Enero 20, 2015.

[11] T. Ortega, *El Concepto de Derivada. Algunas Indicaciones para su Enseñanza*, Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, No. 32 (1998).

[12] Y. Robayo, *Desarrollo del Concepto de la Derivada sin la Noción del Límite*, Bogotá, 2011.

[13] C. V. Sepúlveda, *Un Modelo Cognitivo para la Construcción del Concepto Regla de la Cadena.*

[14] G. Sánchez, *La Comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática*, (2008).

[15] Solis, A. H., *Estrategia didáctica-derivada de funciones trigonométricas*. Disponible en: http://portalacademico.cch.unam.mx/materiales/prof/matdidac/estrategias/docs/matematicas/estrategia_calculo2_armandohernandez.pdf. Consultado en Noviembre 29, 2014.

[16] P. A.B. Tascón, *Taller para la Enseñanza del Concepto de Derivada en el Grado 11°*, Medellín, 2014.

[17] Varios, *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la Socioepistemología y la Visualización en el Aula*, Díaz de Santos, Madrid, 2007.

[18] WolframAlpha, *WolframAlpha en español*. Disponible en: http://wolframalpha0.blogspot.com/2012/01/como-calcular-derivadas-con-wolfram.html. Consultado en Abril 25, 2015.

Apéndice B

Evaluación 1

NOMBRE: ..... FECHA: .....
CURSO : 3ro. B.G.U.
GRUPO: 1 - 2
DOCENTE: Ing. Xavier Morillo

Si quieres conseguir el éxito en tu vida, los estudios son un paso para conseguirlo.

INSTRUCCIONES

- Antes de comenzar el examen de base estructurada, complete los datos personales que figuran en la portada.
- Lea con atención las preguntas y seleccione la respuesta correcta. Algún manchón o corregido con corrector queda anulada la pregunta.
- Desarrolle su evaluación con esferográfico azul o negro.
- El valor total de la evaluación es de 10 puntos.
- El tiempo del examen es de 60 minutos
- Recuerde que debe trabajar solo, alguna inquietud, consulte con el maestro, porque la copia del examen por cualquier medio es deshonestidad académica de tipo II según el Art. 223 y 224, la misma que recibirá una acción disciplinaria y una calificación de cero como lo señala el Art.226.

I. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: SIMPLE

1) El valor del límite lateral de la función $f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si } x \leq 1 \\ 3-x & \text{si } 1 < x \end{cases}$ es: (0,5 puntos)

a) 0 b) 1 c) 2 d) No existe el límite

2) La derivada de la función $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}}$ es: (0,5 puntos)

a) $h'(x) = -\frac{1}{2(x+a)\sqrt{x+a}}$

b)$h'(x) = \frac{1}{2(x+a)\sqrt{x+a}}$

c) $h'(x) = -\frac{1}{2(x+a)\sqrt[3]{x+a}}$

d) $h'(x) = \frac{1}{2(x+a)\sqrt[3]{x+a}}$

II. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: ORDENAMIENTO

3) Ordene los pasos que se siguen para determinar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x^2+5x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ x-5 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$ en el intervalo I = [0,10] y escoja la respuesta correcta (0,5 puntos)

1. Verificar si cumple $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$
2. Comprobar si f(5) existe
3. Verificar si cumple $\lim_{x\to 10^-} f(x) = f(10)$
4. Comprobar si $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$
5. Calcular los límites laterales $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 5^+} f(x)$

a) 1 – 5 – 2 – 4 – 3 b) 2 – 5 – 4 – 1 – 3 c) 1 – 2 – 5 – 4 – 3 d) 5 – 1 – 4 – 2 – 3

III. ITEM MÚLTIPLE DE OPCIÓN MÚLTIPLE: COMPLETACIÓN

Complete la siguiente definición y seleccione la respuesta correcta.

4) Para que la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ sea continua en todos los números reales, los valores de c y k son: (1 punto)

c = ... k = ...

a) c=3, k=4

b) c=4, k=3

c) c=3, k=-4

d) c=-3, k=4

IV. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: RELACIÓN DE COLUMNAS

5) Relacione las siguientes operaciones de derivadas con la respuesta según corresponda (1 punto)
Si $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - x, h(x) = 2x - 1$, entonces:

1) $2[f'(x) + g'(x)]$	a) $2x - 1$
2) $f'(x) - g'(x)$	b) $4x + 1$
3) $[f(x).h(x)]'$	c) $2(1 - x)$
4) $4f'(x) + g'(x) - 2h'(x)$	d) $4x$

RESPUESTAS:
a) 1c – 2d – 3a – 4b
b) 1c – 2d – 3b – 4a
c) 1d – 2c – 3a – 4b
d) 1d – 2c – 3b – 4a

V. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: APLICACIÓN DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS. Resuelva los siguientes ejercicios y escoja la respuesta correcta. **JUSTIFIQUE SU RESPUESTA**

6) La derivada de la función $f(x) = (4 - x^5)^2(3x^2 - 4)^3$ es: (2 puntos)

a) $f'(x) = -8x(4 - x^5)(3x^2 - 4)^2(-6x^5 + 5x^3 + 9)$
b) $f'(x) = 8x(4 - x^5)(3x^2 - 4)^2(-6x^5 + 5x^3 + 9)$
c) $f'(x) = 2x(4 - x^5)(3x^2 - 4)^2(-6x^5 + 5x^3 + 9)$
d) $f'(x) = -2x(4 - x^5)(3x^2 - 4)^2(-6x^5 + 5x^3 + 9)$

7) La derivada de la función $j(x) = \tan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \cot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ es: (2 puntos)
a) $j'(x) = -\frac{4}{x^2+1}$
b) $j'(x) = \frac{4}{x^2+1}$
c) $j'(x) = -\frac{2}{x^2+1}$
d) $j'(x) = \frac{2}{x^2+1}$

8) La derivada de la función $h(x) = \ln(\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x})$ es: (2 puntos)

a) $h'(x) = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}$

b) $h'(x) = -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}$

c) 2

d) -2

9) La recta tangente a la curva $16x^4 + y^4 = 32$ en el punto $P = (1, 2)$ es: (1 punto)

a) $x + 2y = 0$

b) $2x - y = 0$

c) $2x + y - 4 = 0$

d) $-2x + y + 4 = 0$

Apéndice C

Evaluación 2

NOMBRE: ..... FECHA: .....
CURSO : 3ro. B.G.U.
GRUPO: 1 - 2
DOCENTE: Ing. Xavier Morillo

Si quieres conseguir el éxito en tu vida, los estudios son un paso para conseguirlo.

INSTRUCCIONES

- Antes de comenzar el examen de base estructurada, complete los datos personales que figuran en la portada.
- Lea con atención las preguntas y seleccione la respuesta correcta. Algún manchón o corregido con corrector queda anulada la pregunta.
- Desarrolle su evaluación con esferográfico azul o negro.
- El valor total de la evaluación es de 10 puntos.
- El tiempo del examen es de 60 minutos
- Recuerde que debe trabajar solo, alguna inquietud, consulte con el maestro, porque la copia del examen por cualquier medio es deshonestidad académica de tipo II según el Art. 223 y 224, la misma que recibirá una acción disciplinaria y una calificación de cero como lo señala el Art.226.

I. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: SIMPLE

1) El valor de la constante k para que la función sea continua en todos los números reales $f(x) = \begin{cases} -kx^2, & \text{si } x < 4 \\ 16 - 6x, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$ es: (0,5 puntos)

a) -2 b) $-\frac{1}{2}$ c) 2 d) $\frac{1}{2}$

2) La derivada de la función $f(x) = xe^{2x}$ es: (0,5 puntos)

a) $f'(x) = e^{2x}(x + 1)$

b)$f'(x) = e^{2x}(x - 1)$

c) $f'(x) = e^{2x}(2x - 1)$

d) $f'(x) = e^{2x}(2x + 1)$

II. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: ORDENAMIENTO

3) Ordene los pasos que se siguen para resolver el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = 8$ y escoja la respuesta correcta (0,5 puntos)

1. Desarrollamos $(4 + x)^2$
2. Evaluamos el límite
3. Simplificamos 16 - 16
4. Simplificamos la variable x
5. Aplicamos sustitución directa

a) 1 – 5 – 2 – 4 – 3 b) 3 – 4 – 1 – 2 – 5 c) 4 – 5 – 3 – 2 – 1 d) 5 – 1 – 3 – 4 – 2

III. ITEM MÚLTIPLE DE OPCIÓN MÚLTIPLE: COMPLETACIÓN

Complete la siguiente definición y seleccione la respuesta correcta.

4)La derivada del..... de dos funciones es igual a la..... función por la derivada de la segunda función..... la..... función por la derivada de la primera función si estas derivadas existen. (0,5 puntos)

a) Producto, primera, más, segunda
b) Suma, segunda, más, primera
c) Cociente, primera, menos, segunda
d) Diferencia, segunda, menos, primera

5) Complete en los espacios mediante el uso de la Regla de la Cadena y encuentre la derivada de la siguiente función compuesta (1 punto)

$f(x) = (\frac{3x-4}{x-5})^3$
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
$u =$ .....
$y = (.....)^3$

IV. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: RELACIÓN DE COLUMNAS

6) Relacione las siguientes operaciones de derivadas con la respuesta según corresponda (1 punto)
Si $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - x, h(x) = 2x - 1$, entonces:

1) $2[f'(x) + g'(x)]$	a) $2x - 1$
2) $f'(x) - g'(x)$	b) $4x + 1$
3) $[f(x).h(x)]'$	c) $2(1 - x)$
4) $4f'(x) + g'(x) - 2h'(x)$	d) $4x$

RESPUESTAS:
a) 1c – 2d – 3a – 4b
b) 1c – 2d – 3b – 4a
c) 1d – 2c – 3a – 4b
d) 1d – 2c – 3b – 4a

V. ITEM DE OPCIÓN MÚLTIPLE: APLICACIÓN DE CONCEPTOS Y PRINCIPIOS. Resuelva los siguientes ejercicios y escoja la respuesta correcta. **JUSTIFIQUE SU RESPUESTA**

7) La derivada de la función $f(x) = \frac{(x^2+1)^3}{(2x-3)^2}$ es: (2 puntos)

a) $f'(x) = \frac{2(x^2+1)^2(4x^2-9x-2)}{(2x-3)^3}$

b) $f'(x) = \frac{4(x^2+1)^2(4x^2+9x+2)}{(2x-3)^3}$

c) $f'(x) = -\frac{2(x^2-1)^2(4x^2-9x-2)}{(2x-3)^3}$

d) $f'(x) = -\frac{4(x^2-1)^2(4x^2-9x-2)}{(2x-3)^3}$

8) La derivada de la función $j(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ es: (1 punto)

a) $j'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

b) $j'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

c) $j'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

d) $j'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

9) El valor de L del límite trigonométrico $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\operatorname{sen} x-\cos x} = L$ (2 puntos)

a) $L = \sqrt{2}$
b) $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $L = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $L = -\sqrt{2}$

10)La recta tangente a la curva $xy^3 - 4y^2 = x^2$ en el punto $P = (4, 2)$ es: (1 punto)
a) $x + 2 = 0$
b) $y - 2 = 0$
c) $x + y = 0$
d) $x - y = 0$

Apéndice D

TABLA PARA DERIVAR FUNCIONES

Tabla 25: Reglas para Derivar Funciones.

Derivada de la constante	Si $k =$ constante y $f(x) = k$ entonces $\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(k) = 0$
Derivada de x	Si $f(x) = x$, entonces $\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(x) = 1$
De la potencia	Si $f(x) = x^n$, entonces $\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
De la suma y resta	$\frac{d}{dx}[f(x)] \pm [g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$
Del producto	$\frac{d}{dx}[f(x)][g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$
Derivada del cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)[\frac{d}{dx}f(x)] - f(x)\left[\frac{d}{dx}g(x)\right]}{[g(x)]^2}$
Función exponencial	$\frac{d}{dx}\left[a^{f(x)}\right] = a^{f(x)}.\ln(a).\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función exponencial e	$\frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)}.\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función logaritmo	$\frac{d}{dx}[\log_a f(x)] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{f(x).\ln a}$
Logaritmo natural	$\frac{d}{dx}\{\ln[f(x)]\} = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{f(x)}$
Función seno	$\frac{d}{dx}[\text{sen}(f(x))] = \cos[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función coseno	$\frac{d}{dx}[\cos(f(x))] = -\text{sen}[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función tangente	$\frac{d}{dx}[\tan(f(x))] = \sec^2[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función cotangente	$\frac{d}{dx}[\cot(f(x))] = -\csc^2[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función secante	$\frac{d}{dx}[\sec(f(x))] = \sec[f(x)].\tan[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función cosecante	$\frac{d}{dx}[\csc(f(x))] = -\csc[f(x)].\cot[f(x)].\frac{d}{dx}[f(x)]$
Función arcoseno	$\frac{d}{dx}[\text{arc sen}(f(x))] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
Función arcocoseno	$\frac{d}{dx}[\text{arc cos}(f(x))] = -\frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
Función arcotangente	$\frac{d}{dx}[\arctan(f(x))] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{1+[f(x)]^2}$
Función arcocotangente	$\frac{d}{dx}[\text{arccot}(f(x))] = -\frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{1+[f(x)]^2}$
Función arcosecante	$\frac{d}{dx}[\text{arcsec}(f(x))] = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$
Función arcocosecante	$\frac{d}{dx}[\text{arccsc}(f(x))] = -\frac{\frac{d}{dx}[f(x)]}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Fuente: Tomado de [7]

Apéndice E

Rúbricas de Evaluación

Tabla 26: Lecciones escritas

ASPECTOS	PUNTAJE
Aplicación de cuestionarios semiestructurados: dominio de destrezas	10 PUNTOS
TOTAL	10 PUNTOS

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 27: Evaluaciones Sumativas y Examen Quimestral

ASPECTOS	PUNTAJE
Aplicación de cuestionarios en base Estructurada	10 PUNTOS
TOTAL	10 PUNTOS

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 28: Trabajos Académicos Independientes (Tareas Extra escolares)

ASPECTOS	PUNTAJE
Puntualidad en la entrega	3 PUNTOS
Orden y organización	1 PUNTO
Tarea Completa	2 PUNTOS
Contenido (Proceso lógico en el desarrollo de todos los problemas)	4 PUNTOS
TOTAL	10 PUNTOS

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 29: Actividad Grupal en Clase

ASPECTOS	PUNTAJE
Puntualidad en la entrega	3 PUNTOS
Orden y organización	1 PUNTO
Tabajo en equipo, cooperación y participación	1 PUNTO
Tarea Completa	2 PUNTOS
Contenido (Proceso lógico en el desarrollo de todos los problemas)	3 PUNTOS
TOTAL	10 PUNTOS

Fuente: Elaboración Propia.

Tabla 30: Actividad Individual en Clase

ASPECTOS	PUNTAJE
Puntualidad en la entrega	3 PUNTOS
Orden y organización	1 PUNTO
Tarea Completa	2 PUNTOS
Contenido (Proceso lógico en el desarrollo de todos los problemas)	4 PUNTOS
TOTAL	10 PUNTOS

Fuente: Elaboración Propia.

Apéndice F

Encuesta

LEA DETENIDAMENTE Y MARQUE CON UNA X SEGÚN SU CRITERIO

1. El profesor realiza la presentación de la clase mediante exposición oral.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

2. El profesor realiza la presentación de la clase mediante presentación de diapositivas.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

3. El profesor realiza demostraciones y ejercicios del contenido matemático.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

4. El profesor utiliza software matemáticos para la resolución de ejercicios.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

5. El profesor realiza retroalimentación para que el estudiante recuerde los conocimientos aprendidos

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

6. El profesor realiza diálogos para intercambiar ideas entre estudiantes

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

7. El profesor organiza equipos de trabajo para realizar diferentes actividades

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

8. El profesor organiza discusiones entre los equipos de trabajo de los estudiantes

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

9. El profesor usa diferentes materiales (computador, libros) para que el estudiante realice trabajos documentales en clase.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

10. El profesor promueve a realizar trabajos en forma independiente.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

11. El profesor envía trabajos extraescolares sobre el tema tratado de la clase para reforzar los conocimientos.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

12. El profesor utiliza procedimientos escritos (lecciones escritas, participación en clase, trabajos de refuerzo) para ver el rendimiento académico del estudiante.

a) Nunca ☐

b) Casi Nunca ☐

c) A veces ☐

d) Casi Siempre ☐

e) Siempre ☐

Resumen Final

Diseño de una Estrategia Didáctica para la enseñanza de Derivación de funciones en Tercer Año de Bachillerto General Unificado

Edwin Xavier Morillo Cadena

82 páginas

Proyecto dirigido por: Mario Armando Freire Torres, Mg

La dificultad que presentan los estudiantes de Tercero de Bachillerato General Unificado dentro del Sistema Escolar Secundario de la República del Ecuador en la materia de Matemática Superior, en el momento de llevar a cabo una de las más importantes operaciones dentro del Cálculo como lo es la derivación, ha conllevado al diseño e implementación de una estrategia didáctica para enseñar a derivar correctamente funciones compuestas, y en particular, en la enseñanza de la Regla de la Cadena aplicada a funciones compuestas algebraicas y trascendentes. Para el efecto, diseñamos la estrategia didáctica basándonos en el Aprendizaje Basado en Problemas, es decir, desarrollamos problemas matemáticos para mostrar la aplicación de la Regla de la Cadena al derivar funciones compuestas tanto de funciones algebraicas como de funciones trascedentes dentro del aula de clase, luego de efectuado este paso, se comprobaron los resultados obtenidos por los estudiantes empleando de forma combinada el motor de búsqueda computacional WolframAlpha® y el programa geométrico Geogebra®. Posteriormente, para evaluar la efectividad de la estrategia didáctica diseñada, efectuamos un análisis de las calificaciones de los estudiantes antes y después de la implementación de dicha estrategia, y, efectivamente, como se supuso, existió una evidente mejoría en las calificaciones de los estudiantes luego de aplicada la estrategia didáctica.