PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL ECUADOR
FACULTAD DE CIENCIAS FILOSÓFICO TEOLÓGICAS
ESCUELA DE FILOSOFÍA

DISERTACIÓN PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE LICENCIATURA EN FILOSOFÍA

CONSIDERACIONES PARA EL ANÁLISIS LÓGICO DE TRES PARADOJAS FILOSÓFICAS

AUTOR: MARÍA JULIA MURILLO GUERRÓN
DIRECTOR: MGTR. ALFONSO MONTALVO ZUMÁRRAGA

QUITO, 2015.

RESUMEN

Las paradojas, que son argumentos que llevan a un absurdo pero que en apariencia se presentan bien formulados, en lugar de solucionarse de acuerdo a los paradigmas científicos vigentes, ponen en evidencia que estos podrían albergar en sus preconcepciones el origen del absurdo. La rectificación de ciertas teorías ha dado como resultado un tratamiento más adecuado a las paradojas de Zenón, del mentiroso y de Russell. Las paradojas aquí presentadas son analizadas desde el punto de vista de la filosofía y la lógica, aunque su problemática tenga relación con algunas ramas de la matemática y la lingüística.

Palabras clave: paradoja, contradicción, principio de no contradicción, paradojas de Zenón, paradoja del mentiroso, paradoja de Russell.

ABSTRACT

The paradoxes are arguments that lead to an absurd but are presented seemingly well formulated, rather than being solved according to current scientific paradigms, reveal that they could hold in their preconceptions the origin of the absurd. The rectification of certain theories has resulted in a more appropriate treatment of Zeno, the liar and Russell's paradoxes. Even though their basic problems are related to some branches of mathematics and linguistics, the paradoxes presented in this document are analyzed from the point of view of philosophy and logic.

Keywords: paradox, contradiction, principle of non-contradiction, Zeno's paradoxes, the liar paradox, Russell's paradox.

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo expone tres paradojas filosóficas y algunas consideraciones para su análisis lógico.

La pregunta que se quiere responder es ¿por qué las paradojas serían relevantes para la lógica y para los fundamentos del pensamiento en general?

La hipótesis que responde a la pregunta y que se quiere comprobar es la siguiente: las paradojas son argumentos sustentados, pero que contienen un absurdo, ya sea de contenido o en su parte formal. Las paradojas son relevantes para las teorías porque para solucionar los problemas que plantean se ha requerido, en muchas ocasiones, reformular las teorías con las que se las trata.

En el desarrollo del trabajo, se responderán también otras cuestiones secundarias: si una paradoja implica en todos los casos una contradicción; si se considera que las paradojas propuestas han sido solucionadas; si hay alguna clasificación de las paradojas; si se puede establecer alguna relación o diferencia entre el concepto de 'paradoja' y otros como 'aporía', 'falacia', antinomia', 'dilema'.

Un acercamiento a las paradojas precisa, por un lado, una enunciación conceptual, y por otro lado, el análisis concreto de casos individuales. De igual forma, mientras que las diversas clasificaciones de paradojas responden a sus aspectos generales, sus respectivas soluciones versan más bien sobre los aspectos particulares de cada paradoja; por este motivo un análisis sobre el tema requiere que se involucre ambos aspectos.

Si bien se han planteado numerosas paradojas en diversas áreas del conocimiento, las que aquí se trata corresponden al contexto de la filosofía y particularmente al de la lógica. Sin embargo, la filosofía y la lógica no siempre son suficientes para resolver por sí solas las dificultades que plantean las paradojas; dado el caso, se intentará hacer una aproximación a otros campos para abordar dichas dificultades.

Esta disertación se justifica ya que, de sostenerse su hipótesis, las consecuencias son de interés para la comunidad académica en general y para la comunidad filosófica en particular. En caso contrario, si la hipótesis no se sostiene, igualmente el tema resulta importante, implicando como consecuencia que las paradojas deben considerarse insignificantes para la consistencia de las teorías y eludibles por no requerir corrección alguna.

Las paradojas han estado presentes en diferentes épocas en el pensamiento filosófico, desde la Grecia antigua hasta la contemporaneidad. De acuerdo a este punto de vista histórico, se constata que es un problema recurrente que amerita ser profundizado.

Si se logra aclarar imprecisiones terminológicas (en los casos de ‘aporía’, ‘falacia’, ‘antinomia’ y ‘dilema’ en relación al de ‘paradoja’), se podría concluir si los términos lógicos son abundantes, necesarios o insuficientes, y si responden a la simplicidad y objetividad que exige cualquier ciencia.

En cuanto a la metodología, en la primera parte del trabajo, se hará una exposición acerca de los fundamentos de la lógica, en particular sobre el principio de no contradicción. Este puede ser un antecedente importante al momento de tratar las paradojas y de definir el concepto de paradoja.

En los capítulos siguientes, se tratan las paradojas de Zenón, la paradoja de “el mentiroso” y la paradoja de Russell, en específico. Esta exposición contempla la enunciación de las paradojas, el análisis de sus problemáticas particulares, y al menos una alternativa de solución para cada una. De acuerdo a esto, se podrá contestar si estos casos expresan realmente argumentos paradójicos; y si las soluciones que se plantean, en coherencia con los axiomas de la lógica, han aportado al progreso teórico.

1. CONTRADICCIÓN Y PARADOJA

El presente capítulo trata acerca de los principios de la lógica clásica[1], en particular sobre los fundamentos teóricos del principio lógico de no contradicción, para luego abordar los problemas que suponen las paradojas en este contexto. Se hará referencia a los planteamientos de Aristóteles, quien hace una primera formulación de este principio desde una perspectiva amplia, que no solo contempla la lógica. Luego se expondrá el principio de no contradicción de acuerdo a la lógica contemporánea basada en una estructura axiomática y que reformula la concepción aristotélica. Se analizará el principio de no contradicción como axioma que postula la necesidad de inexistencia de contradicción en una estructura lógica, lo que obliga a asumir o rechazar dicho axioma al constatar razonamientos que presenten contradicción. Con base en lo expuesto, se tratará sobre la definición de paradoja.

1.1. Concepto y fundamentación aristotélica del principio de no contradicción

Al tratar sobre el principio de no contradicción es imprescindible remitirse a la obra de Aristóteles, se considera que él es el primer autor en exponer este tema, sus argumentos más importantes se encuentran en su *Metafísica*, libro IV, capítulos 3 y 4, a los cuales se hará referencia a continuación.

En los primeros capítulos de la *Metafísica* se dice que la filosofía trata de los primeros principios y de las primeras causas, a partir de los cuales se conocen las cosas.

[1] Comúnmente se entiende por "lógica clásica" a la lógica aristotélica, distinguiéndola de la lógica contemporánea. En ese caso, en este trabajo se empleará la expresión "lógica clásica aristotélica" para utilizar la expresión "lógica clásica" en distinción de las lógicas divergentes (multivaloradas, o que carecen de función veritativa) o aquellas que rechazan algún principio fundamental de la lógica. La expresión ha sido tomada de Quine en *Filosofía de la lógica*.

Aristóteles recalca que el conocimiento de estos principios no se da de forma inversa, es decir, que se obtengan a través de las cosas[2].

La filosofía, dice, es el estudio adecuado para enunciar los más firmes y ciertos principios de las cosas, o lo que es lo mismo, los primeros principios, los axiomas más generales. Hay que notar aquí una correspondencia entre 'ontología' y 'lógica', pues en el contexto de Aristóteles no se había establecido una distinción estricta entre estas, por lo que más adelante afirma que quien es conocedor del ser, de la naturaleza en su esencia, de los entes en cuanto tales, es autoridad para indagar sobre los principios silogísticos (Aristóteles, Metafísica, 1970, págs. 165-166)[3].

Antes de abordar la ciencia, explica, es preciso conocer los axiomas, y no esperar encontrarlos en el curso de la demostración (Aristóteles, Metafísica, 1972, pág. 78); esto quiere decir, que los axiomas son un conocimiento anterior al conocimiento demostrativo, son proposiciones que no son demostrables, pues con base en ellos se construye una demostración.

Las ciencias particulares tienen sus axiomas, estos tienen como fundamento otros axiomas y basan su legitimidad en ellos, son axiomas de una ciencia más general, la ciencia del ser, cuyo axioma más importante, el que permite la certeza, es el principio de no contradicción. Aristóteles destaca este principio por excelencia y lo enuncia de la siguiente forma: "Es imposible, en efecto, que un mismo atributo se dé y no se dé simultáneamente en el mismo sujeto y en un mismo sentido" (Aristóteles, Metafísica, 1970, pág. 167)[4], y agrega que se debe determinar lo más puntualmente los atributos en caso de una aparente contradicción.

Dado que es necesario para comprender las cosas e impide incurrir en error, el principio de no contradicción no puede ser una mera suposición o una hipótesis, sino el más cierto y firme de los principios, al que se acogen todas las demostraciones, porque es el principio de todos los demás axiomas.

---

[2] En Aristóteles, *Metafísica*, Madrid, Gredos, 1970, p.13 (982b 2) se habla de "Sabiduría" y "Ciencia universal". En Aristóteles, *Metafísica*, Madrid, Espasa-Calpe, Séptima edición 1972, p. 14,15 se traduce como "Filosofía"; se ha acogido este último término por razones de facilidad expositiva.
[3] *Metafísica* 1005 b6
[4] *Metafísica* 1005 b19

Sería necio pedir una demostración de este principio, primero por pedir una demostración de un principio y luego por ser autoevidente, más que cualquier otro. Esta pretensión remontaría el proceso al infinito, anulando la demostración.

Quien declarara nulo el principio de no contradicción, no puede valerse de una demostración, pues esta tendría implícita una petición del principio. Sus argumentos deberían ser una refutación, pero serán anulados a su vez, pues el solo hecho de 'enunciar' los condena al principio al que quieren renunciar. 'Decir' es la intención de significar algo para sí y para otro, y con ello se concede que hay algo definido, y en tanto definido, que 'es', que hay algo verdadero aunque no se lo haya demostrado. Las posturas de quienes argumentan el rechazo a este principio son insostenibles, pues se evidencia que ellos están sometidos a él, al razonamiento y a la demostración.

El autor se sirve de la lógica como un medio para su filosofía primera. Se podría decir que muestra al principio de no contradicción como un nexo entre ontología y lógica, lo que se constata en la siguiente explicación, en donde no está definido el límite que posteriormente se establece entre ambas.

Al conceder que hay algo verdadero, independiente de demostración, se sigue, de acuerdo a Aristóteles, que algo es o no es, y que nada en absoluto puede ser y al mismo tiempo no ser de una manera dada.

Por otra parte, dice que el nombre designa un objeto y este a su vez una esencia.

Los diversos significados que se puedan dar a un nombre deben ser limitados, y debe determinarse una significación del nombre[5], puesto que designa un objeto único. Si por el contrario, un nombre significara infinitas cosas, imposibilitaría el razonamiento. Ejemplifica esto con la palabra 'hombre' que puede tener muchos significados, uno de ellos puede ser 'animal bípedo', que al ser un significado determinado, no puede ser al mismo tiempo, conforme a la verdad, su negación, 'no-hombre'. Así muestra que el nombre designa un objeto único y designa una esencia.

[5] Se volverá sobre este punto en la sección 1.2.4. Reformulación a la concepción aristotélica

Si se diera que un mismo nombre es algo y no lo es al mismo tiempo, se trataría de un caso de homonimia, pero la posibilidad de ser y no ser simultáneamente algo determinado, antes que examinarlo en relación al nombre, hay que analizarlo de acuerdo a la realidad, en la que se encuentra que las cosas son diferenciables, por lo que sus esencias también deben serlo.

Se debe distinguir entre una naturaleza determinada y sus atributos, si no se procediera así, se negaría toda esencia y toda sustancia, y ya no solo se concebiría a las cosas opuestas como idénticas, sino a todas las cosas, como si fueran una sola.

Al negar substancia y esencia, se afirma que todo es accidental. Mas no puede ser todo accidental, pues no se puede predicar accidentes de accidentes en una cadena al infinito, al no haber una jerarquía entre estos. No habría un ente primero del cual se predique los accidentes, ni tampoco este se concebiría como una colección de accidentes.

La esencia da significado a una sola cosa, la substancia. El significar substancia equivale a decir que no es ninguna otra cosa su esencia. Dice Aristóteles que debe haber algo que signifique substancia. Afirmar de un mismo objeto que es y no es, en un mismo sentido y a un mismo tiempo, implicaría, pues, destruir toda esencia y toda sustancia.

La contradicción -afirmación y negación simultánea de algo, referida a un mismo sentido- origina absurdos *ad infinitum.* Por ejemplo, si se afirma de algo atributos contradictorios, perdería su determinación, no sería una sola y única cosa, sino que sería todo, pues posee todos los atributos (los afirmativos y los negativos), y a la vez sería nada, pues al tiempo que lo es todo, ya no lo es, al tiempo que posee todos los atributos, ya no los posee. Si se acepta esta postura, debería aceptarse también que de la afirmación que admite la contradicción, se da también su contradictoria, la negación de esa afirmación, lo que conduce nuevamente a círculos viciosos.

Por lo tratado hasta aquí, se ha destruido toda identidad, pues nada es diferenciable de sí mismo ni de otro. De lo que se afirma, también se niega, y de lo que se niega, también se afirma. Además parece forjarse una idea consolidada del no-ser, como si fuera algo cognoscible, firme y de lo que se pueda hablar.

Resulta que aquellos que afirmen sobre una contradicción y aquellos que nieguen sobre la misma contradicción, todos ellos, dirán la verdad y estarán errados al mismo tiempo. La afirmación sería verdadera y falsa, y la negación falsa y verdadera. Esta indistinción no permite la comunicación, ni puede pretender la verdad.

Aristóteles concluye que es imposible no pensar de acuerdo al principio de no contradicción, incluso para quienes no lo acepten, y presenta como prueba "tangible" de ello que en la vida práctica se actúa de acuerdo a una idea de realidad y de verdad, según esta, se prefiere algo en vez de lo que le contradice; así mismo, no se puede encontrar algo que es y no es y que sea idéntico. Sin embargo, dice, no hay que esperar encontrar este principio en lo fáctico, más importante es buscarlo en la razón.

1.2. La concepción contemporánea del principio de no contradicción

En este apartado se estudiará al principio de no contradicción como uno de la lógica contemporánea. En lo que sigue se enunciarán tres axiomas de la lógica, entre ellos el de no contradicción, se representarán a dichos axiomas en base a la lógica simbólica, se postulará el principio *ex contraditione sequitur quodlibet*, y se hará referencia a las reformulaciones actuales del principio de no contradicción aristotélico.

1.2.1. Tres axiomas de la lógica

La lógica, como cualquier sistema deductivo, parte de axiomas[6], cuyos nombres se han mantenido como: principio de identidad, principio de (no) contradicción y principio de tercero excluido.

Una explicación breve de cada uno sería:

- Principio de identidad: Todo enunciado es idéntico a sí mismo.
- Principio de contradicción: Es inadmisible que un mismo enunciado sea verdadero y falso en el mismo sentido.
- Principio de tercero excluido: Un enunciado es verdadero o es falso, un tercer valor es inadmisible.

[6] En la sección 1.3.1. se distinguirán los conceptos de 'principio' y 'axioma'

Se tiene a estos axiomas de la lógica como suficientes, y desde el punto de vista "filosófico", como principios, necesarios. La conformidad con ellos descarta las opiniones que recurren a puntos de vista psicológicos, éticos, estéticos, etc. Se afirma que no responden a consideraciones subjetivas, y que la lógica no requiere de estas disciplinas para fundamentarse, por el contrario, ellas sí requieren de la lógica para hacerlo.

1.2.2. Formalización de los tres principios de la lógica

La lógica simbólica pone en evidencia la jerarquía de lenguajes. Al lenguaje que es sometido a análisis a través de otro, se lo denomina 'lenguaje-objeto', y el lenguaje mediante el cual se puede analizarlo y comprenderlo es un 'meta-lenguaje' para aquel. De acuerdo a esto, Russell expone una interesante distinción, descompone el lenguaje natural en niveles, así, este contiene un lenguaje más básico, que tiene significado por sí mismo, sin necesidad de conexiones, pero que además es objeto de un lenguaje secundario y es enlazado por medio de palabras específicas y palabras lógicas que pertenecen a este último, resultando de esta unión un lenguaje más completo, amplio y rico. Las palabras lógicas presuponen las formas proposicionales de ese lenguaje primario y establecen las relaciones conectivas que se construyen sobre él (Russell, 1983, págs. 67-96). Esta distinción resulta indiferenciada en el lenguaje natural, pero se la puede distinguir claramente en la lógica simbólica.

El uso de símbolos hace que se pueda formalizar el lenguaje natural traduciéndolo a uno artificial, el cual resulta más manejable y comprensible para ciertos fines, como determinar la validez o invalidez de los argumentos, tarea que difícilmente se puede ejecutar desde el lenguaje natural, por estar cargado de contenido expresivo y ambiguo que obscurece el análisis para estos propósitos. Libre de estos defectos, el lenguaje simbólico esclarece las estructuras lógicas y la forma en las que se relacionan en proposiciones y razonamientos. De acuerdo a este punto de vista, que la lógica simbólica permite un análisis de la estructura formal y sintáctica de los lenguajes naturales, se la entiende como un lenguaje más general que estos, y al poder referirse a ellos se constituye como su meta-lenguaje.

Con el propósito de lograr una comprensión sobre la estructura y las relaciones que guardan entre sí los axiomas de la lógica, es necesario simbolizarlos, en este caso, en base a la lógica proposicional.

En lógica proposicional o lógica de enunciados, se denomina proposición atómica o enunciado atómico a la variable que posee valor de verdad y que representa a un enunciado de estructura simple, constituida por nombres propios y nombres comunes. La unión de enunciados simples da como resultado formas de enunciados compuestos o moleculares, mediante el uso de conectivas (estas partículas son algunas de las palabras lógicas, aquellas que se señaló anteriormente como distintas de las del lenguaje primario).

Las proposiciones atómicas, como es conocido, son representadas por letras minúsculas del alfabeto (p. ej.: *p, q, r, s,* etc.) y las conectivas por los siguientes signos:

"¬" negación (que usualmente corresponde a la palabra "no" en el lenguaje natural)
"∧" conjunción (que usualmente corresponde a la palabra "y")
"∨" disyunción (que usualmente corresponde a la palabra "o")
"→" implicación (que usualmente corresponde a la relación "si …, entonces…")
"↔" doble implicación (que usualmente corresponde a la relación "… si, y solo si, …")

El valor de verdad de un enunciado atómico responde a cuestiones de contenido empírico, temas que no caben dentro de la lógica, aunque esta asuma su valor de verdad. Mas, la verdad o falsedad de los enunciados compuestos, sí corresponde a la lógica, pues en este caso, la verdad o falsedad se infiere, ya no en referencia al contenido, sino en virtud de las formas de los enunciados compuestos. Así, la lógica proposicional determina la validez de los razonamientos y la verdad de los enunciados compuestos, con base en el análisis de las estructuras formales.

Con este breve preámbulo, la representación formalizada de los tres principios expuestos, de acuerdo a la lógica de enunciados, es la siguiente:

Principio de identidad:

$p \rightarrow p$ (o también: $p \leftrightarrow p$)

Principio del tercero excluido:

$p \vee \neg p$

Principio de no contradicción:

$\neg(p \wedge \neg p)$

Dentro de la teoría de la lógica simbólica, es sencillo justificar el paso del principio de identidad al de tercero excluido, y de este al de no contradicción (lo que es válido también a la inversa), pues son expresiones que son equivalentes en forma y consiguientemente en valor de verdad.

1.2.3. De una contradicción se sigue cualquier cosa

La lógica simbólica está diseñada como un sistema axiomático con rigor demostrativo de inferencia, justificación y validez; esto quiere decir que es consistente, que a partir de las bases del sistema no pueden deducirse contradicciones.

Los tres principios aquí tratados sustentan la lógica, lo que quiere decir que como sus axiomas garantizan su consistencia teórica.

Pseudo-Scoto, lógico del siglo XIV, de nombre Juan de Cornualles, al tratar sobre la teoría de las consecuencias, logra la siguiente formulación del principio *ex contradictione quodlibet*: "de un enunciado cuya contradicción es patente se sigue formalmente cualquier otro enunciado" (Garrido, 2005, pág. 505).

Actualmente, dicho principio es también conocido como principio de explosión, a continuación se explica su contenido. Se parte del caso con premisas contradictorias, simbolizadas por p y $\neg p$, de las que se infiere una conclusión cualquiera q.

$-1\ p$ $\vdash q$

$-2\ \neg p$

$3\ p \vee q$ Introducción de la disyunción 1

$4\ q$ Silogismo disyuntivo 3, 2

De otra forma:

$-1\ p$ $\vdash q$

$-2\ \neg p$

$3\ \neg p\ \vee q$ Introducción de la disyunción 2

$4\ q$ Silogismo disyuntivo 3, 1

En ambos casos, los pasos que sigue la deducción son la introducción de la disyunción y el silogismo disyuntivo. En el primer paso, introducción de la disyunción, se señala que dada una variable proposicional, es lícito añadir otra por medio de la disyunción, pues no se afirma a los disyuntos, sino que la acción recae sobre la operación, sobre la disyunción, que no es otra cosa que indicación de posibilidad de la variable dada o de otra variable cualquiera, y de no darse esta última, puede afirmarse únicamente la primera, siendo la operación válida. En el segundo paso, silogismo disyuntivo, se muestra que al evidenciarse contradicción que implique a un disyunto, esto es, que por un lado, se lo afirme, y que por otro lado, se lo niegue, se lo anula, concluyendo el otro disyunto.

En esta prueba se evidencia que el sistema de la lógica es consistente, al tener como axioma al principio de no contradicción. Sus reglas derivadas, tampoco lo admiten. En este caso, en el silogismo disyuntivo, es claro que está implícito el principio de no contradicción y se ejecuta a partir de él.

Volviendo al caso que explica el principio *ex contradictione (sequitur) quodlibet*: Ya sea tomado, en principio p o $\neg p$, su contradictorio lo anula, y se llega a q válidamente, por cualquiera de las dos vías. Esto es, de la forma de la proposición compuesta $p \wedge \neg p$ se acepta con absoluta flexibilidad una conclusión cualquiera, aquí representada por q. Se constata que, de premisas contradictorias se puede implicar lógicamente cualquier enunciado, incluyendo uno que ni siquiera esté incluido en las premisas, q, uno que es imposible inferir de las premisas, contraviniendo el principio analítico propio de la deducción: que la conclusión debe estar completamente implícita en la información formal de las premisas.

En conclusión, los razonamientos que contienen contradicción en sus premisas, y de los cuales se puede inferir cualquier cosa, son razonamientos inconsistentes, independientemente de su validez o invalidez, la razón de esta denominación es que faltan al principio de no contradicción.

1.2.4. Reformulación a la concepción aristotélica

Ernst Tugendhat y Ursula Wolf dedican un capítulo al principio de no contradicción en su libro *Propedéutica lógico-semántica*, en este se retoma la teoría clásica aristotélica aclarando ciertos puntos, matizándola con la lógica actual, y sobre todo contrastándola con las formulaciones del lógico contemporáneo Peter Frederick Strawson.

Tugendhat, Wolf y Strawson muestran inicialmente una aparente apertura a la contradicción, cuando aceptan como respuesta un 'sí y no' a una pregunta determinada, pues se basan en la idea de que en el lenguaje natural hay indeterminación, idea sugerida por Strawson, a la que agregan que en el ejercicio del lenguaje es posible particularizar sobre los sentidos de referencia para determinarlos y esclarecer así las contradicciones.

Sobre la enunciación aristotélica del principio de no contradicción que dice "es imposible que lo mismo [predicado] se dé y no se dé simultáneamente en el mismo sentido en lo mismo [sujeto]" (Tugendhat & Wolf, 1997, pág. 49), los autores encuentran que se podría renunciar a la referencia temporal 'simultáneamente', ya que es tan solo uno de muchos sentidos que ya está contenido en la referencia a 'el mismo sentido', siendo esta última imprescindible para precisar el predicado, con el fin de distinguir los diferentes sentidos que puede contener un mismo predicado atribuido a un sujeto, logrando así evitar la contradicción.

En relación a la forma compuesta ‘p y no-p’, Tugendhat y Wolf aclaran el nexo entre negación y falsedad. La negación de una oración, dicen, es la afirmación de que esa oración es falsa. Cuando una oración es falsa, su negación es verdadera, y esta es su opuesto contradictorio. El signo de negación -‘no’- no siempre implica la negación de una oración; por esta razón, en relación a la palabra ‘no’, encuentran que es problemático sujetar el principio de no contradicción a una formulación verbal que contenga este signo de negación, por ejemplo: ‘es necesariamente falso que **a** sea F y **a** no sea F’. Tugendhat y Wolf opinan que en términos enunciativos es más pertinente la formulación aristotélica: ‘dos oraciones opuestas contradictoriamente entre sí no pueden ser verdaderas al mismo tiempo’.

Aristóteles decía que quien refutara el principio de no contradicción tendría que admitir que dice algo y que da a entender algo determinado[7], y que el decir algo es posible porque el predicado de un juicio predicativo significa algo determinado. Acerca de esto último Tugendhat y Wolf exponen dos objeciones:

> La primera es que los predicados con frecuencia tienen varias significaciones. Esta objeción, contesta Aristóteles, no tiene importancia con tal de que el número de significados de una palabra sea, por su parte, un número determinado (1006a 34-b 2). La segunda objeción dice que ciertamente los objetos a los cuales aplicamos los predicados tienen siempre muchas determinaciones (y quizá una multiplicidad indeterminada). A esto responde Aristóteles: <<el [predicado] “hombre” no sólo se aplica a uno, sino que designa uno>> (1006b 14). Se debe por tanto, hablando modernamente, distinguir entre el significado del predicado y el objeto al cual se aplica. Mientras que el objeto ciertamente se da en una multiplicidad indeterminada de aspectos, el significado del predicado tiene que ser inequívocamente determinado (Tugendhat & Wolf, 1997, pág. 52).

El ‘predicado’ denota una función, esta es la expresión insaturada, incompleta, que predica sobre el ‘objeto’, este en cambio corresponde a los nombres propios que representan individuos, hechos, etc., y a los cuales el predicado se refiere. El objeto llena un espacio vacío que contempla el predicado, de lo que resulta la composición de la proposición.

---

[7] El propósito de Aristóteles era evidenciar que quien refutara el principio de no contradicción tendría que aceptar que da a entender algo determinado. Algo determinado no puede guardar contradicción con respecto a sí mismo, por lo que este discurso requiere necesariamente de dicho principio; es decir, que quien intentara refutar el principio de no contradicción, estaría sometido a él.
Esto fue tratado en la sección 1.1. Concepto y fundamentación aristotélica del principio de no contradicción.

De acuerdo a la explicación de los autores, Aristóteles describe a los predicados como cerrados y unidos al objeto, Tugendhat y Wolf, en cambio, consideran que estos no son determinados, más bien los caracterizan como vagos, es por eso que encuentran en Strawson una exposición más conveniente para tratar este problema.

Strawson en su libro *Introducción a una teoría de la lógica* expone los elementos del lenguaje dispuestos a una construcción constante. Una de las finalidades de una lengua, dice, es la de informar acontecimientos y describir objetos a través de palabras que son aplicadas a varias cosas, ya que de ellas resulta no sólo la comparación entre objetos sino también la distinción de lo que se quiere definir. Es así que el lenguaje no presenta límites fijos y determinados, pero tampoco resulta completamente arbitrario o deliberado para quienes hacen uso de él. El uso del lenguaje no es un acto puramente verbal sino que está basado en las necesidades expresivas de los ejecutantes, quienes deciden sobre los sentidos que utilizan al definir algo. Strawson dice que se refiere a deslindes que se parecen más a áreas de posesión indeterminadas que a líneas demarcatorias, aunque recalca que no cabe la arbitrariedad cuando se busca definir algo, pues la utilización ambigua de los vocablos recae contra el propósito del comunicante (Strawson, 1969, págs. 6-7).

Tugendhat y Wolf muestran que las 'palabras' a las que se refiere Strawson son las mismas que luego identifica como predicados, y añaden que el objeto se explica en relación al predicado, en términos de la función que este cumple en el acto de predicación; así, el predicado no es independiente del acto de predicación y se expresa en la totalidad de la aserción predicativa. Si bien los predicados no son únicos para cada objeto, estos definen a los diversos objetos, a través de la comparación con otros objetos y de la distinción de ellos.

Strawson utiliza un recurso análogo, una especie de símbolo que consiste en un límite demarcatorio para señalar la incompatibilidad de dos predicados cuando se ubican a ambos lados del límite. Tugendhat y Wolf acogen la figura propuesta por Strawson, aunque él la usa para tratar en general sobre la incompatibilidad y la inconsistencia, ellos la utilizan para tratar en particular la contradicción, explican que un objeto, de acuerdo a su predicado, se puede ubicar de un lado del límite o del otro, pero no de ambos a la vez, pues si así fuera, el valor informativo del predicado sería nulo, al tratarse de una contradicción.

Tugendhat y Wolf encuentran que las puntualizaciones de Strawson logran describir más satisfactoriamente que las aristotélicas la conexión entre el sentido del hablar como un dar a entender y la determinación del objeto.

Remitiéndose a Aristóteles, quien decía que un predicado es determinado y diferente de todos los otros predicados, Tugendhat y Wolf señalan que tal enunciación no es correcta y da lugar a malentendidos, aclaran que antes de tratarse de un predicado diferente de todos los demás, se trata de un objeto diferenciado de los demás a través de su(s) predicado(s). Esta conjetura tiene base en la exposición de Strawson. Él menciona que los predicados incompatibles se excluyen, esto es, cuando se ubican a ambos lados del límite demarcatorio, pero recalca, hay que tomar en cuenta un cierto dominio de incompatibilidades, según esto, un vocablo excluye a aquellos que son incompatibles con él, pero hay otros que en relación a este no están ni incluidos ni excluidos, pues no presentan incompatibilidad. Así se da que ‘rugoso’ es incompatible con ‘liso’, ‘duro’ con ‘no duro’, ‘amarillo’ con ‘rojo’, ‘azul’ y ‘verde’, etc., pero de esto no resulta que ‘liso’ sea incompatible con ‘verde’, o ‘amarillo’ con ‘no duro’, o ‘rojo’ con ‘duro’ y ‘rugoso’, etc. Esto explica que a un mismo objeto puedan añadirse varios predicados que, aunque no sean idénticos entre sí, convengan al objeto, siempre que sus dominios de incompatibilidad difieran entre sí, y esto no implicaría inconsistencia alguna.

De todas formas, Strawson indica una salvedad, se puede aplicar predicados comúnmente considerados incompatibles a un mismo objeto, sin que ello signifique necesariamente una contradicción[8]; al especificar los sentidos de referencia y determinar los predicados, se esclarecen las razones de su aplicabilidad y validez. Strawson dice que no puede explicarse cabalmente lo que es la contradicción con solo recurrir a agrupamientos de vocablos.

---

[8] El autor refiere como ejemplo la afirmación: ‘Mide más y mide menos de un metro con ochenta de estatura’, que presenta una aparente inconsistencia; debe aclararse que se refiere al caso de una persona que padece una enfermedad por la que tiene su cuerpo encorvado, pero, de poder erguirse, alcanzaría una estatura mayor.

Tugendhat y Wolf al respecto hallan que el límite demarcatorio siempre es más o menos borroso y el objeto que se quiera definir podría encontrarse en la línea borrosa entre los dos campos, ante esta dificultad explican que es legítimo responder con un ‘sí y no’, con la condición de que quien opte por esta respuesta esté dispuesto a precisar sobre su respuesta, es decir en qué sentidos se afirma ‘sí’ y en qué otros ‘no’, pues, si no estuviera dispuesto a precisarla y se afirmara en la contradicción sin más, no diría nada, es decir, algo que comunique, que sirva en términos informativos.

Volviendo al principio de no contradicción, Tugendhat y Wolf concluyen sobre este tema:

> El principio de contradicción no presupone por tanto de ninguna forma que tengamos predicados completamente determinados; este principio (o mejor dicho, el sentido de la predicación) implica, sin embargo, que en determinadas situaciones nos veamos obligados a determinar más exactamente nuestros predicados. La determinación más exacta es por tanto algo que no se da de antemano sino que precisamente se va dando progresivamente gracias al principio de contradicción (Tugendhat & Wolf, 1997, pág. 56).

Finalmente, Tugendhat y Wolf expresan que el principio de no contradicción no es una ley sobre la realidad, creen que su necesidad se basa en el significado de nuestras expresiones lingüísticas y en el significado de la forma de la predicación. Pero este principio, dicen, es necesariamente verdadero, y esto quiere decir simplemente que sin él, no se podría decir nada y que nuestro hablar se suspendería por sí mismo.

1.3. Implicaciones del principio de no contradicción como axioma

En esta sección se hará referencia a las consecuencias de tratar el principio de no contradicción como axioma. Se expondrá el paso de principio a axioma, distinguiendo ambos conceptos. Se discutirá el problema de la elección de axiomas, se especulará acerca de la posibilidad de un axioma que acepte la contradicción, y se referirá al problema de la abolición del principio del tercero excluido. Finalmente se hará una reseña breve a algunas lógicas que aceptan la contradicción.

1.3.1. Sobre ‘principio’ y ‘axioma’

El término ‘principio’ es pertinente en la lógica aristotélica, la que se presenta estrechamente ligada a la ontología. Así, el principio de no contradicción da razón del ser, además de ser entendido como una causa para el razonamiento, y aunque pertenezca particularmente a la lógica, en la teoría aristotélica abarca al conocimiento en general.

Al independizarse la lógica de la ontología y consolidarse suficientemente como una ciencia (en el sentido actual), la denominación de ‘principio’ sigue siendo correcta, sin que este concepto tenga necesariamente la misma connotación.

Aristóteles encontraba que la lógica era un medio para dotar de certeza a la ciencia. Pasados más de veinte siglos, la conceptualización de ‘ciencia’ presenta cambios sustanciales. Algunas de las consideradas ciencias por Aristóteles, ahora ya no lo son, en cambio, la lógica que era vista como un instrumento para la ciencia, es ahora una ciencia formal, y desde este punto de vista sus principios serían tratados como axiomas.

Según Aristóteles, los axiomas de las ciencias son sus fundamentos y son legítimos porque son evidentes; son los principios generales de las ciencias, proposiciones indispensables que sirven de apoyo a las proposiciones que se deducen de ellas, razón que indica que los axiomas son indemostrables. Posteriormente, cambia el concepto de axioma cuando se los deja de concebir como auto-evidentes, si bien se acepta su validez aunque no pueda ser demostrada, se trata más bien de postulados elegibles, de acuerdo a los cuales se originan diversos sistemas deductivos. Actualmente, se los considera como enunciados hipotéticos, se atenúa e incluso se elimina la distinción entre axioma y postulado.

De todas formas, los ahora ‘axiomas de la lógica’ siguen planteando cuestiones fundamentalmente filosóficas, pues la lógica está vinculada a la filosofía, de aquí la necesidad de la pregunta por los principios. Algunos problemas que se presentan en torno a esto son: si los principios son comunes a todas las clases de saber o si son propios de cada clase de saber; si hay principios reductibles a otros (cuándo lo son y cuándo no); si los principios de las ciencias particulares -irreductibles dentro de estos campos- pudieran considerarse dependientes de principios superiores, de primeros principios. Y concretamente sobre los principios lógicos, si pueden ser postulados como principios supremos, si se fundan en la realidad o son relativos a ella, si se refieren a un problema del conocimiento, o más bien denotan un problema del lenguaje.

1.3.2. Posibilidad de un axioma que acepte la contradicción

Si algún sistema lógico acoge la contradicción, violando uno de sus principios fundamentales, pierde coherencia y su carácter demostrativo se hace frágil, pues se ha visto que de ella se concluye cualquier cosa.

Sin embargo, del principio *ex contradictione (sequitur) quodlibet* no se demuestra el absurdo de la contradicción como axioma, solo se puede demostrar su insostenibilidad en este sistema, que tiene como axioma el principio de no contradicción.

Pero, ¿qué sucede si se acoge la contradicción sin violar los principios fundamentales de la teoría, es decir, en el caso de que los axiomas sustenten la contradicción y soporten un sistema que la asimile?

En un inicio, tenemos que los axiomas son indemostrables -no así el aparato que de ellos se desprende-, lo cual marca una cierta apertura en la opción de los axiomas, y permite que se adopte, básicamente, cualquier postulado como axioma, y dentro de esta posibilidad está el caso de un axioma que acepte la contradicción.

La pregunta que queda es: ¿puede algún axioma admitir la contradicción, al tiempo que fundamente una teoría sólida?

Es ineludible en este punto abordar el axioma como principio, pues el axioma guarda y expresa una razón fundamental, y el principio de no contradicción, que dice que la verdad y la falsedad de lo mismo son imposibles en condiciones idénticas, y que como se ha visto, se relaciona estrechamente con el principio de identidad; si no puede considerarse evidente, como afirmaba Aristóteles, entonces, quizás pueda considerarse necesario. Parece ser inadmisible un axioma que valide la contradicción y que a la vez fundamente una teoría sólida, pues la teoría debe ser consistente, es decir, debe estar exenta de contradicciones. En ese caso debe replantearse una cuestión de fondo, cómo una teoría que acepte la inconsistencia llega a ser sólida, e incluso por qué sería más adecuada que la que se basa en la no contradicción.

La lógica suele ser estudiada en tres períodos históricos, uno ontológico, otro psicológico, y otro lingüístico. Aristóteles pertenece al primero, pues de acuerdo a su concepción el principio lógico de no contradicción se basa en la esencia del ser, y este se manifiesta en la realidad. Las otras concepciones de la lógica encuentran que esta expresa las leyes del pensamiento, o las leyes del lenguaje, respectivamente, y aunque sugieren otro enfoque de la lógica, tampoco renuncian a este principio; sin él, el pensamiento, el lenguaje, serían poco eficaces. Si después de lo expuesto, se sigue afirmando que desde algún contexto, marco, posición, concepto, etc., el principio de no contradicción debe ser desechado, esto deberá juzgarse también a la luz de las consecuencias que traería a nivel argumentativo, tanto filosófico como científico.

1.3.3. Breve referencia a la abolición del principio de tercero excluido

Si bien se puede optar por los axiomas que fundamenten a una teoría, esta aparente "libertad" tiene consecuencias significativas a nivel teórico. La abolición del principio del tercio excluso, que ha propiciado algunas lógicas divergentes de la clásica, trae como consecuencia, por ejemplo, la anulación de la ley de doble negación. De los axiomas se deriva un cuerpo teórico y de su capacidad de resolver problemas se evalúa la efectividad de la teoría; es decir, de la fortaleza o de la debilidad de los axiomas se obtiene, igualmente, teorías fuertes o débiles.

Bertrand Russell sugiere que, si se proponen, de acuerdo a posturas epistemológicas, conceptos diferentes a los tradicionales de 'verdad' y 'falsedad', sujetos a términos de 'verificabilidad' –refiriéndose al intuicionismo de Brouwer[9]-, los principios de tercero excluido y de no contradicción deberían reconsiderarse a partir de estas reformulaciones. El autor concluye que la ley de tercero excluido no sería válida en su

[9] A diferencia de la propuesta de Russell, el intuicionismo no considera a la lógica anterior a la matemática y no le da prioridad sobre esta. Esta corriente propone que la construcción lógica es una formalización abstracta que tiene base en los procesos matemáticos. El intuicionismo no acepta algunos principios de la lógica clásica, entre ellos el de tercero excluido, sino únicamente cuando pueda ser comprobado el valor de verdad.

forma habitual (solo sería válida en contextos verificables), pero que la ley de no contradicción no resultaría afectada (Russell, 1983, págs. 271-285). Garrido, que elabora un anexo sobre historia de la lógica en su *Lógica simbólica*, corrobora lo expuesto, al decir que el intuicionista que pone en duda el principio de tercero excluido, no duda así de la validez irrestricta del principio de no contradicción (Garrido, 2005, pág. 528).

La abolición del principio del tercero excluido trae dificultades, por las que se requiere cuestionar si vale la pena deshacerse de él.

Russell encuentra que aunque sea discutible el supuesto de este principio, bajo un punto de vista epistemológico, por otro lado, señala el mérito de darlo por supuesto. La eliminación del principio del tercero excluido, dice, se sustenta en que la verdad está sujeta a la posibilidad de conocerla, de acuerdo a la experiencia verificable; lo que supone que, aquello que no pueda ser relacionado adecuadamente con la experiencia, no podrá ser considerado verdadero o falso. El uso del tercero excluido en miras únicamente a lo 'verificable', traería como consecuencia la anulación de las ciencias al prescindir de su método hipotético deductivo. Las ciencias admiten principios de inferencia no demostrables ni derivables de la experiencia, sin ellos perderían su capacidad predictiva. Pero no solo la imposibilidad de las ciencias es consecuencia de la abolición del principio del tercero excluido. Russell confronta en términos generales el empirismo puro -entendiéndolo como un escepticismo radical que se remite únicamente a la propia experiencia (en términos de 'lo que ahora percibo o recuerdo')-, evidencia que nadie en realidad cree en este empirismo y que nadie maneja su vida de acuerdo a esta teoría tan estricta, pues no solo afecta la posibilidad de los acontecimientos científicos, sino también la creencia en testimonios y en la experiencia de los otros; para todos estos casos se requiere de un principio de inferencia no demostrable, ni probable de acuerdo a la experiencia. De acuerdo a su análisis, el autor termina por aceptar cabalmente el principio mencionado (Russell, 1983, págs. 271-302).

Quine señala algunas razones legítimas por las cuales han sido propuestas algunas lógicas divergentes de la clásica (se refiere tanto a lógicas multivaloradas como a lógicas que carecen de función veritativa), incluso las encuentra coherentes al atacar la dicotomía 'verdadero-falso'; entre las razones están por ejemplo, el otorgar un valor veritativo intermedio a ciertas oraciones relacionadas a paradojas, y por otro lado, la elaboración de un aparato lógico aparentemente compatible con las particularidades de la física cuántica. A pesar de ello, aduce razones suficientes para optar aún por la lógica clásica. Algunos costes del sacrificio de la lógica clásica por alguna divergente son: pérdida de sencillez, de función veritativa y de familiaridad del instrumental lógico. Además, cuestiona los motivos que alegan un cambio de lógica, si estos son la presencia de paradojas, el autor responde que la lógica pura está exenta de ellas, que estas se presentan en la teoría de conjuntos y en la semántica, por lo que se debe buscar soluciones en el marco de estos terrenos, en lugar de desechar el terreno seguro de la lógica; en cuanto a la lógica acorde a la física cuántica, dice que la mayoría de teóricos ha prescindido de ella y que se ha dicho también que esta no da de sí lo que se propone. Si bien estas lógicas divergentes son inmunes a la contradicción, sus logros no son mayores a los de la lógica clásica. Aun tomando en cuenta sus diferencias, Quine retrotrae estas lógicas divergentes a la lógica clásica, pues encuentra que tienen un fundamento en ella, aunque hayan surgido con el propósito de diferenciarse de esta (Quine, Filosofía de la lógica, 1973, págs. 139-152).

1.3.4. Breve referencia a algunas lógicas que aceptan la contradicción

A pesar de haber citado razones suficientes para sostener el principio de no contradicción y no dar cabida a la contradicción, ciertas corrientes sugieren otros puntos de vista y otras formas de enfocar el tema. Si bien la lógica contemporánea resulta innovadora y exitosa, a la par, surgen otras lógicas que, por un lado, se derivan de ella, y por otro, difieren de ella.

Para el interés de este trabajo cabe decir que, al lograr un mayor alcance, la lógica contemporánea, retoma seriamente el estudio de paradojas -que en la Antigüedad despertaba mucho interés, pero que fue desvaneciéndose-, según lo establecido por el principio de no contradicción. En el caso de las lógicas que replantean este principio, las contradicciones que resultan de las paradojas son más bien una motivación para el desarrollo de sus teorías.

A continuación se hará una referencia al trivialismo, al dialeteismo y a la lógica paraconsistente, para ubicar sus ideas generales.

El trivialismo sostiene que todas las contradicciones son verdaderas, y que todo es verdadero. Esta corriente en general es tomada como un absurdo, al afirmar que todo es, sin embargo, hay quienes la respaldan y la defienden teóricamente (Priest & Berto, "Dialetheism", 2013).

El dialeteismo, que según su etimología indica la afirmación de dos verdades, declara que, ciertas contradicciones, a las que denomina 'dialetheias', son verdaderas. Esta corriente declara que la falsedad es solo la verdad de la negación, es decir, al tener oraciones verdaderas, sus negaciones serán también verdaderas, siendo este el modo en que se opone al principio de no contradicción. Únicamente oraciones específicas son consideradas dialetheias y son tanto verdaderas como falsas, lo que resulta admisible al acoger en este caso principios de la lógica paraconsistente, en cuanto invalida el principio de explosión, como se explicará a continuación. Los defensores del dialeteismo consideran que este acepta contradicciones que son verdaderas para el mundo actual, y que son producto de paradojas. Estas contradicciones, dicen, no se han resuelto a cabalidad de acuerdo a la teoría y los métodos tradicionales, por cuanto sería mejor aceptarlas (Priest & Berto, "Dialetheism", 2013).

La lógica paraconsistente se caracteriza por rechazar el principio de explosión. El significado de 'paraconsistente', de acuerdo a su prefijo '*pará*' indica una doble acepción, por un lado se puede interpretar como "'*quasi*' consistente", y por otro como "'más allá' de la consistencia". Mientras que el dialeteismo es una teoría que trata sobre la verdad, la paraconsistencia se define más bien como una propiedad que ciertas lógicas poseen y otras no. Una relación de consecuencia lógica es paraconsistente, si y solo si, no es explosiva[10]; por lo que, aun habiendo una inconsistencia, no cae en el trivialismo. Las inconsistencias son consideradas informativas por la lógica paraconsistente, a la cual no le interesa defender la idea de que existen contradicciones verdaderas, este más bien es un postulado dialeteista; sin embargo, el pilar fundamental de aquella, que una inferencia de relación no es explosiva, es de gran importancia para el dialeteismo, e indispensable para las otras ramificaciones de la lógica paraconsistente (Priest, Tanaka, & Weber, "Paraconsistent Logic", 2015).

[10] Es decir, que de ella no se puede inferir cualquier conclusión.

En lo que sigue del presente análisis se tomará como referencia la lógica clásica. De todas formas, es oportuno mencionar los planteamientos de otras lógicas, como alternativas de investigación para el estudio de las paradojas. Más allá de que alguna de las teorías en consideración sea la idónea para estudiar las paradojas, se elige como directriz del actual trabajo a la lógica clásica, no solo por ser la más cercana y asequible, sino por el criterio de que las paradojas ponen en crisis esta teoría, o, si no lo hacen, al menos representan un problema para esta.

1.4. Definición de 'paradoja'

La filosofía y la lógica nacen y se sistematizan como ciencias (*episteme*) en la Grecia antigua, la problemática de la paradoja se remite a estos contextos, es así que la etimología de la palabra 'paradoja' viene del griego παράδοξος (ξα) que significa "más allá de la creencia", "contra la opinión", "contra lo esperado", etc., es una palabra compuesta, '*pará*' que en este caso sería 'más allá', 'contra', y '*dóxa*', 'opinión', 'parecer', 'creencia'. En la tradición filosófica '*dóxa*' se entiende normalmente como un criterio común y corriente, en contraposición a '*episteme*' que se refiere a un conocimiento elaborado, metódico, "científico"; sin embargo, las paradojas eran discutidas en los círculos de los filósofos y estudiosos, quienes no siempre podían enfrentar el problema satisfactoriamente, es por esto que al significar 'paradoja' como "contra la opinión" se quiere decir que va en contra de la opinión general, de lo esperado o aceptado; es decir que las paradojas desafían tanto al sentido común, como a un terreno seguro y firme, la lógica, al no corresponder los resultados según lo que esta determina.

Michael Clark concibe el concepto según la etimología. Lo paradójico, dice, va contra la opinión general o creencia; lo que resulta especialmente desconcertante de las paradojas es que los argumentos que se presentan divergentes, son simétricos (Clark, 2009, págs. 180-183).

Roy Sorensen explica que las paradojas son una especie de enigmas que no tienen que encubrir su significado bajo ambigüedades y metáforas; pueden ser preguntas o pseudopreguntas que tienen la posibilidad de demasiadas buenas respuestas (Sorensen, 2007, págs. 13-23).

La dificultad de definir este concepto radica en que se requiere generalizar una multitud de casos, no todos comparables, y además que queda a discreción qué casos se incluyen en la definición y qué otros no. Es por esto que para definir un concepto de paradoja hay que establecer ciertos requisitos.

Un primer requisito para una definición de paradoja sería que se formule de acuerdo a los axiomas establecidos por la lógica. En este sentido se descarta la propuesta de Sorensen, el autor critica que el concepto se relacione únicamente a la filosofía, dice que hay una excesiva argumentación por parte de los filósofos, y refiere el concepto también a contextos cotidianos. Este criterio es plausible, pero no responde a las necesidades de este trabajo.

Un segundo requisito sería que la definición excluya conceptos muy amplios, con el fin de relacionar o distinguir la paradoja con las estructuras lógicas más cercanas a ella (aporía, dilema, falacia, antinomia). Desde este punto de vista la postura de Clark también se descarta porque resulta muy amplia, pues al autor le interesa que el concepto de paradoja incluya falacias, dilemas, argumentos que presenten más de dos opciones de conclusión, y argumentos con conclusiones válidas.

Es así que, más allá de la etimología y de las "impresiones" que puedan generar las paradojas, es necesario establecer una definición más cercana a la lógica. Se puede acoger *prima facie* una definición corta dada por Mark Sainsbury, para quien una paradoja es "una conclusión aparentemente inaceptable derivada mediante un razonamiento aparentemente aceptable a partir de premisas aparentemente aceptables" (Clark, 2009, pág. 180).

La teoría deductiva de la lógica establece que de premisas verdaderas y de un razonamiento válido, se obtiene necesariamente una conclusión verdadera; es justamente aquí donde está la complejidad de una paradoja, pues se presenta como un razonamiento aparentemente válido, con premisas aparentemente verdaderas, pero que conduce a una conclusión inaceptable (generalmente contradictoria o falsa).

Amerita hacer una cita más completa de lo expuesto por Sainsbury, y añadir otras acerca del concepto de paradoja.

Sainsbury en *Paradoxes*:

> This is what I understand by a paradox: an apparently unacceptable conclusion derived by apparently acceptable reasoning from apparently acceptable premises. Appearances have to deceive, since the acceptable cannot lead by acceptable steps to the unacceptable. So, generally, we have a choice: either the conclusion is not really unacceptable, or else the starting point, or the reasoning, has some non-obvious flaw (Sainsbury, 2009, pág. 1). [11]

Tom Tymoczko y Jim Henle en *Razón, dulce razón*:

> ¿Qué es una paradoja? Como primera aproximación, podemos decir que una paradoja es un argumento que llega a una conclusión contradictoria. Pero esto no puede ser exacto: toda demostración por contradicción llega a una conclusión contradictoria, y en cambio interpretamos el resultado como prueba de que una de las premisas es falsa. Como broma, podemos decir que: ¡una paradoja es una demostración por contradicción sin premisas falsas! El lector dirá: ¡Pero eso es imposible!, <<Si las premisas son ciertas y el argumento es correcto, *no es posible* llegar a una contradicción>>, y tendrá razón. Pero las paradojas *parece* que hacen precisamente esto; las paradojas dan la impresión de tener premisas ciertas, argumentos válidos y conclusiones falsas o incluso contradictorias. El desafío de una paradoja es conseguir enfocarla desde la perspectiva adecuada: encontrar la premisa que falla o el error en el razonamiento (Henle & Tymoczko, 2002, pág. 25).

Sorensen expone varios criterios de autores que dicen, por ejemplo, que la paradoja es una afirmación reñida con una verdad conceptual; que es una reunión de proposiciones plausibles individualmente, pero inconsistentes en conjunto; que la paradoja reside en la conclusión, o en el fundamento de la conclusión, o en las partes de un argumento, o en todo el argumento... (Sorensen, 2007, pág. 20). Sin embargo, no parece tan importante señalar en qué parte de la paradoja se encuentra el error. Más generalmente puede decirse que una paradoja tiene un error sutil, puede ser un error de preconcepción, y en varios casos, antes que rectificar los argumentos, se ha requerido reformular

[11] "Esto es lo que entiendo por paradoja: una conclusión aparentemente inaceptable derivada mediante un razonamiento aparentemente aceptable, a partir de premisas aparentemente aceptables. Las apariencias tienen que ser engañosas, tomando en cuenta que, lo aceptable no puede concebirse mediante pasos aceptables hacia lo inaceptable. Así, generalmente, tenemos que optar por una alternativa: o bien, la conclusión no es realmente inaceptable, o de otra manera, el punto de partida o el razonamiento, tiene un error no evidente". Traducción personal.

concepciones fundantes del pensamiento y concepciones teóricas para evitar las paradojas.

Quine en *The ways of Paradox*:

> May we say in general, then, that a paradox is just any conclusion that at first sounds absurd but that has an argument to sustain it? In the end I think this account stands up pretty well. But it leaves much unsaid. The argument that sustains a paradox may expose the absurdity of a buried premise or of some preconception previously reckoned as central to physical theory, to mathematics, or to the thinking process. Catastrophe may lurk, therefore, in the most innocent-seeming paradox. More than once in history the discovery of paradox has been the occasion for major reconstruction at the foundations of thought (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p).

Este concepto regirá la investigación de aquí en adelante. Traduciendo[12] a Quine: "Entonces, ¿Podemos decir, en general, que una paradoja es cualquier conclusión que al principio suena absurda, pero que tiene un argumento que la sustenta? Finalmente, pienso que esta postura se mantiene bastante bien. Pero deja mucho que decir. El argumento que sustenta una paradoja puede exponer el absurdo de una premisa oculta, o de algunos preconceptos previamente considerados como centrales en la teoría física, en las matemáticas o en los procesos del pensamiento. Lo catastrófico puede esconderse, por tanto, en la más aparentemente inocente paradoja. Más de una vez en la historia el descubrimiento de una paradoja ha sido ocasión para una mayor reconstrucción de los fundamentos del pensamiento."

El concepto que propone Quine, y que aquí se sigue, completa las definiciones expuestas por Sainsbury y por Tymoczko y Henle; además, contempla tanto argumentos que desembocan en una contradicción formal como argumentos que suponen un absurdo en el contenido.

Una vez definido el concepto que se utilizará, vale analizar algunos casos individuales de paradojas y sus dificultades particulares. En los siguientes capítulos se analizará paradojas que desembocan o bien en una falsedad o en una contradicción; estas son: las paradojas de Zenón, la paradoja del mentiroso y la paradoja de Russell.

---

[12] Traducción personal.

2. LAS PARADOJAS DE ZENÓN DE ELEA

Las paradojas de Zenón presentan una doble dificultad. Primero, acerca del conocimiento que tenemos de ellas, luego, sobre las paradojas como tales. En una primera parte del capítulo se explicará acerca de la filología, de los datos sobre el pensamiento y el contexto de este pensador del siglo V a.C. En una segunda parte del capítulo se expondrá dos de sus paradojas, se hará su análisis respectivo y se referirá algunas de las soluciones propuestas a las paradojas.

2.1. Sobre la filología

Dentro de la investigación de las paradojas de Zenón hay que enfrentar la cuestión filológica: la interpretación de sus fragmentos, de otros varios textos que se refieren a los de Zenón, y las diversas problemáticas en las que se podría enmarcar su pensamiento.

Los fragmentos del autor son muy escasos, se ha supuesto que Zenón pudo haber escrito uno o dos libros relacionados al tema de las paradojas. No se ha logrado determinar si algunos de los argumentos de los que se tiene referencia eran en contra del movimiento o en contra de la pluralidad. Además, es incierta la forma de los argumentos: si utilizaban el método de reducción al absurdo, si eran antinomias[13], dilemas[14]… (Kirk, Raven, & Schofield, 2011, págs. 349, 353).

---

[13] Parece que los autores utilizan aquí "antinomia" como sinónimo de "paradoja".

[14] "Dilema" es un razonamiento del lenguaje ordinario que plantea una dubitativa. Su conclusión puede ser una disyunción entre las alternativas (dilema complejo) o una proposición categórica (dilema simple) (Copi, 1995, págs. 270-271). La disputa entre Eulato y Protágoras es un ejemplo de dilema: "Protágoras ha pactado con Euatlo [sic] que le enseñará derecho a cambio de una cantidad que le ha de abonar cuando gane su primer caso. Después de la instrucción, Euatlo no participa en ningún pleito y Protágoras, impaciente, lo demanda. El razonamiento de Protágoras consiste en que, si gana, el tribunal obligará a Euatlo a pagarle sus honorarios; si pierde, Euatlo habrá ganado un caso y estará obligado por el pacto a pagarle. Euatlo, en cambio, argumenta que, si Protágoras gana, él no estará obligado a pagar, dado que aún no habrá ganado ningún caso; si Protágoras pierde, el tribunal decidirá que no tiene obligación de

En *Los Presocráticos*, Jonathan Barnes enriquece el panorama posible arrojando más datos y cuestionamientos. Acerca del famoso tratado de Zenón al cual se hace referencia en el *Parménides* de Platón, datan referencias de la antigüedad que indican que este tratado constaba de cuarenta *logoi*, según Barnes la bibliografía parece indicar que los *logoi* , antes que una exposición estructurada, eran más bien argumentos independientes. En lo que tiene que ver con las paradojas, es inseguro si se incluían en los cuarenta *logoi*, o si constaban en el tratado como unos argumentos aparte de ellos, o si tenían otro origen; lo que sí parece ser seguro es que las paradojas constituían una unidad especial. (Barnes, 1992, págs. 270-281).

Las paradojas de Zenón han llegado a ser conocidas en la actualidad principalmente a través de la *Física* de Aristóteles. Los autores Kirk, Raven y Schofield exponen que se puede estudiar las cuatro paradojas del movimiento de Zenón en parejas: 1) el Estadio y Aquiles; y 2) La Flecha y las Filas en Movimiento[15] (Kirk, Raven, & Schofield, 2011, pág. 350).

2.2. Pensamiento de Zenón

El pensamiento de Zenón de Elea resulta oscuro, el conocimiento que se tiene de él ha sido transmitido en gran parte indirectamente, los fragmentos conservados del autor no son suficientes para lograr una idea veraz de su pensamiento, así mismo, los análisis y suposiciones de los estudiosos no siempre llegan a ser concluyentes, por lo que las ideas con las que generalmente se caracteriza a este pensador pueden aún estar sometidas a discusión.

Históricamente, ha primado la postura de que los tratados de Zenón fueron escritos con fines metafísicos. De acuerdo al *Parménides* de Platón, Zenón hizo sus escritos desafiando a los detractores de las hipótesis de Parménides, que argüían argumentos superfluos contra estas; en el diálogo platónico se leen como palabras de Zenón, que si la existencia de lo uno fuera ridícula, aún más lo sería la existencia de lo múltiple.

---

pagar." (Clark, 2009, pág. 13). Copi trata a esta disputa como dos dilemas, el primero, el del demandante, Protágoras, y el segundo, la réplica de Eulato que es un contradilema (Copi, 1995, pág. 274).

[15] Los nombres de las paradojas cambian según los autores. La paradoja que es aquí llamada "estadio" también se la puede encontrar como: "la dicotomía", "la bisección", "la pista", "el corredor". La paradoja de "Aquiles" es también conocida como "Aquiles y la tortuga". La paradoja aquí llamada "filas en movimiento" se denomina también "el estadio" o "del estadio".

Sin embargo, lo que sugiere Platón no es considerado fidedigno por los especialistas, en el sentido de que ofrece una interpretación que pudiera estar desfigurada por sus propios intereses (Kirk, Raven, & Schofield, 2011, pág. 349). Igualmente, Giorgio Colli en su libro *Zenón de Elea* dice:

> Es cierto que a Platón no le mueve un interés histórico objetivo, lo cual no excluye (a veces estamos seguros de ello) que a menudo asuma hechos o personajes reales. (…) El contenido filosófico del diálogo seguramente no es objetivo, pero el encuentro entre Sócrates y los eleatas en Atenas puede ser histórico (Colli, 2006, pág. 35).

A pesar de la estrecha relación teórica entre Zenón y Parménides que sugiere Platón, Colli encuentra innovador al pensamiento zenoniano, por lo que distingue el pensamiento 'racional' de Zenón del pensamiento 'dogmático' de Parménides, y a pesar de la continuidad entre ambos, propone independencia entre ellos (Colli, 2006, págs. 21-22). Esta perspectiva le permite enfocar un estudio con autonomía y le lleva a exponer la posibilidad de que Zenón hubiera atacado no solo al pluralismo, sino también el monismo (Colli, 2006, págs. 64-65).

Barnes también pone en duda que los propósitos de Zenón se reduzcan a defender el monismo parmenídeo, aunque eso no quiere decir que pudo haber tenido interés por la filosofía eleática. Barnes respalda su perspectiva en varios puntos:

> En primer lugar, dudo mucho que Parménides fuera monista. Segundo, ni siquiera en el *Parménides* afirma Zenón estar defendiendo el monismo de forma definitiva. Dice que la defensa del monismo que Sócrates cree haber visto en sus *logoi* era puramente fortuita: su objetivo era demostrar que el pluralismo es todavía más absurdo que el monismo. Es poco probable que hablara así un monista convencido. Tercero, aunque el pluralismo sea absurdo, no quiere esto decir que se defienda el monismo; Platón se equivoca al decir que son lo mismo una prueba del monismo y una refutación del pluralismo. Gorgias, discípulo de Zenón, lo sabía muy bien: fue nihilista, al menos teóricamente. Cuarto, varios argumentos de Zenón parecen atacar con igual fuerza el pluralismo y el monismo (Barnes, 1992, págs. 281-282).

Si bien no se puede dilucidar un objetivo metafísico en Zenón, hay otro aspecto importante que puede dar pistas acerca de su pensamiento. Indiscutiblemente la figura de Zenón de Elea ha estado relacionada siempre o casi siempre con la dialéctica. La dialéctica es considerada un antecedente de la lógica, e incluso, según William y Martha

Kneale, es “la primera denominación técnica de lo que hoy llamamos lógica” (Kneale & Kneale, 1972, pág. 6). La dialéctica, explican, desde sus primeras etapas revestía significados de diferente matiz, pero atribuyen a Zenón su primer significado preciso y la instauración de esta como un método filosófico.

El comentario de Aristóteles, recogido por Diógenes Laercio, que atribuye el descubrimiento de la dialéctica a Zenón es atenuado por Colli, analiza a la dialéctica como un fenómeno que surge de una condición cultural y colectiva particular. Pero si hubo un cambio en el modo de afrontar esta materia, se debe a Zenón, dice, además merece un lugar importante en el panorama del pensamiento griego al haber precisado y perfeccionado el método dialéctico (Colli, 2006, págs. 21-22, 28-29).

Los Kneale, al decir que Zenón dota a la dialéctica de un método filosófico se refieren a la *reductio ad impossibile*, que consiste en la refutación de las hipótesis, debido a las consecuencias insostenibles obtenidas a partir de aquellas. Los autores reparan en que se podría hacer una particularización conceptual acerca del método por *reductio*: podría denominarse *reductio ad impossibile*, al conducir las hipótesis a conclusiones contradictorias, y *reductio ad absurdum* al desencadenar las hipótesis conclusiones falsas (Kneale & Kneale, 1972, págs. 6-8).

Colli dice de Zenón que maneja una estructuración lógica; encuentra en sus postulados las nociones de principio de no contradicción y de demostración por el absurdo. El principio de no contradicción ya se puede hallar en la obra de Parménides, pero no es sino en la obra de Zenón que se presenta como una definición rigurosa y en uso continuo (Colli, 2006, págs. 44-45). En cuanto a la reducción al absurdo, Colli la expone de la siguiente manera:

> Para demostrar una tesis se supone verdadera la proposición contradictoria: de esta supuesta verdad se siguen conclusiones absurdas. El absurdo procede de haber aceptado aquella hipótesis determinada, por lo tanto se ha demostrado indirectamente la hipótesis contradictoria, que es lo que se pretendía (Colli, 2006, pág. 45).

Por otro lado, Barnes critica que el método por *reductio* sea atribuido a Zenón. No es propio hablar de lógica antes de Aristóteles, dice. Zenón no fue el primero en utilizar el método por *reductio*, ni el único que reflexionara sobre él; además, no utiliza la *reductio ad absurdum* como método de refutación, según este último se infiere la falsedad de la hipótesis de la que parte el razonamiento, y lo que hace Zenón es inferir el absurdo sin atacar a la hipótesis [de $p \rightarrow q$, q representa el absurdo] (Barnes, 1992, pág. 283).

La imagen que perfila Barnes de Zenón es de un 'polemista erístico'. Dice que no tiene el propósito metafísico de defender el monismo eleático, ni puede considerarse que haga uso de un método con precisión lógica. Explica que la historia atribuye a Zenón un plan, un objetivo y un método, y según su criterio, no hay tal (Barnes, 1992, págs. 279-284). En sus conclusiones amplía:

> Zenón "no expuso nada propio, sino que siguió planteando problemas" (pseudo-Plutarco, A 23). Zenón no fue un filósofo original: no pertenece a esa larga serie de pensadores que se extiende de Tales a Meliso, hombres de vastos conocimientos, de grandes pretensiones, de profunda intuición. Él creó dudas: negativo, destructivo, polémico, Zenón fue el primer sofista. Su meta era crítica, no constructiva; sus métodos sutiles, no firmes. Pero de su carcaj sofista sacó algunas flechas brillantes y agudas: las flechas que, a su pesar, lo han convertido en príncipe de los filósofos (Barnes, 1992, pág. 350).

Colli habla de los 'argumentos fuertes' y los 'argumentos débiles' de Zenón, y con esto plantea la posibilidad de considerarlo un sofista y un erístico; sin embargo, rechaza esta hipótesis. Dice que la disparidad de los argumentos puede derivarse de las fuentes en las que se apoyan los testimonios que tenemos de Zenón, entre las fuentes cuentan de hecho diálogos sofistas, lo que explicaría la introducción de argumentos sofísticos que debilitarían y deformarían los originales. Otra alternativa sería que, tanto los argumentos fuertes como los débiles pertenecieran a Zenón, lo cual no parece probable, atribuirle argumentos tan profundos como ingenuos, a menos que el contenido teórico de los últimos haya sido transmitido inadecuadamente por los testimonios, desproveyéndoles de su sentido y riqueza original. Otra de las hipótesis que se plantea es que Zenón hubiera expuesto intencionalmente argumentos sólidos y sofísticos con el fin de perpetuar su pensamiento en los círculos sofistas, tesis débil desde el punto de vista histórico, según el autor, que además "rompe la coherencia de la figura de Zenón –incluso en su aspecto moral- y que socava el valor teórico de su especulación" (Colli, 2006, págs. 138, 147-148).

Colli no deja de señalar los aspectos débiles del pensamiento zenoniano, pero exalta los aspectos fuertes. El autor presenta cómo Zenón utiliza en los argumentos el principio de no contradicción y la reducción al absurdo; también hace una breve referencia a la utilización de otros recursos como la regresión al infinito y los principios de transposición y de tercero excluido.

2.3. Síntesis y análisis de los datos

Aún antes del estudio de las paradojas de Zenón, los datos expuestos a los cuales estas están sujetas, denotan gran complejidad. Estos aspectos, aunque no son de fondo, sirven para situar el contexto de otros aspectos que sí lo son.

Las primeras paradojas registradas en la historia de la filosofía están relacionadas a la dialéctica, hay que entender aquí por dialéctica una diferente a la platónica, la dialéctica de Zenón podría ser más cercana a la lógica porque su característica fundamental es que se relaciona de alguna manera al método por *reductio* (ya sea como un antecedente de este, como un método similar, o uno idéntico). Esto tiene importancia porque actualmente la lógica acoge el método de reducción al absurdo y lo considera parte de sus reglas.

Si bien no se puede adjudicar un claro interés metafísico a Zenón, quizás sí se le pueda adjudicar un interés "lógico" o "dialéctico", si se pone en consideración un cierto nihilismo por parte del pensador, lo que pondría énfasis en el estudio de las paradojas, antes que en cuestiones metafísicas dogmáticas.

En este periodo de la lógica o "pre-formativo" de la lógica, las paradojas y los argumentos de Zenón despertaron mucho interés. Este interés inicial fue decreciendo; quizás porque al asimilar la lógica a la tradición aristotélica, se mantuvo el desprestigio por sus rivales, quienes practicaban la dialéctica a través del método por *reductio*, al cual Aristóteles consideró inferior al apodíctico. Al perfilarse los intereses de investigación de la lógica, se determinó el curso de su historia, y no sería sino hasta el desarrollo de la lógica contemporánea que el estudio de las paradojas fue nuevamente un asunto serio. De todas formas, la importancia de las paradojas de Zenón se puede notar, tanto en los esfuerzos de Aristóteles por superarlas en su tiempo, como en los desafíos que suponen incluso para una ciencia más avanzada como la actual.

2.4. Dos paradojas de Zenón

Las enunciaciones de Zenón están ligadas a la dificultad de enfrentar los fragmentos y críticas especializadas, por lo que no se entrará en la cuestión sobre qué dijo Zenón originalmente, ni sobre la forma exacta de sus aporías; se analizará paradojas atribuidas a Zenón, siendo este el punto de interés, antes que un acercamiento verosímil a su pensamiento.

Las paradojas de Zenón eran comúnmente llamadas aporías. La raíz etimológica del griego antiguo de ἀπορία es α- (sin) y πόρος (poros), lo que significa "sin camino", "sin paso", "sin salida", y describe a estos argumentos como difíciles, infranqueables, e incluso imposibles. Este término se aplica muy bien a los razonamientos de Zenón, que parecen no dejar una salida racional al absurdo. En lo que concierne a este trabajo no se ha podido determinar una distinción entre 'aporía' y 'paradoja' más allá de lo etimológico.

La primera paradoja de Zenón que se expondrá es 'La Dicotomía'. El fragmento de la *Física* dice:

> Cuatro son los argumentos de Zenón en torno al cambio que presentan dificultades a quien quiera resolverlos: el primero es el que afirma la imposibilidad del movimiento, en cuanto lo que está en movimiento debe alcanzar la mitad de la distancia antes de llegar al final (Colli, 2006, pág. 100).

El fragmento no es explícito. Se dice que Aristóteles solo hacía una referencia a la aporía, pues se dirigía a un público que la conocía. De todas formas, se ha podido re-interpretar el argumento, aunque no suficientemente, por lo que se presentan dos versiones de él. En la primera versión, un móvil deberá recorrer una cierta distancia; para hacerlo, primero tendrá que avanzar la mitad de dicha distancia, y una vez alcanzada, la mitad de la mitad que aún queda por recorrer, a la cual le seguirá la mitad de la distancia del siguiente tramo, e infinitas veces la mitad de la mitad que falta hasta la meta, de modo que no podrá finalizar el recorrido. La segunda versión dice que para recorrer una distancia, debe alcanzarse antes la mitad de esta, y antes la mitad de la mitad, y de igual modo infinitas veces. A continuación, se ilustran las dos formas.

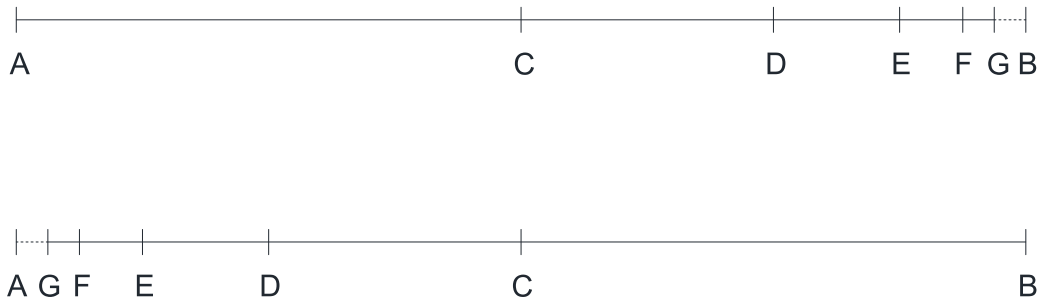

Gráfico 1.
Autora: Julia Murillo.

En el primer caso, el trayecto hasta la meta jamás podrá culminar. En el segundo caso, el movimiento ni siquiera habría empezado. Aunque los dos resultados sean distintos, el principio fundamental de la paradoja no se ve afectado, es el mismo para ambas interpretaciones. Sin embargo, aquí se hará referencia a la primera interpretación, al acoger el criterio de Colli, quien lo respalda en los análisis de los textos antiguos y del pensamiento de Zenón, y lo justifica minuciosamente para preferir esta versión[16], además porque es más cercana a la aporía de Aquiles, que se referirá a continuación.

La paradoja de 'Aquiles y la Tortuga', según Aristóteles en su *Física*:

> (…) el argumento llamado Aquiles. Dice que el más lento nunca será alcanzado en la carrera por el más rápido. Porque es necesario que el que persigue alcance primero el punto del que ha partido el que huye, de modo que el más lento se encontrará siempre un poco más adelante que el más veloz. (…) (Colli, 2006, pág. 113).

En una presentación más divulgada intervienen dos personajes: Aquiles y la tortuga. Una explicación más detenida podría decir: Aquiles, quien es el más rápido de los mortales, se somete a una carrera con la tortuga, el corredor más lento. Al iniciar la carrera se ha concedido una ventaja inicial a la tortuga. Cuando Aquiles ha salvado esta ventaja, la tortuga ha avanzado un poco más, al alcanzar Aquiles esta nueva posición, su contrincante ha avanzado ya algo más… Y de la misma manera, repetidas veces *ad*

[16] Ver: Colli, 2006, págs. 101-105, 108, 114.

infinitum. De modo que sin importar cuán lento vaya la tortuga, ni cuán rápido corra Aquiles, él no podrá alcanzarla, mientras ella siga llevándole ventaja incluso en tramos infinitamente pequeños.

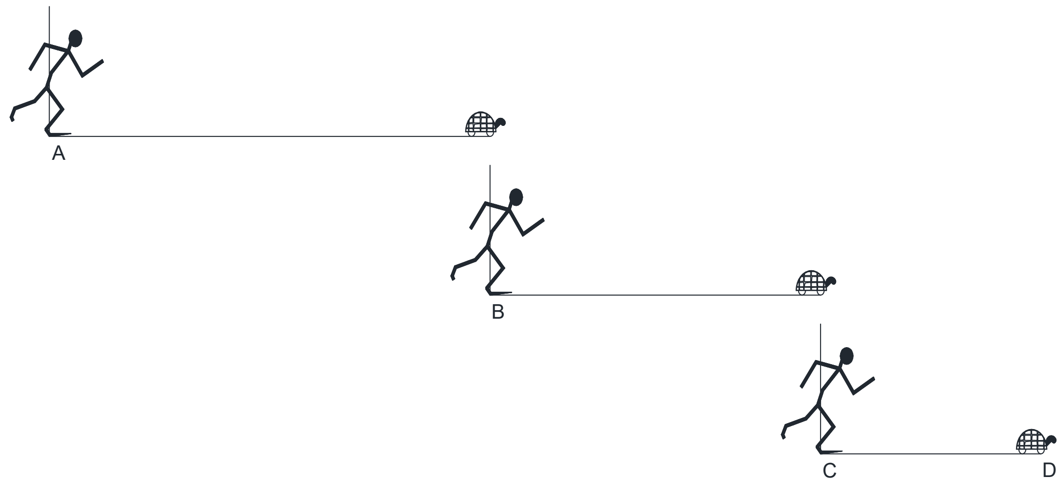

Gráfico 2.
Autora: Julia Murillo.

La paradoja de Aquiles y la de la dicotomía no presentan diferencias fundamentales. En ambos casos un móvil se acerca a un objetivo, el cual puede estar en reposo o en movimiento; de cualquier manera, el móvil no puede alcanzar el objetivo, pues debe recorrer infinitos intervalos de espacio y de tiempo, antes de que pueda llegar a él.

Las paradojas tienen implícita la concepción de que el tiempo y el espacio pueden ser divididos infinitamente, y aunque hubiera una cantidad finita de espacio o de tiempo, estas no podrían ser agotadas. Muchos de los planteamientos que han procurado solucionar la paradoja consideran que este es el aspecto que hay que tratar para corregir el argumento.

Por su similitud, las paradojas de la dicotomía y de Aquiles serán consideradas como dos casos de un mismo problema, y serán referidas indistintamente para su análisis. A continuación, se revisarán algunas propuestas que se han considerado solucionan estas paradojas.

2.5. Análisis y solución de Aristóteles

Aristóteles analiza las paradojas de Zenón en la *Física*. El examen que aquí se propone es el expuesto por Colli en *Zenón de Elea* (Colli, 2006, págs. 109-116).

Para las paradojas de la dicotomía y de Aquiles, Aristóteles ofrece dos refutaciones[17]. Se hará referencia a la que tiene que ver con los conceptos de "acto" y "potencia", por ser esta perspectiva la más interesante, además, por acogerse el mismo Aristóteles a esta, al considerar que la primera refutación, respecto a los hechos y a la verdad, no era suficiente.

Aristóteles enmarca su respuesta en la problemática del infinito en relación a la divisibilidad.

Acerca de la paradoja de la dicotomía señala que si se divide un continuo en dos mitades, se utiliza un único punto como si fuera dos, pues este se convierte en principio y fin, es así que al efectuar la división ya no es un continuo[18], no es un continuo en acto, aclara, sino tan solo en potencia.

Aristóteles continúa la explicación. Lo que sigue, en términos generales, es aplicable a las dos paradojas:

> Por ello a quien preguntara si es posible recorrer el infinito en el espacio y en el tiempo, habría que responderle que en un sentido es posible y en el otro no. Si los infinitos están en acto no es posible; si están en potencia es posible. Aquel que se mueve de modo continuo atraviesa cosas infinitas por accidente, pero no de modo absoluto. Al segmento le corresponden mitades infinitas: pero la sustancia es una cosa y el ser empírico otra (Colli, 2006, págs. 112, 115).

[17] La primera refutación de Aristóteles, como él mismo dice, responde a la cuestión acerca de recorrer infinitos puntos en un tiempo finito; Aristóteles niega esta posibilidad, pero afirma que los infinitos puntos puedan recorrerse en un tiempo infinito, ya que este, al igual que la distancia, puede ser dividido infinitas veces (Colli, 2006, págs. 104-106).

[18] 'Continuo' significa algo sin cortes. Según Aristóteles todo continuo es llamado infinito en dos acepciones, por división o por los extremos (cantidad). Las paradojas de Zenón, dice, corresponden al primer caso (Colli, 2006, págs. 104, 105).

Aristóteles dice que es posible agotar el infinito en espacio y en tiempo solo “en potencia”, mas no “en acto”, y que se puede atravesar cosas infinitas “por accidente”, mas no de modo absoluto. Colli reflexiona que Aristóteles al haber dicho que no es posible agotar los infinitos “en acto” reconoce la validez del argumento de Zenón, aunque diga que sí es posible hacerlo “en potencia”.

También indica que la distinción entre “acto” y “potencia” parte de la relación entre “posible” y “accidente”, donde “posible” indicaría pertenencia, y “accidente” una relación accidental, lo que no es necesario que exista, siendo solo posible. Siguiendo el razonamiento de Colli se podría decir, entonces, que los infinitos que se recorre en la paradoja, no existen con necesidad, sino “en potencia”, pueden recorrerse por “accidente”, es decir, como posibilidad, sin necesidad de que existan, pero no de modo absoluto, como existentes, en la realidad, “en acto”.

Dice que el movimiento se ha cumplido aunque la razón no sepa explicarlo. Un segmento (limitado) es una suma de infinitas partes, mientras que la sustancia lo prohibiría. Con esto parecería que el autor interpreta el planteamiento aristotélico en “dos niveles” para poder explicar por qué el pensamiento llega a una conclusión fácticamente imposible.

Colli plantea una hipótesis sobre las paradojas del movimiento de Zenón:

> (…) podría ser que Zenón no quisiera impugnar la posibilidad del movimiento real sensible (de donde se derivaría una condena de los sentidos), que el movimiento fuera para él bien real, y que estas aporías tuvieran la finalidad de mostrar la incapacidad de la razón humana para explicar racionalmente aquello que los sentidos le ofrecen (Colli, 2006, págs. 102-103).

Si se acogiera esta suposición de Colli, sería plausible afirmar que, de todas formas, Aristóteles da la razón a Zenón y no agrega algo nuevo a sus intenciones, pues “en potencia” es posible el argumento zenoniano, mientras que “en acto” no lo es. Las observaciones de Aristóteles explicarían mediante su teoría metafísica[19] por qué es posible el razonamiento de la paradoja en el pensamiento, en sentido hipotético, y por qué no lo es en la realidad. Pero igualmente, al contrastar el razonamiento con los

[19] De darse este caso, el aporte de Aristóteles sería el haber trasladado esta problemática a su teoría metafísica.

resultados empíricos, se llega a un absurdo. Así, estas observaciones no parecen ser propiamente refutatorias.

Y aunque no se tomara en cuenta la suposición de Colli, es decir, si se adjudicara a Zenón un pensamiento más ingenuo, que sus intenciones fueran evidenciar la imposibilidad del movimiento real, las objeciones aristotélicas –que resultarían más pertinentes y explicativas de la realidad- aún plantearían una solución parcial. Las paradojas, de alguna forma siguen vigentes, incluso se podría discutir que esta interpretación no es coherente con el isomorfismo aristotélico.

No se considera, actualmente, que los comentarios de Aristóteles a las paradojas de Zenón solucionen el problema que estas plantean, sin embargo, tienen una importancia histórica, puesto que de acuerdo a ellos se estableció un criterio generalizado sobre las aporías de Zenón.

2.6. Análisis y solución de Quine

En *The ways of paradox*, Quine distingue entre paradojas verídicas y paradojas falsídicas.

Las paradojas verídicas son casos en los que lo supuestamente establecido es verdadero, son paradojas que "dicen la verdad"[20]; en cambio, en las paradojas llamadas falsídicas, que lo que suponen es falso. Es decir, las paradojas verídicas en un principio se muestran absurdas, pero son verdaderas[21], mientras que las paradojas falsídicas no solamente se muestran absurdas, sino que son también falsas.

Algunas de las paradojas de Zenón son paradojas falsídicas, afirma Quine.

Aunque expone una refutación a una paradoja falsídica tomando como ejemplo la paradoja del barbero[22], lo mismo es aplicable a la paradoja de Aquiles y la tortuga; aquí

[20] "truth-telling" es la expresión que utiliza el autor.

[21] Un ejemplo de paradoja verídica es el caso inusual de una persona que tiene un número mayor de años que de cumpleaños pasados (ella ha nacido en un año bisiesto un 29 de febrero).

[22] En la paradoja del barbero se asume que hay un pueblo en el cual hay un barbero que afeita a todos y solo a aquellos hombres que no se afeitan a sí mismos. La pregunta que lleva a la paradoja es si este barbero se afeita a sí mismo. La conclusión será que el barbero se afeita a sí mismo si, y solo si, no se afeita a sí mismo.

se extrapola esos argumentos a la paradoja de Aquiles para ensayar una refutación de esta:

El argumento que sostiene la conclusión inaceptable descansa en suposiciones. Al aceptar el argumento, se acepta su conclusión absurda. Quine indica que la conclusión de una paradoja falsídica debería ser otra, por ejemplo, en este caso, que no hay tal carrera. La conclusión absurda, que Aquiles no podrá jamás alcanzar a la tortuga, sugiere que se debe realizar una reducción al absurdo: no se puede aceptar dicha conclusión, y es el mismo argumento el que demuestra por qué no debe ser aceptada.

De modo que, mientras el argumento de una paradoja verídica lleva a acogerla, el argumento de una paradoja falsídica lleva a rechazarla.

Quine agrega que una paradoja falsídica siempre tiene una falacia en su argumento, pero que la paradoja no podría reducirse a una falacia. Las falacias, dice, pueden llevar a conclusiones verdaderas o falsas, sorprendentes o no, y en el caso de la paradoja falsídica, la proposición supuestamente establecida va más allá, además de parecer absurda es también, de hecho, falsa.

Luego explica la falacia cometida en la paradoja de Aquiles y la tortuga:

> (…) the fallacy that emerges is the mistaken notion that any infinite succession of intervals of time has to add up to all eternity. Actually when an infinite succession of intervals of time is so chosen that the succeeding intervals become shorter and shorter, the whole succession may take either a finite or an infinite time. It is a question of a convergent series (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p). [23]

De una forma muy sencilla Quine refuta la paradoja a través del mismo método que quizás utilizó Zenón, la reducción al absurdo. Niega la conclusión absurda de la paradoja y con ella, el argumento en que se funda, por conducir a una conclusión absurda, además enuncia la falacia que lleva implícita la paradoja.

[23] "(…) la falacia que surge es la noción errónea de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo tiene que añadirse para toda la eternidad. En realidad, cuando una sucesión infinita de intervalos de tiempo es elegida de manera que los intervalos sucesivos se vuelven más y más cortos, toda la sucesión puede tomar o un tiempo finito o un tiempo infinito. Se trata de una serie convergente." Traducción personal.

2.7. Las series geométricas aplicadas a las paradojas de Zenón

El problema que suscitan las paradojas de Zenón puede abordarse utilizando la matemática de las series geométricas.

Una serie geométrica es una sucesión ordenada de valores, tales que, cualquiera de ellos, excepto el primero, resulta de multiplicar al anterior por un número fijo (constante) llamado razón. El primer valor es arbitrario. Las series geométricas pueden tener un número finito o infinito de términos.

Si se llama r a la razón, a al primer valor y n al número total de términos, la serie geométrica puede expresarse de la siguiente manera:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots\ ar^{(n-1)}$$

El primer término resulta de multiplicar a por r^0, el segundo de a por r^1, el tercero de a por r^2 …, es así que el exponente de r es menor en una unidad al ordinal de cada elemento de la serie.

Para aplicar las series geométricas al problema que plantean las paradojas de Zenón, antes es necesario deducir la fórmula para sumar todos los términos de una serie geométrica, sin tener que sumarlos individualmente.

Sumando los términos de la serie, y llamando S a esta suma, se tiene:

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{(n-1)}$$

Multiplicando por r ambos miembros de la igualdad:

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5\ \dots + ar^n$$

Restando miembro a miembro Sr de S, se obtiene:

$$S - Sr = a - ar^n$$

Extrayendo factor común S en el primer miembro y factor común a en el segundo miembro:

$$S(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Despejando S:

$$S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

La fórmula resultante vale para cualquier serie geométrica. Para el análisis de las paradojas se utilizará series geométricas decrecientes con número infinito de términos.

Una serie geométrica es decreciente cuando sus términos se hacen más pequeños cada vez, esto es cuando r es menor a uno.

Cualquier número menor a uno elevado a infinito es igual a cero. Al ser r menor a uno y n infinito, r^n, que consta en la fórmula de S, es igual a cero. Resulta, para las series geométricas decrecientes con infinito número de términos, que $S = \frac{a}{(1-r)}$

La fórmula da como resultado un valor finito, por lo que se puede decir que las series geométricas decrecientes con infinito número de términos convergen a un valor finito[24].

A continuación se ejemplificará numéricamente los intervalos de tiempo en la paradoja de la dicotomía. Se utilizará valores tomados arbitrariamente, sin embargo, el proceso se puede llevar a cabo utilizando otros valores.

Supóngase que el móvil se desplaza con velocidad constante y recorre la primera mitad del trayecto en un tiempo $t_1 = 128\ seg$, la siguiente mitad en un tiempo $t_2 = 64\ seg$, la siguiente en $t_3 = 32\ seg$, etc.

[24] Esta es la razón por la que Quine refiere las paradojas de Zenón al problema de las series convergentes.

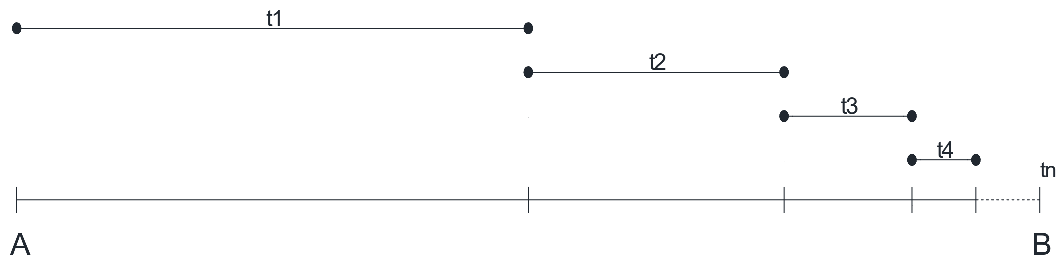

Gráfico 3.
Autora: Julia Murillo.

Los valores pueden ordenarse en siguiente tabla:

	t		$t\ (seg)$		serie
1º	t_1	t_1	128	128	a
2º	t_2	${t_1}/{2}$	64	$128 \times ({1}/{2})$	ar
3º	t_3	${t_1}/{4}$	32	$128 \times ({1}/{2})^2$	ar^2
4º	t_4	${t_1}/{8}$	16	$128 \times ({1}/{2})^3$	ar^3
5º	t_5	${t_1}/{16}$	8	$128 \times ({1}/{2})^4$	ar^4
…	…	…	…	…	…

Como se muestra en la tabla, los valores corresponden a una serie geométrica en la que $a = 128, r = {1}/{2}, n = \infty$

Reemplazando en la fórmula de la suma:

$$S = \frac{a}{(1-r)} = \frac{128}{1-{1}/{2}} = \frac{128}{{1}/{2}} = 128 \times 2 = 256$$

La respuesta indica que el móvil recorrerá la distancia AB en un tiempo de 256 segundos; en contraposición a lo que se concluye en la paradoja, que el móvil no llegará jamás a la meta.

A continuación se ejemplificará la paradoja de Aquiles haciendo referencia a las distancias recorridas. El problema se desarrollará con velocidades invariables tanto de la tortuga como de Aquiles, lo que implica que lo recorrido por la tortuga en un lapso de tiempo será proporcional a la distancia recorrida por Aquiles en el mismo tiempo.

Supóngase que la distancia inicial entre ambos es $162\ m$, y que la proporción entre sus velocidades es $^1/_3$. Cuando Aquiles alcance los $162\ m$, la tortuga habrá recorrido $^{162}/_3 = 54\ m$ más, y cuando Aquiles haya alcanzado esta distancia, la tortuga habrá adelantado $^{54}/_3 = 18\ m$, y así sucesivamente.

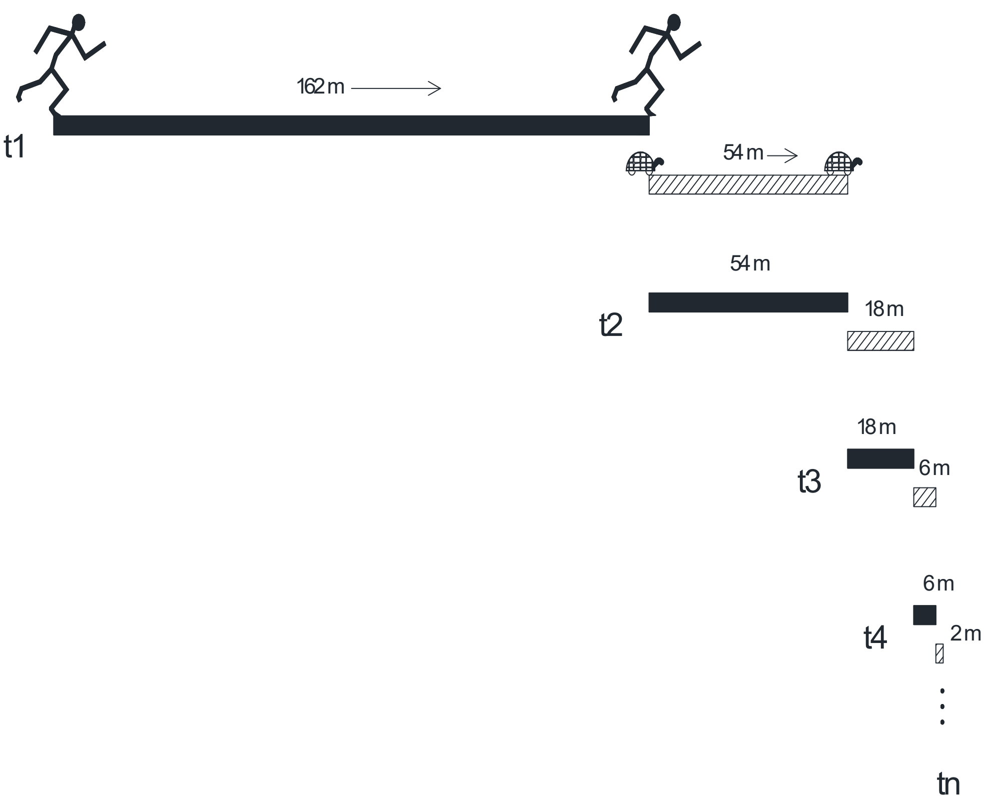

Gráfico 4.
Autora: Julia Murillo.

Los valores expuestos se ordenan de la siguiente forma:

	distancia recorrida por Aquiles (m)		serie
1º	162	162	a
2º	54	$162 \times {}^{1}/_{3}$	ar
3º	18	$162 \times ({}^{1}/_{3})^{2}$	ar^2
4º	6	$162 \times ({}^{1}/_{3})^{3}$	ar^3
5º	2	$162 \times ({}^{1}/_{3})^{4}$	ar^4
6º	${}^{2}/_{3}$	$162 \times ({}^{1}/_{3})^{5}$	ar^5
…	…	…	…

	distancia recorrida por la tortuga (m)		serie
1º	54	54	a
2º	18	$54 \times {}^{1}/_{3}$	ar
3º	6	$54 \times ({}^{1}/_{3})^{2}$	ar^2
4º	2	$54 \times ({}^{1}/_{3})^{3}$	ar^3
5º	${}^{2}/_{3}$	$54 \times ({}^{1}/_{3})^{4}$	ar^4
6º	${}^{2}/_{9}$	$54 \times ({}^{1}/_{3})^{5}$	ar^5
…	…	…	…

Reemplazando los valores en la fórmula para obtener la distancia total recorrida por Aquiles:

$$S = \frac{a}{(1-r)} = \frac{162}{1 - {}^{1}/_{3}} = \frac{162}{{}^{2}/_{3}} = 162 \times 3/2 = 243$$

Aplicando los valores para obtener la suma en el caso de la tortuga:

$$S = \frac{a}{(1-r)} = \frac{54}{1 - {}^{1}/_{3}} = \frac{54}{{}^{2}/_{3}} = 54 \times 3/2 = 81$$

El punto de encuentro se sitúa a 243 metros de la posición inicial de Aquiles, y a 81 metros de la posición inicial de la tortuga[25]. Lo que indica que, Aquiles debe recorrer una distancia finita para alcanzar a la tortuga.

Los resultados de los cálculos señalan una obviedad. En el caso de la dicotomía, el móvil llega a su meta en un tiempo finito, aunque este tiempo pueda ser dividido infinitas veces. En la aporía de Aquiles, este alcanza a la tortuga en una distancia finita, aunque esta distancia pueda ser dividida infinitas veces. El resultado obtenido al aplicar las series convergentes a las paradojas se debe a que aquellas responden al principio de que un continuo limitado puede ser dividido infinitas veces, y no por ello deja de ser finito. Como indica Quine, esto basta para hacer una reducción al absurdo y declarar falsos a los argumentos de Zenón.

Sin embargo, la aplicación de las series convergentes a las paradojas de Zenón no es un argumento absolutamente convincente para todos.

> La explicación racional del movimiento debe ser la suma infinita de infinitos términos $1+ {}^{1}/_{2}+ {}^{1}/_{4}\ldots$, suma que, en una expresión matemática al límite, daría 2, pero que de hecho no lo da, porque no llega. Esta incapacidad de la razón, según la cual no se llega a 2, en contraste con lo sensible, según el cual sí se llega, es lo que quiere subrayar Zenón (Colli, 2006, pág. 106).

Aunque la matemática de las series convergentes es bastante aceptada para refutar estas paradojas, vale conocer otra alternativa más.

2.8. Teoría de los números transfinitos aplicada a las paradojas de Zenón

Georg Cantor revoluciona la idea de infinito en matemática. Su teoría de conjuntos trata conjuntos infinitos como "totalidades infinitas completas", reemplazando así el concepto del infinito "abierto" o "potencial" por el de "completo", "actual" o "existencial".

[25] Estos dos resultados señalan un punto único, lo cual es condición necesaria para la validez, esto también se puede comprobar al restar la distancia recorrida por la tortuga de la distancia recorrida por Aquiles que es igual a la separación inicial (243-81=162m).

> (…) el infinito puede ser concebido, tanto en filosofía como en matemáticas, de dos maneras: como aquello a lo que cabe acercarse sin llegar a alcanzarlo, o como algo que está dado ya, de una vez por todas. En el primer caso se habla de *infinito potencial*; en el segundo, de infinito *actual* o *existencial* (Garrido, 2005, pág. 517).

La teoría de Cantor resultó muy innovadora pues, permite calcular con el infinito como si se tratara de un concepto matemático "real y concreto".

A continuación se explicará ciertas nociones básicas de la teoría de conjuntos y, posteriormente, se mostrará cómo se puede aplicar esta teoría a las paradojas tratadas de Zenón.

En la teoría de conjuntos son fundamentales las definiciones de "cardinal" y "equivalencia". "Cardinal" es el número de los elementos de un conjunto. "Equivalencia" es la igualdad de los cardinales de dos conjuntos. Para establecer la equivalencia de dos conjuntos se empareja "uno a uno"[26] los elementos de estos comprobando la igualdad de los cardinales. Cantor traslada estos conceptos a los conjuntos infinitos.

"Los números cardinales de conjuntos finitos, es decir, los números 1, 2, 3, … se llaman números naturales; los números cardinales de conjuntos infinitos los llama Cantor "números cardinales transfinitos" o "potencias transfinitas"." (Hahn, 1983, pág. 385)

Resulta extraño hablar de conjuntos infinitos, y más extraño aún hablar de números cardinales de conjuntos infinitos. Para aclarar lo primero, se puede pensar en el conjunto de los números naturales que es un conjunto infinito. Para lo segundo, se debe decir previamente que hay conjuntos infinitos que tienen más elementos que otros conjuntos infinitos. Aunque esta afirmación es algo contraria a la intuición, Cantor da una serie de pruebas[27] que demuestran que hay conjuntos infinitos más grandes que otros, de ahí que se pueda hablar de números cardinales transfinitos.

---

[26] La correspondencia "uno a uno" es también llamada "recíprocamente única" o "biunívoca", indica que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un elemento del segundo conjunto y recíprocamente a cada elemento del segundo conjunto, uno del primero.

[27] Para ver estas pruebas se refiere la siguiente bibliografía: (Davies, 1985), (Hahn, 1983), (Northrop, 1962).

El primer número trasfinito es "aleph-cero" ($\aleph_0$), este es el cardinal de los conjuntos de infinitos numerables, los mismos que pueden ponerse en correspondencia "uno-a-uno" con la totalidad de los números naturales. Los números pares, los números impares, las fracciones son ejemplos de infinitos numerables.

Parar ilustrar lo anterior, tómese, por ejemplo, la totalidad de números pares. Aunque pareciera que esta es menor que la totalidad de los números naturales ya que estos últimos además de los pares contienen también los impares, al disponer todos los números naturales en una fila y directamente debajo de estos el doble de su valor, se obtiene los números pares, es así que, a cada número natural le corresponde un número par. Esto demuestra que el conjunto infinito de números naturales es igual al de los pares, y además que, el conjunto infinito de los números naturales es tan grande como una parte de él.

1	2	3	4	5	6	7	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
2	4	6	8	10	12	14	…

Gráfico 5.
Autora: Julia Murillo.

Los números racionales son aquellos que pueden ser expresados como fracciones, los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracciones. Los primeros son los números enteros y los fraccionarios, algunos ejemplos de los segundos son π y $\sqrt{2}$. Pero tanto los números racionales como los irracionales pueden ser expresados en el sistema decimal, los primeros mediante decimales finitos (ej: 0,25) o periódicos (ej: 1,3333…), la expresión decimal de los segundos es infinita no-periódica (ej: 3, 14159…).

Cantor demuestra que el conjunto de los números racionales es infinito numerable, pero que el conjunto de los números reales (estos son los racionales y los irracionales) es un conjunto infinito mayor.

Esto último se puede demostrar con la siguiente prueba realizada por Cantor. Si se imagina todos los números decimales dispuestos en una columna infinita, estos pudieran ser emparejados “uno a uno” con los números naturales, pero la correspondencia no se da porque siempre se podrá crear un número decimal que no conste en la columna.

0,	**1**	5	0	0	0	0	0	0	0	0 …
0,	3	**5**	3	5	3	5	3	5	3	5 …
0,	2	8	**5**	7	3	4	6	9	2	1 …
0,	8	5	4	**9**	2	7	3	6	1	2 …
0,	7	7	7	7	**7**	7	7	7	7	7 …
0,	8	1	9	1	9	**1**	9	1	9	1 …
0,	5	9	3	1	6	2	**0**	0	0	0 …
0,	0	2	7	6	3	4	9	**5**	2	0 …
0,	2	4	6	7	3	8	9	1	**5**	8 …
0,	4	7	3	5	1	4	4	4	4	**4** …
…										

Gráfico 6.
Autora: Julia Murillo.

Los números del ejemplo son una parte de los de la columna infinita descrita, varían entre cero y uno, y no están en ningún orden. Se puede obtener un número que no consta en la columna infinita si sus cifras decimales varían de las de la diagonal[28] del siguiente modo: la primera cifra decimal del nuevo número deberá ser diferente de la primera cifra de la diagonal, la segunda cifra del número deberá ser distinta de la segunda cifra de la diagonal, la tercera cifra del número, diferente de la tercera cifra de la diagonal, etc. Es decir, tomando el ejemplo, las cifras de la diagonal son 1559710554…; para crear un número que no conste en esta lista, su primera cifra decimal deberá ser distinta de 1 (que es la primera cifra decimal del primer número de la columna), la segunda cifra un número distinto de 5 (segunda cifra decimal del segundo número), la tercera cifra deberá ser distinta de 5 (tercera cifra del tercer número de la columna), e igualmente para los números siguientes. Al seguir este método, el resultado

[28] La diagonal de la columna está resaltada en negrita.

será un número que no esté en ningún lugar de la columna infinita, pues difiere de todos los números de la columna en al menos una cifra.

Si se añade el número creado a la lista, aún se podrá crear otro, y si este último se añade a la lista, todavía habrá otro más, y otro, y otro… Lo que demuestra que no se puede dar la correspondencia biunívoca con los números naturales. Los números reales son un conjunto infinito mayor que el de los racionales.

Otra de las pruebas de Cantor indica que el número de puntos de un segmento de recta es igual al número de puntos de cualquier otra, independientemente de su longitud. En el siguiente gráfico se puede ver que un punto cualquiera P de la recta AB está en correspondencia biunívoca con un punto Q de la recta CD.

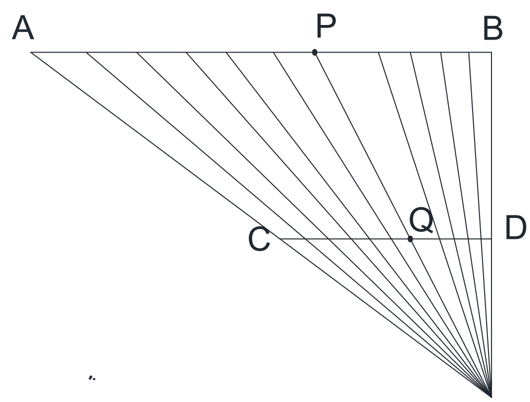

Gráfico 7.
Autora: Julia Murillo.

El cardinal de los puntos de una recta es mayor que el cardinal del conjunto de números racionales. A continuación se resumirá la demostración presentada en el artículo de *Aquiles, la Tortuga y el infinito* del autor José Enrique García Pascua.

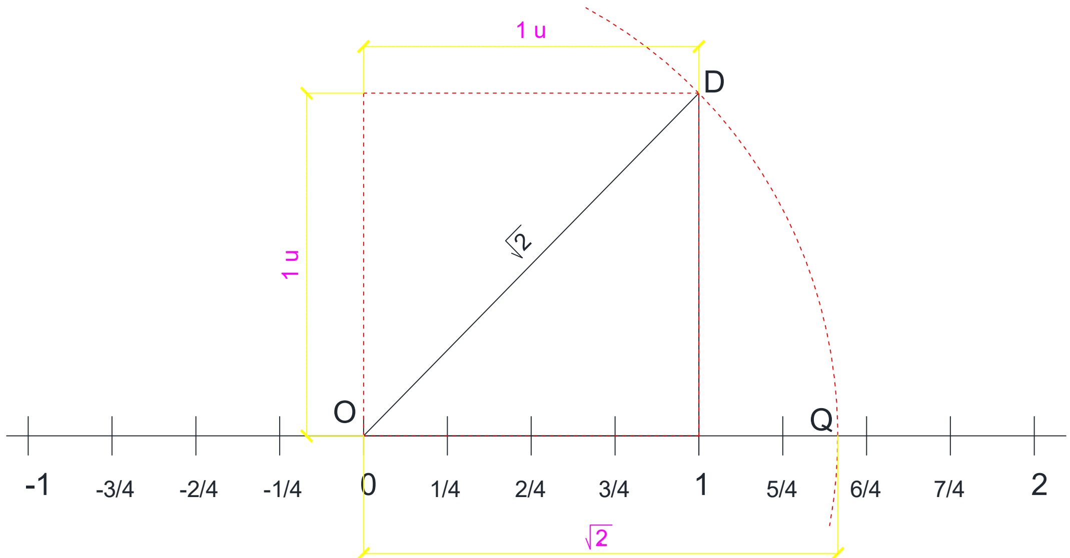

Gráfico 8.
Autora: Julia Murillo.

Si se toma una recta y en ella se determina un punto O, llamado origen, asumiendo una longitud arbitraria u como la unidad, se puede representar en la recta los números enteros (tanto positivos como negativos). Para situar en la recta una fracción $m/_n$ se debe dividir la longitud u en n partes iguales, ubicando la fracción n-ésima $(1/_n)$ m veces a partir del origen, a la derecha si se trata de una fracción positiva y a la izquierda si es negativa; de esta manera se puede representar cualquier fracción en la recta. Se puede además dibujar un cuadrado cuyos lados sean igual a una unidad $(l = 1)$. La diagonal tendrá una longitud igual a $\sqrt{2}$ (de acuerdo al teorema de Pitágoras[29]). Si se traza un arco con centro en O y radio OD, en la intersección del arco con la recta se determina el punto Q que está a una distancia $\sqrt{2}$ del origen y que no coincide con ninguna fracción $m/_n$; se concluye que la recta tiene puntos que no pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números racionales y que al conjunto de sus puntos le corresponde un cardinal mayor que $\aleph_0$.

[29] El teorema de Pitágoras indica que la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa. De esto se sigue que en un triángulo rectángulo isósceles de catetos que midan una unidad, la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$ unidades.

Así mismo, es demostrable que el número de puntos que contiene una recta o un segmento de recta es igual al número de puntos de cualquier superficie y de cualquier volumen.

> Hay probablemente más puntos en el espacio y más momentos en el tiempo que números finitos. (…) Con toda probabilidad hay exactamente tantos puntos en el espacio como números irracionales, y exactamente tantos puntos en una línea de una millonésima de centímetro como en la totalidad del espacio infinito (Russell, Los metafísicos y las matemáticas, 1983, pág. 376).

El cardinal del conjunto de los subconjuntos de un conjunto A de n elementos es igual a 2^n. Por ejemplo, a partir del conjunto $\{a, b, c\}$ de tres elementos $(n = 3)$ se puede generar los siguientes subconjuntos $\{\emptyset\}$, $\{a\}$, $\{b\}$,$\{c\}$,$\{a, b\}$,$\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ con los que se conforma un conjunto cuyo cardinal es $2^n = 2^3 = 8$. De acuerdo a lo que dice Russell; la fórmula 2^n "no es difícil hacerla extensiva a los números infinitos" (García Pascua, 2003, pág. 228) por lo que, el cardinal del conjunto de los subconjuntos de los números racionales es $2^{\aleph_0}$.

$2^{\aleph_0}$ es también el cardinal de los números reales, de los puntos de cualquier recta o segmento de recta, de cualquier superficie, o volumen.

> (…) se da una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y la sucesión de los infinitos puntos de la recta. Esto implica que el conjunto de los números reales es continuo y que el número de puntos que contiene la recta es $2^{\aleph_0}$ (García Pascua, 2003, pág. 231).

Russell dice que Zenón en sus paradojas se enfrentaba a los problemas de lo infinitesimal, el infinito y la continuidad. Según el autor, los tres problemas han sido solucionados por completo (Russell, Los metafísicos y las matemáticas, 1983, pág. 372). La división al infinito del espacio y del tiempo es un problema que puede solucionarse con la teoría de los transfinitos, según el autor.

> La desaparición de lo infinitesimal tiene toda clase de consecuencias extravagantes, con las que hemos de familiarizarnos progresivamente. El intervalo entre un momento y el siguiente tendría que ser infinitesimal, ya que si tomamos dos momentos con un intervalo infinito entre ellos, existen siempre otros dos momentos en el intervalo. Así pues, si no hay infinitesimales, nunca dos momentos son del todo consecutivos, sino que siempre hay momentos entre

> ambos. De ahí que deba haber siempre un número infinito de momentos entre cualquier par; pues si hubiera un número finito uno estaría más cerca del primero de los dos, y sería por tanto el siguiente. Eso podría parecer una dificultad; pero es aquí cuando aparece la filosofía del infinito y lo arregla todo.
> Algo parecido ocurre con el espacio. Si se parte un trozo de materia en dos, y cada parte se divide a su vez en dos más, etc., los trozos serán cada vez más pequeños y teóricamente pueden llegar a ser tan pequeños como queramos. Por muy pequeños que sean pueden aún ser divididos y hechos más pequeños. Pero tendrán siempre *algún* tamaño determinado, por pequeño que sea. Nunca alcanzamos de este modo lo infinitesimal. Ningún número finito de divisiones nos dará puntos como resultado. Y sin embargo *hay* puntos, sólo que no pueden ser alcanzados por sucesivas divisiones. Y otra vez aquí, la filosofía del infinito nos muestra cómo es esto posible, y por qué los puntos no son distancias infinitesimales (Russell, Los metafísicos y las matemáticas, 1983, págs. 373-374).

El espacio y el tiempo son continuos, y tienen un cardinal específico. García explica y cita a Russell:

> En particular, será el cardinal del conjunto de los números reales, $2^{\aleph_0}$, el transfinito que nos permita dilucidar el problema de Aquiles y la Tortuga, puesto que éste es el valor del *continuo*. "$2^{\aleph_0}$ es un número muy importante, concretamente, el número de términos de una serie que tiene la propiedad de 'continuidad' en el sentido que le dio Cantor a esta palabra. Suponiendo la continuidad del espacio y del tiempo en este sentido (como suele hacerse en la geometría analítica y la cinemática), éste será el número de puntos del espacio o de instantes del tiempo; también será el número de puntos de cualquier porción finita del espacio, sea una línea, un área o un volumen" (García Pascua, 2003, págs. 229-230).

En la matemática de los transfinitos no se cumple el axioma de que el todo tiene más términos que la parte, como ha sido evidente en algunas de las demostraciones anteriores. Russell explica la aporía de Aquiles de la siguiente forma:

> Podemos ahora entender por qué creía Zenón que Aquiles no puede alcanzar a la tortuga y por qué, ciertamente, puede alcanzarla. Veremos que todos los que no estuvieron de acuerdo con Zenón no tenían razón de estarlo, pues aceptaban premisas de las que su conclusión se seguía. El argumento es el siguiente: Supongamos que Aquiles y la tortuga parten en el mismo momento a lo largo de una ruta concediéndose a la tortuga (como es justo) una cierta ventaja en la salida. Supongamos que Aquiles va dos veces más de prisa que la tortuga, o diez o cien veces más de prisa. En tal caso no alcanzará nunca a la tortuga, pues en cada momento la tortuga está en algún lugar y Aquiles está en algún lugar, y ninguno de los dos está dos veces en el mismo lugar mientras la carrera está en curso. De este modo la tortuga va a tantos lugares como va Aquiles, pues cada uno está en un lugar en un momento, y en otro en otro momento. Pero si

> Aquiles alcanzara a la tortuga los lugares donde la tortuga habría estado serían sólo parte de los lugares donde habría estado Aquiles. Hemos de suponer que aquí Zenón apelaba al axioma de que el todo tiene más términos que la parte. Así, si Aquiles sobrepasaba a la tortuga, habría estado en más lugares que la tortuga; pero vimos que él tenía que estar, en un período determinado, exactamente en tantos lugares como la tortuga, ni más ni menos. De ello inferimos que no puede alcanzarla nunca. Este argumento es totalmente correcto si aceptamos el axioma de que el todo tiene más elementos que la parte (Russell, Los metafísicos y las matemáticas, 1983, pág. 377).

Russell explica que si Aquiles y la tortuga parten simultáneamente (aunque de lugares distintos), en un lapso determinado de tiempo ambos habrán recorrido el mismo número de sitios.

Si se acepta el axioma de que el todo tiene más términos que la parte, la conclusión de la aporía de Zenón es consecuente; Aquiles no alcanza a la tortuga porque debe recorrer más lugares que ella, pero como se ha dicho ambos recorren el mismo número de lugares en un lapso de tiempo.

Si, en cambio, rige el axioma de que el todo tiene igual número de términos que la parte, Aquiles puede alcanzar a la tortuga. El recorrido de ambos es de $2^{\aleph_0}$ lugares.

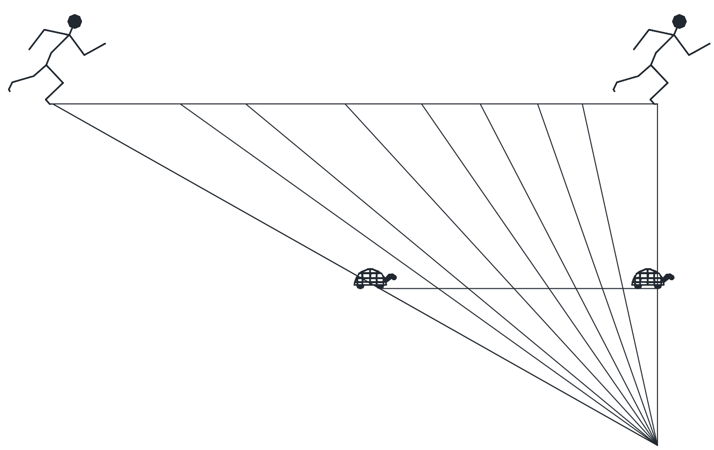

Gráfico 9.
Autora: Julia Murillo.

En *Aquiles, la Tortuga y el infinito* se amplía esta idea:

> (…) la carrera sobre la semirrecta no transcurre como si se tratara de una serie sin fin de puntos sucesivos (que es la idea de la que parte la solución matemática clásica de la aporía), sino que *cubre la totalidad de los puntos de la semirrecta*, que es un conjunto infinito, pero cuyo cardinal conocemos. Los competidores se encontrarán cuando tanto el uno como la otra hayan dado un total de pasos, que es lo que exactamente mide el intervalo a cubrir: ambas porciones de recta, la recorrida por Aquiles y la recorrida por la Tortuga, contendrán la misma cantidad de puntos, luego este es el cardinal que mide la distancia total sobre la que se desplazan tanto Aquiles como la Tortuga. La separación inicial entre los corredores, $d0$, es despreciable, aunque ella también contenga un número infinito de puntos, puesto que:
>
> $$2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$
>
> (García Pascua, 2003, págs. 231-232).

García expone que el autor William James está en "desacuerdo con los análisis de la paradoja que, desde la matemática cantoriana, ejecuta Russell" (García Pascua, 2003, pág. 233); esto no será referido en este trabajo, sin embargo, es pertinente exponer las conclusiones de García:

> Nadie duda de que el problema de Zenón no es un problema práctico, pues, de acontecer la carrera en la naturaleza, nos basta con el testimonio de nuestros sentidos para proclamar al vencedor.
>
> Este es, más bien, un problema matemático que se deriva de la propia noción de continuo. Tal noción es necesaria para solventar ciertas dificultades que se le presentan a la geometría, como la determinación del valor de la diagonal del cuadrado, y para encajar el caso matemático de que entre dos números reales cualesquiera siempre se pueda inscribir otro, mayor que el primero y menor que el segundo.
>
> Sin embargo, el continuo en sí ya es problemático, porque no parece compatible con la lógica de los hechos que un segmento de recta contenga el mismo número de puntos que la recta sin límites: en el mundo nunca acontece que la parte sea igual al todo.
>
> Y, puesto que es algo problemático, resulta comprensible que el postulado del continuo desemboque en paradojas que no tienen solución completamente lógica. Con respecto a la aporía de Aquiles y la Tortuga, constatamos que, tanto en la discusión de la solución matemática clásica, como en la de la solución cantoriana, hemos hallado nuevas contradicciones, porque no hemos conseguido librarnos de la *dificultad lógica* que supone el que cualquier segmento de recta (por minúsculo que lo imaginemos) siempre contenga puntos, que la recta, en resumen, sea infinitamente divisible.
>
> Quizás, los conceptos de las matemáticas no son tan lógicos como quería Russell, sino que simplemente se justifican por su aplicabilidad, porque sirven al cálculo (García Pascua, 2003, pág. 235).

3. LA PARADOJA DEL MENTIROSO

En este capítulo se estudia otra de las paradojas de la antigüedad. Se hará referencia a su contexto histórico, se expondrá la paradoja, se presentará un análisis y una alternativa de solución.

3.1. Contexto histórico

La paradoja del mentiroso tiene origen en el siglo IV a. C., las fuentes bibliográficas indican que Eubúlides hizo su primera formulación. Eubúlides perteneció a la Escuela Megárica. De esta escuela se tienen pocos datos, pero se sabe que tenía una tradición en lógica. La destreza en el manejo de problemas lógicos, en el discurso cotidiano y la controversia verbal, son algunos de los rasgos con los que se ha caracterizado al pensamiento megárico (Kneale & Kneale, 1972, pág. 14).

Sobre las influencias que tuvo la Escuela Megárica, hay que destacar la eleática; por el tema tratado, interesa en particular la influencia de Zenón de Elea. En *El desarrollo de la lógica* se cita que Euclides de Megara, fundador de la escuela, refutaba las argumentaciones atacando las conclusiones antes que las premisas, por lo que parecería haber estado familiarizado con el método de refutación de reducción por el absurdo; se cree que, Diodoro Cronos elaboró argumentos contra la posibilidad de movimiento; además, posteriormente, se llamó 'dialéctica' a la lógica estoica (similar a lo que sucedía con el caso de Zenón de Elea), heredera de la megárica (Kneale & Kneale, 1972, pág. 107).

La poca bibliografía acerca de los megáricos y de su lógica proviene todo de fragmentos de autores de otras escuelas, y en muchos casos con motivo de disputas. Roy Sorensen en *Breve historia de la paradoja* explica que, con suerte se ha podido reconstruir algo del pensamiento megárico, y sobre sus paradojas dice que han llegado a través de la tradición oral y escrita, muchas veces por medio de textos que las mencionan en un segundo plano, y otras veces por medio de críticas y opiniones despectivas que desacreditan a los megáricos (Sorensen, 2007, pág. 77).

El desarrollo de paradojas es uno de los logros en lógica que se conoce de los megáricos. En esta actividad destacó Eubúlides, a quien se le atribuyen varios argumentos paradójicos, algunos de los que se han conservado hasta la actualidad son: el mentiroso; la figura velada, el encapuchado, el inadvertido o Electra; el hombre calvo; sorites o el montón; el cornuto. Seguramente, la paradoja del mentiroso es la más conocida, además de la más comentada y estudiada desde diferentes puntos de vista y a lo largo de la historia. Como lo explican los Kneale, esta paradoja encierra el problema de la validez, que se expresa en términos de verdad y falsedad (Kneale & Kneale, 1972, pág. 15).

Los megáricos Diodoro Cronos y Filón de Megara fueron los primeros lógicos que se ocuparon de la naturaleza de los enunciados condicionales. Se sabe que los estoicos fueron los primeros en elaborar tratados sobre formas complejas de proposiciones, su estudio sobre la forma condicional surge, seguramente, por la cercanía a la filosofía megárica. Los enunciados condicionales eran interesantes por naturaleza para quienes practicaban la dialéctica zenónica (Kneale & Kneale, 1972, págs. 109-121), se sobreentiende el uso de estos en los argumentos paradójicos de los megáricos mediante el método de *reductio ad impossibile*.

Las paradojas constituían un asunto pedagógico serio en el contexto megárico, posiblemente estas daban cuenta de su doctrina filosófica. Igualmente, los estoicos las consideraban importantes; Zenón de Citio, fundador de la escuela estoica, quien no era propiamente un dialéctico, pensaba que la resolución de paradojas era importante en la formación de los escolares (Kneale & Kneale, 1972, págs. 108-109). Pero sus antagonistas tomaron a las paradojas como su punto débil.

Muy posiblemente Aristóteles y Eubúlides mantenían disputas; estas hostilidades permanecieron en sus seguidores –peripatéticos, megáricos y estoicos, y aún después-. La tradición, que se adhirió a Aristóteles, sería la causa de que se desprestigiara a la Escuela de Megara y de que no se conservara bibliografía importante de ella. Las obras de los difusores del mundo antiguo desprestigian a Eubúlides, y además de los comentarios iniciados por Cicerón y continuados por otros, aunque pocos, no se registra otra base textual que desmienta o por lo menos relativice la opinión generalizada sobre el pensador. Prácticamente, el interés por la lógica en el siglo XX es el que retoma desde otra perspectiva al pensamiento megárico y los problemas que entrañan sus paradojas (Sorensen, 2007, págs. 78, 80-81).

En la actualidad se considera que la importancia de la lógica megárica no era poca. Los Kneale creen que la lógica megárica, en lugar de contrapuesta, era complementaria a la lógica aristotélica, dicen que su divorcio fue funesto en el desarrollo de la lógica, y que cuando llegó la necesidad de fusionarlas, el mundo antiguo decaía y se apagó la posibilidad de esa importante tarea (Kneale & Kneale, 1972, pág. 109).

3.2. Enunciación de la paradoja

La paradoja del mentiroso es conocida de diversas formas:

- Un hombre afirma que está mintiendo.
- Miento.
- Esta oración es falsa.
- Epiménides, el cretense, dice que todos los cretenses son siempre mentirosos.

Esas son algunas de las variantes formuladas. Se encuentra diferencias entre ellas, por lo que no siempre son consideradas y tratadas por igual.

Estas proposiciones conducen a argumentos paradójicos, al intentar responder a la pregunta de si es verdadero o falso lo que se afirma. Por ejemplo, al tomar:

“Esta oración es falsa”

Se tiene que, si es verdadera, lo que se afirma es el caso, entonces es falsa. Y, si es falsa, lo que se afirma (que es falsa) no es el caso, entonces es verdadera. Por lo tanto, se tiene que la oración es falsa si, y solo si, es verdadera. O, lo que es lo mismo, la oración es verdadera si, y solo si, es falsa. La conclusión es claramente una contradicción.

3.3. Análisis de la paradoja

Quine clasifica a la paradoja del mentiroso en el grupo de las antinomias. Sobre estas dice: "(…) son las que desatan crisis en el pensamiento. Una antinomia produce una auto-contradicción a través de formas aceptadas de razonamiento. Esto establece que algún patrón de razonamiento implícito y confiable debe hacerse explícito y de ahí en adelante evitado o revisado."[30] (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p).

Al señalar la diferencia entre paradojas verídicas, falsídicas y antinomias, Quine dice:

> A veridical paradox packs a surprise, but the surprise quickly dissipates itself as we ponder the proof. A falsidical paradox packs a surprise, but it is seen as a false alarm when we solve the underlying fallacy. An antinomy, however, packs a surprise that can be accommodated by nothing less than a repudiation of part of our conceptual heritage (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p). [31]

Aquello que, en palabras de Quine, es parte de nuestro legado conceptual y tiene que ser revisado o evitado, tiene que ver, en este tipo de antinomias, con las locuciones de verdad y con la concepción semántica de verdad.

La paradoja del mentiroso es una paradoja semántica. El criterio de esta clasificación radica en que este tipo de paradojas utilizan palabras como "verdadero", "falso", "verdadero de", "falso de", "definible", "especificable", etc., siendo ese el origen del error que se oculta en el argumento.

[30] Traducido por Julia Murillo. "(…) is they that bring on the crises in thought. An antinomy produces a self-contradiction by accepted ways of reasoning. It establishes that some tacit and trusted pattern of reasoning must be made explicit and henceforward be avoided or revised."

[31]"Una paradoja verídica envuelve una sorpresa, pero la sorpresa se disipa rápidamente en cuanto ponderamos la prueba. Una paradoja falsídica contiene una sorpresa, pero es vista como una falsa alarma cuando resolvemos la falacia subyacente. Una antinomia, sin embargo, conlleva una sorpresa que puede ser resuelta con nada menos que un repudio a una parte de nuestro legado conceptual". Traducción personal.

Esta última clasificación es ampliamente aceptada, y distingue las paradojas semánticas de las paradojas de la teoría de conjuntos (o también llamadas paradojas lógicas). Esta clasificación no excluye la que Quine propone, de hecho, él trata las antinomias que involucran conceptos semánticos como un grupo definido. Pero, se puede acoger esta última clasificación sin referirse necesariamente a la distinción que Quine propone entre paradojas verídicas, falsídicas y antinomias.

Hay que señalar que históricamente se han propuesto algunas soluciones o intentos de soluciones a la paradoja, quizás la más difundida es la que se basa en la teoría de los lenguajes y metalenguajes, que será sintetizada en lo que sigue.

3.4. Solución de la paradoja

La semántica, tal como es considerada en lógica, es una parte de la semiótica[32] que estudia las relaciones entre los signos y fórmulas (expresiones formales de un lenguaje) con los contenidos y objetos, siendo los primeros aplicados a los segundos.

Alfred Tarski propone, en 1933 en *El concepto de verdad en los lenguajes formalizados*, una concepción semántica de la verdad que replantea las definiciones que los filósofos habían atribuido históricamente a la verdad. La teoría de Tarski marca el inicio de la semántica moderna. Señala que para formular una definición satisfactoria de verdad, esta debe ser materialmente adecuada y formalmente correcta. La adecuación material establece requisitos al contenido posible y la corrección formal parámetros a la forma posible de cualquier definición aceptable de verdad.

Para tratar la solución que Tarski da a la paradoja del mentiroso, es necesario hablar de la condición formal para una definición adecuada de verdad. En cuanto a la condición material, no será tratada en este trabajo, pero hay que decir que repercute en la definición de la verdad, por lo que se sugiere su estudio para tratar el tema con detalle.

“El problema de la definición de la verdad cobra un significado esencial y se puede solucionar de forma rigurosa solo para aquellos lenguajes que tengan una estructura

[32] Ciencia de los signos.

exactamente especificada" (Tarski, 1999, pág. 7). Los lenguajes de dicha estructura constan de ciertos axiomas y reglas de inferencia, por lo que únicamente estos son consistentes[33].

Los lenguajes semánticamente abiertos son necesariamente lenguajes con una estructura definida, los lenguajes semánticamente cerrados no gozan de esa estructura. Los lenguajes semánticamente cerrados (como los lenguajes naturales) presentan inconsistencias, la razón es que contienen, además de sus expresiones, los medios para referirse a las mismas, y términos semánticos (como los predicados "verdadero" y "falso") que pueden aplicárseles. Aunque en estos lenguajes rijan las leyes habituales de la lógica, su estructura no es definida, y por lo tanto son inconsistentes.

Las condiciones formales que Tarski considera necesarias para definir la verdad tienen que ver con la estructura del lenguaje. La verdad debe definirse en lenguajes semánticamente abiertos mediante una jerarquización de lenguajes. La jerarquización de lenguajes es posible mediante la distinción de "lenguaje objeto" y "metalenguaje". Si se habla de un lenguaje dado, este es un lenguaje objeto, pero se hace referencia a él mediante un metalenguaje. El lenguaje objeto tiene este nombre porque es objeto (de mención) de otro lenguaje.

El metalenguaje es por regla general más extenso que el lenguaje objeto, o, lo que es lo mismo, "es esencialmente más rico" ya que contiene "términos del lenguaje objeto; términos referidos a la forma de las expresiones del lenguaje objeto, y utilizados a la hora de construir los nombres de dichas expresiones; y términos lógicos", a lo que Tarski agrega:

> (…) En concreto, querríamos *introducir términos semánticos* (referidos al lenguaje objeto) *en el metalenguaje únicamente por definición*. Puesto que, si se cumple este postulado, la definición de la verdad, o de cualquier otro concepto semántico, cumplirá con la función que de forma intuitiva esperamos de cualquier definición; esto es, explicará el significado del término que se esté definiendo haciendo uso de términos cuyo significado sea completamente claro y unívoco. Y, además, tendremos entonces una garantía de que la utilización de

[33] Con esto, el autor hace referencia a los lenguajes formalizados, pero indica que hay la posibilidad de crear lenguajes no formalizados con una estructura especificada, y además, que estos serían útiles para reemplazar el lenguaje natural en el discurso científico.

> conceptos semánticos no nos hará caer en contradicciones (Tarski, 1999, págs. 10-11).

Para poner esto en claro, se puede designar como “L” al lenguaje objeto y como “M” al metalenguaje. Al ser más amplio, M debe tener una copia de L, así aquello que se diga en L, puede decirse también en M; además, M puede referirse a las oraciones de L y a su sintaxis; y finalmente, M tiene los medios para referirse a L y los predicados “verdadero en L” y “falso en L”.

Tarski indica que el lenguaje objeto y el metalenguaje tienen un sentido relativo, es decir, el metalenguaje puede convertirse en el lenguaje objeto de un metalenguaje para él. Algunos autores prefieren llamar al nuevo metalenguaje “metametalenguaje”. Llámese M’ a ese metametalenguaje, que a su vez puede referirse a M en los términos explicados, es decir, puede hablar de la sintaxis de M, puede decir las oraciones que se dicen en M, puede referirse a ellas y a su valor de verdad. Esta jerarquización de lenguajes puede extenderse indefinidamente.

Con esta jerarquía que evita contradicciones, se puede llevar a cabo una definición satisfactoria de verdad en el metalenguaje, afirma Tarski. Al aplicarla a la paradoja del mentiroso resulta que, la expresión ‘Esta oración es falsa’ no sería paradójica[34], pues la verdad se expresa únicamente para un lenguaje de diferente jerarquía. Si pertenece a M, la expresión debería decir: ‘Esta oración es falsa en L’.

La teoría semántica propuesta por Tarski parece solucionar el problema, pero de algún modo siguen apareciendo complicaciones. Algunos autores persisten en la teoría de Tarski, otros la encuentran aún insuficiente. Antes de hacer referencia a estas opiniones, se debe considerar otras variantes del mentiroso.

En la Edad Media se formularon variantes más complicadas como la siguiente:

- Sócrates: ‘lo que dice Platón es falso’
  Platón: ‘lo que dice Sócrates es verdad’

[34] Haack dice que en vez de paradójica sería falsa. Quine dice que antes que falsa sería más bien carente de sentido o agramatical.

O, en términos más generales:

- A: Todo lo que dice B (sobre mí) es falso.
  B: Todo lo que dice A (sobre mí) es verdadero

Parecida a esa, Haack recopila las siguientes:

- "La oración siguiente es falsa. La oración anterior es verdadera".

- En la una cara de una tarjeta postal está escrito: "La oración que hay en la otra cara de esta tarjeta es falsa". Y en la otra cara: "La oración que hay en la otra cara de esta tarjeta es verdadera".

Quine elabora otra variante:

- ''Resulta una falsedad cuando se adjunta a su propia cita' resulta una falsedad cuando se adjunta a su propia cita'.[35]

En cuanto a la última variante: se enuncia en una cita que si es adjuntada a sí misma, da como resultado una falsedad, y junto, aparece la misma expresión nuevamente. Lo que se enuncia es su propio resultado, por lo que, debe tratarse de una falsedad. Ahora la pregunta: ¿es verdadero o falso lo que se enuncia? Se tiene que, es verdadero si, y solo si, es falso.

Quine, al estudiar la paradoja de Grelling[36] presenta desconfiadamente una primera alternativa de solución, abstenerse de usar 'verdadero de' cuando implica la frase 'no

[35] Traducido por Julia Murillo. ''Yields a falsehood when appended to its own quotation' yields a falsehood when appended to its own quotation' (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p).

[36] La paradoja se refiere a los adjetivos autológicos y hetereológicos, a continuación una explicación:
Los adjetivos autológicos son aquellos que se describen a sí mismos (verdaderos de sí mismos), los adjetivos hetereológicos son aquellos que no se describen a sí mismos (no verdaderos de sí mismos). Entre los primeros están: "español", "corto", "polisílabo"; entre los segundos están: "alemán", "largo", "monosílabo". La pregunta que desemboca en la paradoja es: ¿el adjetivo "hetereológico" es hetereológico? El resultado dirá: "hetereológico" es hetereológico si, y solo si, "hetereológico" no es hetereológico.

verdadero de sí mismo'[37], siendo este un caso especial que desemboca en dicha paradoja. Sin embargo, esa no es la única paradoja semántica, y este método resulta cada vez menos eficiente al aplicarlo a otras. En la variante del mentiroso que Quine propone, por ejemplo, se establece la veracidad sobre el término 'falsedad', o mejor dicho, sobre la producción de una falsedad. De modo que, este método es cada vez menos idóneo y más "costoso".

Resulta muy arriesgado abandonar las locuciones de verdad por motivo de estas paradojas. En la variante del mentiroso discutida, la solución parece ser más grave que el problema. Quine recurre al trabajo de Tarski en conjunto con el de Russell para eliminar estas paradojas; en la variante del mentiroso, la solución consiste en aplicar subíndices a la palabra 'falsedad' atribuyéndole en cada caso un nivel diferente de jerarquía. El resultado:

''Resulta una falsedad$_0$ cuando se adjunta a su propia cita' resulta una falsedad$_1$ cuando se adjunta a su propia cita'.

El autor dice que aunque pareciera una forma extravagante de eliminar paradojas, sería mucho más costoso eliminar las locuciones de verdad como "verdadero"; incluso dejar de utilizar dichas locuciones en las expresiones que contengan estas locuciones, tendría un costo más alto que utilizar los subíndices. Los subíndices permiten aplicar las locuciones de verdad a las expresiones que contengan dichas locuciones, aunque el método sea artificioso.

Susan Haack, por otro lado, muestra las deficiencias del sistema de Tarski:

> Aunque el atractivo de la teoría de la verdad de Tarski ha obtenido bastante apoyo para esta propuesta, también ha recibido críticas por su "artificialidad". La jerarquía del lenguaje y la relativización de "verdadero" y "falso" evitan las paradojas semánticas, pero parece faltarles justificación intuitiva independientemente de su utilidad a este respecto. En otras palabras, el enfoque de Tarski parece dar una solución formal, pero no filosófica. La razón

[37] Quine cree que la paradoja de Grelling tiene origen en un caso especial de este principio: hablar de los adjetivos como verdaderos de las cosas. El caso especial consiste en atribuir la frase adjetivada 'no verdadero de sí mismo' a una cosa en especial, la misma frase 'no verdadero de sí mismo'. Se puede evitar la paradoja si se deja de aplicar 'verdadero de' a esta expresión (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p).

> que aduce Tarski para exigir la abertura semántica es, simplemente, que la clausura semántica conduce a la paradoja (Haack, 1982, pág. 167).

Muchos autores han dicho que el origen de la paradoja del mentiroso está en la autorreferencia, pero estas opiniones son discutidas. En este caso, la autorreferencia es la propiedad de la oración de referirse a sí misma, por ejemplo en "esta oración es falsa", "esta" se refiere a la misma oración de la que es parte (Bunge, 2005, pág. 15).

Haack analiza, según el método de Tarski, las siguientes expresiones que dice carecen de autorreferencia:

- Jones dice: "Todas las elocuciones de Nixon sobre Watergate son falsas".
  Nixon dice: "Todas las elocuciones de Jones sobre Watergate son falsas".

De acuerdo a la jerarquía de lenguajes, las elocuciones de Jones deberían estar en un nivel por encima de las de Nixon, y las elocuciones de Nixon también deberían estar en un nivel por encima de las de Jones. Pero ese no es el único problema, la paradoja se restablece cuando uno de los dos personajes asevera del otro que sus elocuciones son verdaderas, por ejemplo, si Nixon atribuye la verdad sobre Watergate a Jones, lo que dice este, que 'todas las elocuciones de Nixon sobre Watergate son falsas', es falsa, si fuera verdadera, y verdadera si fuera falsa.

Haack encuentra una alternativa en el trabajo de Kripke[38] a ciertas deficiencias de la teoría tarskiana. Mientras en esta última los predicados de verdad deben ser totalmente definidos, lo que significa que toda oración bien formada debe ser verdadera o falsa, Kripke rechaza esta idea, por lo que su teoría tiene afinidades con las lógicas trivalentes, pero en vez de atribuir un tercer valor como "paradójico" o "indefinido" a las paradojas, no se atribuye ninguno. Haack cree que Kripke sí puede dar una respuesta al mentiroso reforzado ("esta oración es o falsa o paradójica"), sin embargo, sugiere que no es el único aspecto que cabe analizar. La teoría de Kripke no será referida aquí, pues supera los objetivos de este trabajo que se enmarcan en la lógica clásica.

[38] "La teoría de la verdad propuesta recientemente por Kripke en 1975 es una variante de la de Tarski, modificada esencialmente para dar cuenta de un modo más sofisticado de las paradojas semánticas." (Haack, 1982, pág. 109).

Hofstadter también analiza el ejemplo de dos oraciones que se refieren la una a la otra, explica que aunque no haya "autorreferencia", si se toma ambas oraciones en conjunto, se produce el mismo efecto. A diferencia de Haack, él encuentra suficiente la jerarquía de lenguajes para bloquear la paradoja:

> La primera oración, en vista que habla de la segunda, tiene que pertenecer a un nivel más alto que esa segunda. Por idénticas razones la segunda oración tiene que pertenecer a un nivel más alto que la primera. Como esto es imposible, las dos oraciones son "carentes de sentido". Más precisamente, tales oraciones no pueden ni siquiera formularse en un sistema basado en una jerarquía estricta de lenguajes. Esto pone una barrera a todas las versiones de la paradoja de Epiménides (Hofstadter, 2007, pág. 25).

Al tratar este tema, los profesores de la Universidad de Ámsterdam, el colectivo L.T.F. Gamut, dicen que Tarski finalmente evita la autorreferencia, y que hay otras teorías que sugieren enfrentarla, mencionan a los siguientes autores: Kripke, Herzberger, Gupta y, Barwise y Etchementdy. De todas formas, exaltan que es indispensable que en semántica se distinga la estructura del lenguaje (se puede decir, a la manera de un "sistema lógico"):

> En conclusión, podemos decir que cualquiera que sea la posición que tomemos aquí, la existencia de paradojas semánticas no excluye la posibilidad de una semántica modelo teórica para el lenguaje natural. Pero, por supuesto, debemos tomar medidas. Ya sea que nos restrinjamos describiendo el lenguaje natural en la manera sugerida por Tarski, o que adoptemos un enfoque más directo, pero también más complejo, como los que proponen Kripke y demás. (Gamut, 2010, pág. 180).

Por otro lado, Garrido sugiere que Tarski trató el problema de la autorreferencia, dice que "con la protección de complicados formalismos se puede navegar sin miedo a la contradicción por las pantanosas aguas de la autorreferencia lingüística."[39] (Garrido, 2005, pág. 531).

La teoría semántica de Tarski, a pesar de que pudiera haber recibido críticas, actualmente aún es considerada un referente en la materia, y un referente para el estudio de las paradojas semánticas en general, y del mentiroso en particular. La cita a continuación expone el criterio del autor en relación al estudio de las paradojas:

---

[39] El comentario de Garrido se refiere tanto al trabajo de Gödel como al de Tarski.

En mi opinión, sería erróneo y peligroso para el progreso científico despreciar la importancia de estas y otras antinomias, y tratarlas como si fueran bromas o meras sofisterías. Es un hecho que estamos en presencia de un absurdo, que nos hemos visto obligados a afirmar una oración falsa (…) Si nos tomamos en serio nuestra labor, no podemos aceptar este hecho sin más. Debemos descubrir sus causas, analizar las premisas sobre las que la antinomia se asienta; tenemos que rechazar por lo menos una de estas premisas e investigar las consecuencias que se derivan para nuestro campo de investigación.

Se debería subrayar que las antinomias han desempeñado un papel decisivo a la hora de establecer el fundamento de las ciencias modernas deductivas. Y tanto las antinomias de tipo teórico, y en concreto la antinomia de Russell (de la clase de todas las clases que no son miembros de ellas mismas), constituyeron el comienzo de todos los intentos fructíferos para llevar a cabo una formalización consistente de la lógica y las matemáticas, de tal forma que la antinomia del mentiroso, así como otras antinomias han hecho posible la construcción de la semántica teórica (Tarski, 1999, pág. 8).

4. LA PARADOJA DE RUSSELL

La paradoja sobre la que trata este capítulo es contemporánea. A continuación se hace una exposición de la misma, se presenta un análisis y dos alternativas de solución, además de las consecuencias históricas que generó en las teorías lógica y matemática.

4.1. Enunciación de la paradoja

Esta paradoja es conocida también como 'paradoja de las clases', pero se la distingue mejor con el nombre de su autor ya que hay muchas paradojas referentes a las clases. Aquí 'clase' y 'conjunto' serán tomados como sinónimos.

La mayoría de conjuntos son aquellos que no son miembros de sí mismos, por ejemplo, un conjunto de perros, que no es un perro; o, el conjunto de todas las casas, que no es una casa. Pero hay conjuntos que son miembros de sí mismos, por ejemplo, el conjunto de todas las cosas excepto Bertrand Russell, que es el conjunto de todas las cosas excepto Bertrand Russell; o, el conjunto de objetos abstractos, siendo este mismo conjunto un objeto abstracto.

Si se puede agrupar conjuntos en uno que los contenga, es decir, si se puede crear conjuntos de conjuntos, se podría crear el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos.

Ahora se puede preguntar: ¿el conjunto de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, es miembro de sí mismo o no lo es?

Si este conjunto es miembro de sí mismo, debe poseer la propiedad de sus miembros de no ser miembros de sí mismos, entonces no es miembro de sí mismo; y, si el conjunto no es miembro de sí mismo, debe ser diferente de sus miembros (que no son miembros de sí mismos), entonces debe ser miembro de sí mismo.

La respuesta es una contradicción: Si este conjunto es miembro de sí mismo, entonces no es miembro de sí mismo; y, si no es miembro de sí mismo, entonces es miembro de sí mismo.

Garrido en *Lógica simbólica* presenta una exposición de la paradoja elaborada por Curry:

1. Clases y clases de clases. Parece intuitivamente evidente que disponemos de la idea de <<clase>>, la cual nos permite coleccionar mentalmente objetos, como la clase de los pájaros, la clase de los hombres o la clase de los triángulos. Igualmente nos consta que podemos concebir <<clases de clases>>. Si una especie animal es una clase, la clase de las especies animales es una clase de clases.
2. Clases propias e impropias. Dividamos ahora las clases, como propone RUSSELL, en dos grandes grupos: propias e impropias. *Propias* son las clases que no son miembro de sí mismas, como es el caso, por ejemplo, de la clase de los hombres o de la clase de las cucharillas de café (porque es obvio que ni la clase de los hombres es un hombre, ni la clase de las cucharillas de café tampoco es una cucharilla de café). *Impropias* son las clases que son miembro de sí mismas, como la clase de todas las clases o la clase de todos los conceptos (porque es obvio que la clase de todas las clases es una clase, y la clase de todos los conceptos es un concepto).
3. La clase russelliana. Consideremos ahora una clase R, a la que llamaremos *clase de Russell* y la definiremos como <<la clase de todas las clases propias>>.
4. Preguntemos ahora: ¿es R propia o impropia?
5. Al tratar de responder a esa pregunta quedamos envueltos en la siguiente paradoja:
   Supóngase que R es propia. Al ser, por definición, <<la clase de todas las clases propias>>, deberá ser miembro de sí misma. Pero, si es miembro de sí misma, entonces no es una clase propia.
   Supóngase que R no es una clase propia. Siendo, como es, por definición <<la clase de todas las clases propias>> no es miembro de sí misma. Pero, si no es miembro de sí misma, es una clase propia.
6. En símbolos (utilizando los conectores $\neg$, $\leftrightarrow$, los símbolos de igualdad, $=$, y pertenencia, $\in$, y X, Y como variables de clase o conjunto):
   Para toda clase X:
   (1) $X \in R \leftrightarrow \neg (X \in R)$ (por definición de R)
   (2) $R \in R \leftrightarrow \neg (R \in R)$ (sustitución de X por R)
   La línea (2) establece una equivalencia entre $R \in R$ y la negación de $R \in R$.
   (Garrido, 2005, pág. 521)

4.2. Solución de tipos lógicos

Russell presenta la teoría de tipos lógicos como una solución formal a la paradoja, derivada de la solución filosófica del principio de evitación de círculo vicioso[40] (P.C.V.). Explica a este último con las siguientes palabras "<<lo que presupone el todo de una colección no debe formar parte de la colección>>" (Kneale & Kneale, 1972, pág. 609). Aquí se hará referencia a la teoría simple de tipos de forma muy abreviada.

El sistema de Russell divide el universo del discurso en una jerarquía de tipos. En el tipo más bajo solamente hay "individuos" u "objetos" (tipo 0), el tipo que sigue corresponde a los conjuntos de individuos (tipo 1), el siguiente contiene conjuntos de conjuntos de individuos (tipo 2)…, la escala se extiende indefinidamente.

Tipo 0	Individuos
Tipo 1	Conjuntos del tipo 0 (conjuntos de individuos)
Tipo 2	Conjuntos del tipo 1 (conjuntos de conjuntos de individuos)
Tipo 3	Conjuntos del tipo 2 (conjuntos de conjuntos de conjuntos de individuos)
…	
Tipo n	Conjuntos del tipo n-1
…	

De acuerdo a esta jerarquía cada conjunto es de un tipo específico, y se puede indicar pertenencia a un conjunto únicamente si sus miembros son de un tipo más bajo. Por ejemplo, si se tiene que x pertenece al tipo 0 (x_0) y y al tipo 1 (y_1), se puede afirmar que $x \in y$.

Garrido ofrece una explicación más técnica. Primero enuncia el principio de círculo vicioso: "Ninguna totalidad puede contener miembros cuya definición incluya los miembros que la integran". Para explicarlo, dice que una proposición no puede ser miembro de sí misma: Es correcto pasar de $\wedge xPx$ a Pa, pero no a PPa siendo el predicado P y el argumento Pa. (Garrido, 2005, pág. 522).

[40] Susan Haack hace la distinción entre "solución formal" y "solución filosófica" que aquí se considera.

A continuación enuncia el orden de tipos:

> 1) Los términos o sujetos de las proposiciones atómicas, que denotan individuos y jamás pueden funcionar como predicados, constituyen el tipo primero y más bajo.
> 2) La totalidad de las proposiciones atómicas y de las proposiciones cuantificadas en las que sólo las variables de individuo queden ligadas por la cuantificación son, dice Russell, <<las proposiciones de *primer orden*, que constituyen el segundo tipo lógico>>.
> 3) Las proposiciones que versen sobre estas últimas –en cuyo caso los cuantificadores no afectan exclusivamente a símbolos de individuo- son <<las proposiciones de *segundo orden*, que constituyen el tercer tipo lógico>>. Y así sucesivamente (Garrido, 2005, págs. 522-523).

Luego explica que las proposiciones de primer orden tratan de las propiedades que convienen a los objetos, y las propiedades de segundo orden de las propiedades ya no de los objetos, sino de las propiedades que convienen a estos. En este sistema la paradoja de Russell no puede suceder, pues es imposible que un conjunto se pertenezca a sí mismo. Además siempre puede darse un conjunto mayor que cualquiera, por lo que no es posible un conjunto de todos los conjuntos.

Lo que expresa la paradoja, de acuerdo a la teoría de tipos, no es ni verdadero ni falso, sino carente de sentido. La paradoja de Russell viola la jerarquía de tipos, y para reestablecer el razonamiento se debe rectificar este orden.

4.3. Análisis de la paradoja

Este análisis toma los argumentos discutidos por Quine en *The ways of paradox*.

El autor cataloga a la paradoja de Russell como una antinomia, es decir, es uno de aquellos razonamientos que producen crisis en el pensamiento porque generan contradicciones a partir de formas aceptadas de inferencia. Pero esta antinomia es diferente a las antinomias relacionadas con las locuciones de verdad (paradojas semánticas), esta involucra términos como 'clase', 'miembro', 'pertenencia', etc.; por lo que, corresponde a las antinomias de la teoría de conjuntos.

Quine encuentra que el patrón de razonamiento implícito en la paradoja y aparentemente confiable es el siguiente: “para cualquier condición que se pueda formular, hay una clase cuyos miembros son las cosas que cumplen esa condición”[41] (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p) (sin importar si el conjunto tiene miembros o es un conjunto vacío).

Para ejemplificar esto último, se puede enunciar una condición cualquiera como “ser vaca blanco con negro”, y los miembros del conjunto que satisface esta condición serán las vacas blanco con negro; por otro lado, si se enuncia la condición “ser insecto alado que habita en Marte”, el conjunto que satisface esta condición será un conjunto vacío. Incluso si se enuncian condiciones absurdas como “ser cuadrado redondo”, o “ser objeto que tenga dimensión, y no ser objeto que tenga dimensión”, habrá conjuntos correspondientes a tales condiciones.

Así, se puede especificar una clase con tan solo enunciar una condición necesaria y suficiente para pertenecer a aquella. Este principio, que Quine llama principio de existencia de clases, de acuerdo con la teoría estándar de clases, permite que se enuncie una clase que tiene como miembros las clases que no son miembros de sí mismas.

Al desembocar en paradojas como la de Russell, el principio de existencia de clases está en duda.

Quine señala que la paradoja del barbero y la paradoja de Russell son iguales en estructura; este paralelismo permitiría catalogar a la paradoja de Russell como una paradoja verídica[42], si se declara que no existe la clase cuyos miembros son todos y solo aquellos que no se pertenecen a sí mismos. Sin embargo, la paradoja de Russell no es una paradoja verídica, sino una antinomia. Comparativamente, la razón es que la existencia de ese barbero no se presupone, pero en nuestros hábitos de pensamiento, sí se concibe una clase como la enunciada en la paradoja como un presupuesto plausible. “La paradoja de Russell es una antinomia genuina porque el principio de existencia de

[41]Traducido por Julia Murillo. “For any condition you can formulate, there is a class whose members are the things meeting the condition”.
[42] La paradoja del barbero es una paradoja falsídica porque tiene implícita una falacia y es un argumento falso. Pero es una paradoja verídica si se muestra que no existe tal barbero.

clases que nos obliga a abandonar es tan fundamental”[43] (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p). El autor explica que si en un futuro se desentraña la dificultad suficientemente y el principio de existencia de clases es sustituido por otro efectivo en la práctica, aquel sería considerado un absurdo, y así el argumento de Russell no sería más que una paradoja verídica.

Si las paradojas de clases se originan por el principio de existencia de clases, como una primera alternativa menciona el autor la posibilidad de limitar dicho principio; no totalmente, pero en los casos en que una condición de pertenencia mencione pertenencia, tal como sucede en la paradoja de Russell. Sin embargo, esa no es una solución apropiada, es similar a la de limitar las locuciones de verdad en el caso de las antinomias semánticas.

Quine explica que el problema central de sentar las bases de la teoría de conjuntos es bloquear las paradojas que le afectan, y que en vez de limitar el principio de existencia de clases en la forma mencionada, se pueden evitar las paradojas mediante restricciones más leves. Menciona el autor que una primera tentativa fue la teoría de tipos lógicos de Russell; una teoría muy diferente, que surgió al mismo tiempo, fue la de Zermelo, a la cual le seguirían otras variaciones en los siguientes años.

Al tener las antinomias como antecedente, las teorías de conjuntos fundantes tienen en cuenta que la enunciación de una condición puede o no tener un conjunto correspondiente con ella. Así, las diversas teorías difieren entre sí en la garantía de la correspondencia de las clases; pero ninguna garantizará la condición de ser o no ser miembro de sí mismo.

Quine señala que sería un error restringir la condición de pertenencia de clases cada vez que esta implique una paradoja y dejándola intacta para los casos en que no. Parece que el autor quiere decir que, en vez de eliminar las paradojas, con esta medida, más bien se está sujeto a ellas porque no se puede saber cuándo se generará una nueva contradicción. Luego dice:

[43] Traducido por Julia Murillo. “Russell's paradox is a genuine antinomy because the principle of class existence that it compels us to give up is so fundamental”.

> We are driven to seeking optimum consistent combinations of existence assumptions, and consequently there is a great variety of proposals for the foundations of general set theory. Each proposed scheme is unnatural, because the natural scheme is the unrestricted one that the antinomies discredit; and each has advantages, in power or simplicity or in attractive consequences in special directions, that each of its rivals lacks (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p).[44]

Quine termina esta sección con las siguientes palabras: "mencioné anteriormente que el descubrimiento de una antinomia es una crisis en la evolución del pensamiento. En la teoría general de conjuntos la crisis empezó sesenta años atrás y aún no termina" [45] (Quine, The ways of paradox and other essays, 1976, pág. s/p). Esto da una idea de la vigencia del problema y de la importancia que debe darse a las paradojas en las teorías en que se presenten.

4.4. Críticas a la teoría de tipos lógicos

Russell trató a las paradojas sin hacer una distinción de grupos, pensaba que a todas ellas era común la falacia de violación de círculo vicioso.

La siguiente cita muestra la relación del P.C.V en la teoría de tipos:

> (…) Cuando afirmo todos los valores de una función *fx*, los valores que *x* puede tomar deben ser definidos, si lo que estoy afirmando ha de ser definido. Es decir, que ha de haber un determinado total de posibles valores de *x*. Si ahora creo nuevos valores, definidos en términos de ese total, dicho total aparece por ello aumentado y, en consecuencia, los nuevos valores que a él se refieren se referirán a ese total aumentado. Pero puesto que han de ser incluidos en la totalidad, nunca puedo alcanzarlos. El procedimiento es como saltar sobre la sombra de la propia cabeza. Podemos dar un ejemplo sencillo de esto con la paradoja del mentiroso. El embustero dice: <<Todo lo que afirmo es falso.>> Esta es, en realidad, una afirmación que él hace, pero se refiere a la totalidad de sus afirmaciones, y solamente si incluimos esta afirmación en la totalidad resulta la paradoja. Tendremos que distinguir entre proposiciones que se refieren a un

[44] "Estamos impulsados a la búsqueda de combinaciones óptimas y consistentes de los supuestos de existencia, y en consecuencia hay una gran variedad de propuestas para los fundamentos de la teoría general de conjuntos. Cada esquema propuesto es antinatural, porque el esquema natural es aquel irrestricto que las antinomias desacreditan; y cada uno tiene sus ventajas, en poder, simplicidad o en consecuencias atractivas en direcciones especiales, características que les faltan a los esquemas rivales". Traducción personal.

[45] Traducido por Julia Murillo. "I remarked earlier that the discovery of antinomy is a crisis in the evolution of thought. In general set theory the crisis began sixty years ago and is not yet over".

> determinado total de proposiciones, y proposiciones que no lo hacen. Las que se refieren a una totalidad de proposiciones nunca pueden ser miembros de tal totalidad. Podemos definir como proposiciones de primer orden las que no se refieren a una totalidad de proposiciones; proposiciones de segundo orden, a las que se refieren a totalidades de proposiciones de primer orden, y así sucesivamente *ad infinitum*. (…)
>
> Se verá que en todas las paradojas lógicas hay una especie de autorreferencia reflexiva, que ha de condenarse por las mismas razones; es decir, porque incluye, como miembro de una totalidad algo que se refiere a dicha totalidad, y que solamente puede tener un significado concreto si la totalidad está ya determinada (Russell, La evolución de mi pensamiento filosófico, 1976, págs. 83-84).

El sistema de Russell bloquea las paradojas, pero se le han hecho algunas objeciones.

Las citas a continuación son críticas relacionadas al principio de círculo vicioso; lo que afecta tanto a la teoría simple como a la teoría ramificada de tipos.

Como se ha visto, el principio de círculo vicioso prohíbe la autorreferencia. Los argumentos siguientes coinciden en que prohibirla es una restricción muy amplia porque conlleva también expresiones que no desembocan en paradojas:

> (…) En primer lugar, el P.C.V. ciertamente no está establecido con toda la precisión que sería de desear; y, por tanto, es difícil ver exactamente lo que está equivocado junto con las violaciones del mismo. Ramsey comentó que no veía nada objetable en especificar a un hombre como, digamos, el máximo bateador de su equipo –especificación que aparentemente viola el P.C.V.-. No todos los círculos excluidos por el P.C.V., señalaba, son verdaderamente viciosos (Haack, 1982, pág. 166).

> El remedio que receta contra las paradojas –proscripción total de la autorreferencia en cualquier forma que sea- es verdaderamente peor que la enfermedad, pues estigmatiza como carentes de sentido muchas construcciones perfectamente buenas (Hofstadter, 2007, pág. 25).

Los Kneale también hacen referencia a este problema, rechazar el principio de círculo vicioso, dicen, “sería más un alivio que una auténtica pérdida, dado que el principio resulta harto problemático y difícil de aplicar” (Kneale & Kneale, 1972, pág. 619).

Con el fin de evitar varias paradojas que caen en autorreferencia (círculos viciosos), Russell evita en sí la autorreferencia. Al final, esta solución resulta parecida a la que

Quine termina por desaprobar, la de limitar el principio de existencia de clases para los casos en que "pertenencia mencione pertenencia". La solución de Russell es bastante amplia, no solo en el sentido de que el P.C.V. se aplica a las paradojas en general, sin ninguna distinción de grupos, sino sobre todo en el sentido de que eliminar por completo la autorreferencia tiene consecuencias tanto lingüísticas como científicas.

Otras críticas que recibe la teoría de tipos son particularmente en relación a la teoría ramificada:

> Desde el punto de vista formal el sistema de los *Principia* tiene graves defectos, entre ellos el olvido de la diferencia entre axiomas y reglas de inferencia. Pero la justificación crítica de sus contenidos deja más que desear. La ramificación de la teoría de los tipos, encaminada a bloquear definiciones indeseables, bloquea también definiciones imprescindibles para sacar adelante la teoría de los números reales. Los autores de la obra pretendieron neutralizar este desagradable efecto invocando un *axioma de reducibilidad* que tenía trazas de proposición *ad hoc* y no convenció casi a nadie (Garrido, 2005, pág. 524).

> Recuérdese que Russell intentó completar el programa, comenzado por Frege, de reducir la aritmética a la "lógica", i.e., al cálculo de oraciones, al cálculo de predicados de primer orden y a la teoría de conjuntos. Sin embargo, las restricciones de los tipos bloquean la prueba de la infinitud de los números naturales y las restricciones de los órdenes bloquean la prueba de ciertos teoremas afines. En los *Principia Mathematica* se preservaron éstas mediante la introducción de nuevos axiomas, el axioma de infinitud y el axioma de reducibilidad, respectivamente; esto asegura la derivabilidad de los postulados aritméticos de Peano; pero el carácter *ad hoc* de estos axiomas merma la plausibilidad de la tesis de que la aritmética haya sido reducida a una base *puramente lógica* (Haack, 1982, págs. 165-166).

Sin embargo, hay opiniones que aún encuentran valiosa la teoría de tipos, por ejemplo, el colectivo L.T.F. Gamut, la acoge, no para tratar la teoría de conjuntos, sino con fines lingüísticos. Al tratar sobre la paradoja de Russell dicen:

> Esta solución explícita al problema de las paradojas basada en tipos no es la más favorecida hoy en día. Hay formalizaciones axiomáticas de la Teoría de Conjuntos en las que se integra la Teoría de Tipos, aunque ésta no está presente de manera explícita en el lenguaje. Estos formalismos no sólo evitan la paradoja de Russell, sino que también tienen la ventaja de ser más fáciles de trabajar que la Teoría de Tipos. Sin embargo, en lo que concierne a las aplicaciones en análisis lingüísticos, la Teoría de Tipos sigue siendo una herramienta útil (Gamut, 2010, pág. 98).

Esta opinión queda ratificada cuando al tratar algunas versiones de la paradoja del mentiroso, muchos autores utilizan la teoría de los lenguajes semánticamente abiertos conjuntamente con la teoría de tipos. En ese caso, la teoría de tipos sirve a la semántica, y puede considerarse, como afirman estos autores, que sirve a la lingüística en general.

La teoría de tipos es importante porque es una de las primeras teorías contemporáneas que se enfrenta al problema de las paradojas. Aunque, de acuerdo al paradigma científico vigente, hay otras teorías más idóneas para tratar las paradojas de la teoría de conjuntos, Russell abrió el camino en el intento de llevar a cabo el ideal logicista.

4.5. Breve mención a las soluciones de las teorías axiomáticas de conjuntos

Al tiempo que Russell presentaba su teoría de tipos lógicos, Ernst Zermelo propuso en 1908 la primera teoría axiomática de conjuntos. Él había llegado a la paradoja por su parte, e ideó un sistema que tuvo más acogida que el de Russell. Para evitar la paradoja, esta teoría hace restricciones a la teoría de conjuntos. A partir de eso, la anterior teoría de Cantor y Dedekind es conocida como teoría ingenua de conjuntos.

Posteriormente, a la teoría de Zermelo se añadieron algunos axiomas, entre ellos uno propuesto por Abraham Fraenkel, por lo que esta teoría se conoce también como sistema Zermelo-Fraenkel (o abreviado ZF).

Sobre cómo se trata los conjuntos que se pertenecen a sí mismos en la axiomática de conjuntos, Clark dice:

> (…) si queremos llegar al fondo de la paradoja, podría ser un error sostener que proviene simplemente de permitir que los conjuntos se pertenezcan a sí mismos, igual que es un error pensar que la paradoja de EL MENTIROSO proviene de dar por válidas frases que se refieran a sí mismas. De hecho, el concepto de conjunto puede desarrollarse de manera tal que admita conjuntos que se pertenezcan a sí mismos (entre ellos los llamados <<hiperconjuntos>>) sin admitir el conjunto contradictorio de Russell de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. (…) En la versión de teoría de conjuntos que admite hiperconjuntos, el axioma de ZF que prohíbe los conjuntos que son miembros de sí mismos, el de regularidad o fundación, se sustituye por su negación, pero se respetan el resto de axiomas (Clark, 2009, pág. 223).

Se pretende eliminar el conjunto contradictorio de Russell, sin que ello signifique prohibir los conjuntos que se pertenecen a sí mismos, entre ellos los "hiperconjuntos" o "superconjuntos" (conjunto de los subconjuntos de un conjunto).

Actualmente, la teoría axiomática de conjuntos ZF no es la única, pero tiene mucha aceptación y es considerada una base para las demás.

Del sistema axiomático de Von Neumann, Bernays y Gödel (NBG), Garrido dice que es más liberal y que puede generar conjuntos por comprensión, pero que requiere una distinción entre 'conjunto' y 'clase'; los conjuntos pueden ser miembros de otros conjuntos, pero no así las clases (Garrido, 2005, pág. 527), como se explica a continuación.

Las teorías axiomáticas de conjuntos toman en cuenta la paradoja de Russell como antecedente para su elaboración teórica. En *La matemática del siglo XX* se explica que estas teorías abandonan el enfoque analítico ("desde arriba") y adoptan un enfoque sintético ("desde abajo") para elaborar los principios de existencia y las reglas de construcción de los conjuntos, y así obtener los conjuntos de uso corriente, pero evitando los paradójicos (Odifreddi, 2006, págs. 32-33).

En el mismo libro, se puede obtener una explicación de cómo la axiomática de conjuntos soluciona la paradoja. La remoción de la paradoja, dice, requiere una limitación del principio de comprensión[46] y la distinción entre 'clase' y 'conjunto'.

> Un conjunto es, simplemente, una clase que pertenece a otras clases: entonces, todos los conjuntos son clases, pero no todas las clases son conjuntos, y las que no lo son se llaman *clases propias*.
>
> Si se intenta reproducir el argumento de Russell considerando la clase de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, se obtiene una sorpresa. En efecto, esta clase no puede pertenecer a sí misma, pues de lo contrario sería un conjunto que no pertenece a sí mismo. Entonces no pertenece a sí misma, y entonces o no es un conjunto o pertenece a sí misma; como se acaba de excluir la segunda opción, debe ser verdadera la primera. En otras palabras, esta vez no se encontró una paradoja sino una demostración de que la clase de los conjuntos que no pertenecen a sí mismos es propia.

[46] Se enuncia así el 'principio de comprensión': "toda propiedad determina un conjunto, constituido por los objetos que satisfacen esa propiedad; y todo conjunto está determinado por una propiedad, que es precisamente la de ser un objeto que pertenece al conjunto." (Odifreddi, 2006, pág. 30)

> Naturalmente, la clase de las *clases* que no pertenecen a sí mismos es contradictoria, exactamente como antes. Entonces el principio de comprensión debe ser reformulado, diciendo que una propiedad de *conjuntos* siempre determina una clase. Pero así el principio pierde mucha fuerza, porque entonces sólo permite definir clases a partir de conjuntos, los que ya deben haber sido definidos de alguna manera (Odifreddi, 2006, pág. 32).

4.6. Consecuencias históricas de la paradoja de Russell

En el siglo XIX toma fuerza el programa logicista[47]. Por un lado, los trabajos de Weierstrass, Dedekind, Cantor, habían reformulado los fundamentos de las matemáticas, por otro lado, Frege había desarrollado la lógica de predicados; con estos antecedentes, este autor consagraba su obra al ideal de deducir la matemática de la lógica, "había reducido la aritmética al cálculo de oraciones, al cálculo de predicados y a la teoría de conjuntos" (Haack, 1982, pág. 160). Si los fundamentos de la matemática clásica se basaban en los objetos numéricos y geométricos, Frege proponía que aquellos tenían, más bien, una base lógica.

Bertrand Russell tenía los mismos intereses teóricos y trabajaba desde la obra de Peano, que le parecía una alternativa más adecuada para el desarrollo del logicismo.

En la teoría de conjuntos ya habían salido a la luz ciertas inconsistencias, como la paradoja de Cantor[48], y en 1901 se sumó a la lista la paradoja de Russell. Esto no preocupó a Cantor ni a los matemáticos en general, ellos no consideraron que fuera un aspecto significante, menos que pusiera en riesgo a esta teoría.

> (…) la teoría de Cantor resultaba demasiado fluida para servir de telón de fondo a las paradojas. Los teóricos afectos a Cantor interpretaban las deducciones sorprendentes a partir de su teoría como conjeturas enigmáticas. Los hostiles veían tales resultados como inverosimilitudes que desmentían sus propuestas. Solo después de que la obra de Cantor se abriera paso en la

[47] "El programa logicista se propone demostrar que la lógica y la matemática tienen el mismo estatuto epistemológico, y que la matemática puede reducirse a la lógica, puesto que sus conceptos pueden ser obtenidos por definición a partir de conceptos lógicos y sus principios y teoremas pueden ser obtenidos por deducción a partir de principios y teoremas lógicos." (Garrido, 2005, pág. 516)

[48] Cantor demuestra que la cardinalidad de un conjunto es menor a la cardinalidad de sus subconjuntos. Por ejemplo, para un conjunto de tres elementos {a, b, c}, la cardinalidad del conjunto de sus subconjuntos será mayor que tres, {{a, b, c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a}, {b}, {c}, {∅}}
El conjunto de todos los conjuntos, debe por definición ser el conjunto mayor de todos los conjuntos, o lo que es lo mismo, debe tener una cardinalidad mayor a todos los conjuntos, pero el conjunto de todos sus subconjuntos tiene una cardinalidad mayor a aquel. (Paradoja de Cantor).

matemática dominante se empezaron a describir las sorpresas como paradojas (Sorensen, 2007, pág. 259).

Cuenta Sorensen que Russell se rehusó a dejar de lado las anomalías de la teoría de conjuntos, y se propuso resolverlas, inconforme ante la indiferencia de los otros teóricos, pero pensando que se trataba de falacias sin importancia (Sorensen, 2007, pág. 259). A diferencia de los matemáticos, para quienes las paradojas no era un asunto de gravedad, para Russell la paradoja significaba un obstáculo en el programa logicista.

Los esfuerzos por resolver la paradoja eran infructuosos y frustrantes, pues al encontrar una solución, la paradoja se restablecía. En esta búsqueda Russell anoticia de la paradoja a Frege, de quien sabía trabajaba el programa logicista y podría tener una respuesta al problema. Frege, a punto de publicar el segundo tomo de *Las leyes básicas de la aritmética*, ve sustentada esta contradicción en uno de sus axiomas. Así le responde a Russell:

> Su descubrimiento de la contradicción me ha sorprendido más de lo que se puede expresar con palabras y, debo añadir, me ha dejado perplejo, pues ha sacudido las bases sobre las que pretendía edificar la aritmética. […] Debo reflexionar con más detenimiento sobre esta cuestión. Es un asunto tanto más importante cuanto que el derrumbe de mi ley V parece minar no sólo los fundamentos de mi aritmética sino los fundamentos posibles de la aritmética como tal. […] En cualquier caso su descubrimiento es muy notable y acaso conduzca a grandes avances en lógica, pese a lo indeseable que pudiera parecer a primera vista (Sorensen, 2007, pág. 260).

Frege alcanza a escribir un Post scríptum para su libro, ahí contaba acerca de la paradoja que implicaba el axioma V de su teoría:

> Nada más descorazonador podría acontecerle a un autor científico que ver resquebrajarse uno de los pilares de su edificio tras haber dado la tarea por concluida.
>
> Esta es la situación en que me ha colocado una carta del Sr. Bertrand Russell, recibida cuando la impresión de este volumen tocaba ya su fin. Se trata de una cuestión relativa a mi Axioma (V). (…)
>
> *Solatium miseris, socios habuisse solorum*. También a mí me queda ese consuelo, si así puede llamársele; pues quienquiera que haya hecho uso en sus demostraciones de extensiones de conceptos, clases o conjuntos se hallará en la misma situación que yo. Lo que aquí está en cuestión no es precisamente mi modo particular de fundamentar la aritmética, sino la misma posibilidad de que esta última tenga algún fundamento lógico (Kneale & Kneale, 1972, pág. 606).

Las paradojas de la teoría de conjuntos produjeron "la crisis de fundamento de la matemática". Frege hizo intentos para reestablecer su teoría y librarla de las inconsistencias; los estudios posteriores determinaron que las enmiendas no eran suficientes para ese propósito.

La paradoja no suscitó el interés de la comunidad matemática, pero no podía pasar totalmente desapercibida ante esta, pues implicaba a la teoría de conjuntos.

> (…) los matemáticos podían dar de lado tales viejos enigmas que nada tienen que ver con su tema, aunque no pueden ignorar honradamente la cuestión de si existe un número cardinal o un número ordinal mayor que todos, problemas ambos que los llevan a contradicción (Russell, 1976, pág. 79).

Russell, a diferencia de muchos matemáticos, enfocó el problema desde la lógica. "(…) me di cuenta de que la dificultad residía en la lógica más que en las matemáticas, y era la lógica lo que había de reformarse" (Russell, 1976, pág. 78).

En un primer momento, Russell cree que el problema no sería solucionado hasta eliminar definitivamente las clases de la lógica, pero no pasó mucho tiempo para eliminar esta idea, al ver que era posible formular la paradoja sin hacer referencia a las clases[49] (Kneale & Kneale, 1972, pág. 608). Toma de Poincaré la idea de que las paradojas se producen porque contienen círculos viciosos, pero a diferencia de él, cree que las contradicciones no están especialmente relacionadas a la teoría de conjuntos, sino a un ámbito más amplio, la lógica; y sustenta esta idea mostrando las similitudes que tiene la paradoja de clases con la paradoja del mentiroso.

Entonces, y como ya se ha mencionado, con el fin de evitar los círculos viciosos, Russell elabora la teoría de tipos lógicos, que se expone principalmente en *Principia mathematica*, libro del cual es coautor Whitehead, y en *La teoría de los tipos como base de la lógica matemática*. Esta teoría buscó una salida a las contradicciones sin afectar a la lógica y sin reducir las matemáticas. Sin embargo, los esfuerzos del autor no convencieron del todo a la comunidad científica. Sobre esto, Garrido dice: "Pese a los

[49] Se da la paradoja bajo el supuesto de que "la propiedad de ser una propiedad que no se ejemplifica a sí misma" (Kneale & Kneale, 1972, pág. 608).

denodados esfuerzos de Russell, que ideó la *teoría de tipos* para contrarrestarlo, este descubrimiento contribuyó a la ruina del ideal logicista" (Garrido, 2005, pág. 520).

Actualmente, se distingue entre la teoría simple de tipos y la teoría ramificada de tipos. Ramsey propuso eliminar la teoría ramificada, criticable en varios puntos; sostenía que la teoría simple de tipos era suficiente para tratar las paradojas de la teoría de conjuntos, y que las paradojas semánticas, que sí requerían de la teoría ramificada, no afectaban al sistema de los *Principia mathematica* (Garrido, 2005, pág. 524). Con ello, el criterio de que una solución para cada grupo de paradojas afines es preferible a una solución para todas las paradojas sin distinción, iría tomando aceptación.

También se va dejando de lado el programa logicista. Por ejemplo, la teoría de Zermelo, se desvía de este y propone, más bien, que la lógica junto con la teoría de conjuntos puede servir de fundamento a la matemática (Garrido, 2005, pág. 524). Le seguirían otras teorías axiomáticas con diferentes propuestas, pero también con el objetivo de salvar a la teoría de conjuntos de contradicciones. Desde entonces, las teorías axiomáticas de conjuntos bloquean las paradojas de la teoría "ingenua" de conjuntos, y parecen estar libres de otras posibles contradicciones, y podría concluirse que se ha reestablecido la consistencia de la teoría matemática.

Sin embargo, la calma sería aparente; en 1931 aparecen nuevos cuestionamientos a la consistencia de las matemáticas en un artículo de Kurt Gödel. En ese artículo, que tiene por título *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sus sistemas afines*, se demuestra que la aritmética y los sistemas formales deductivos que consten de los principios y reglas de esta son sistemas incompletos, porque, a pesar de tener axiomas que no se contradigan, generan teoremas "indecidibles", que no se pueden demostrar, ni refutar; así, el sistema se "desacredita" a sí mismo para poder abarcar todas las verdades de la aritmética elemental. Como consecuencia de esto, se demuestra también la incapacidad de la aritmética de probar por sí misma que es consistente.

Y todo esto apunta a que la teoría de conjuntos, o más generalmente, la aritmética elemental, podrían generar contradicciones más sutiles en un futuro.

“Esto no quiere decir, como GÖDEL comentó posteriormente, que su tesis sea irracionalista ni escéptica, sino sencillamente crítica: pues <<no establece límites de la capacidad de la razón humana, sino más bien de las posibilidades del puro formalismo en matemáticas>>.” (Garrido, 2005, pág. 533). Lo que, si bien descarta la posibilidad de teorías como el logicismo, por otro lado, establece una restricción necesaria para las nuevas teorías matemáticas.

CONCLUSIONES

Antes de decir si la hipótesis planteada al principio de este trabajo puede afirmarse, se requiere analizar varios puntos.

Un primer objetivo de este trabajo fue definir 'paradoja'. El concepto supuesto en la hipótesis se tomó como directriz en esta investigación y se ha sostenido como tal.

Aunque el concepto va más allá del ámbito formal, se corresponde con los axiomas de la lógica. Es suficiente para tratar las paradojas propuestas, no demasiado restrictivo que no abarque otros casos similares de paradojas, pero tampoco demasiado amplio que no se distinga de otras estructuras lógicas.

Es importante decir que se ha acogido en gran parte los criterios expuestos por Quine en su artículo *The ways of paradox*; este ha sido esclarecedor en cuanto a la definición de paradoja y a la delimitación de otros términos.

En relación a la delimitación de términos, se pudo diferenciar 'paradoja' de 'falacia' y de 'dilema'; la 'antinomia' fue tomada como un tipo de paradoja, ella corresponde a los argumentos que llevan a una contradicción aún no resuelta; y 'aporía' como un sinónimo de 'paradoja'. Se concluye que los términos lógicos no son abundantes, sino necesarios, a excepción del último término, los otros presentaron características específicas. Quizás haya alguna particularidad filológica, semántica o de contexto que permita delimitar 'aporía' de 'paradoja', en este trabajo solo se ha hecho referencia a su significado etimológico.

La clasificación de paradojas propuesta por Quine es un modelo flexible que describe a las paradojas como verídicas, falsídicas o como antinomias, según las características que presenten (si el argumento es verdadero, falso o contradictorio), según la dificultad de su resolución, y según cómo los paradigmas del pensamiento en uso puedan enfrentarlas. Así, en un momento histórico puede calificarse a una paradoja como una antinomia, pero en otro momento la misma podría juzgarse de acuerdo a otros paradigmas como una paradoja verídica o como una falsídica, según sus características peculiares.

Esta clasificación no es la única y responde a ciertas necesidades planteadas por el autor. De acuerdo a esta y a su concepción de paradoja, se puede concluir que la paradoja no supone en todos los casos una contradicción formal.

Sobre las tres paradojas expuestas, se han obtenido los resultados que se exponen a continuación.

Sobre las paradojas de Aquiles y de la dicotomía hay que decir que, generalmente, se da por hecho que las soluciones han sido consumadas. Quine cree que eran auténticas antinomias, pero que actualmente son paradojas falsídicas, la matemática de las series convergentes ataca sus falacias. Sin embargo, se ha visto que se puede seguir problematizando al respecto. Y según algún criterio, la solución que se propone desde la teoría de los números transfinitos aún puede ser cuestionada.

Ambas soluciones matemáticas son suficientes y útiles en ese campo. En cuanto a la paradoja en sí, es necesario además de considerar la aplicación del problema, volver sobre las cuestiones filosóficas, por ejemplo la observación de que este argumento equipara un problema empírico con un problema de la razón.

Muchos autores dicen que las paradojas de Zenón llevan a una contradicción entre razonamiento y realidad. Sin embargo, aquí se ha preferido restringir la contradicción al ámbito formal; desde este punto de vista, las aporías de Zenón son paradojas falsídicas porque expresan una falsedad, antes que antinomias que denotan una contradicción.

Pero si se diverge de Quine y se toman en cuenta las afirmaciones que dicen que las paradojas de Zenón no son problemas totalmente resueltos, puesto que quizás todavía algunos puedan suponer que estas paradojas son aún antinomias. Seguramente esta paradoja puede seguir siendo estudiada, a pesar de todo el tiempo que ha pasado desde que apareció. Otros análisis interesantes pueden venir de campos como la física de la relatividad y la cuántica, lo que enriquece también a la filosofía. Todavía esta paradoja suscita el interés filosófico y científico.

Al hablar de la paradoja del mentiroso y de la paradoja de Russell, predomina el criterio de referirlas a diferentes grupos, a las paradojas semánticas y a las de teoría de conjuntos. Las soluciones que se han propuesto para cada grupo han sido más efectivas, pues se ha corregido la teoría semántica y la teoría de conjuntos de acuerdo a sus conceptos particulares.

Aunque la solución de Russell que prohibía la autorreferencia resultaba excesiva, no son pocos los autores que creen que una solución para los dos grupos de paradojas sería más satisfactoria que una para cada uno, sin embargo, no parece un objetivo fácil. A este respecto, Sainsbury dice que antes que encontrar una solución uniforme para ambas paradojas, debe verse las similitudes entre ellas, lo que le llevaría a considerar que pertenecen a un mismo tipo.

Los tres casos de paradojas presentados han exigido rever las teorías y ampliar las concepciones sobre las que estos se formulan. Las soluciones que se plantean a las paradojas resultan satisfactorias para algunos autores y otros las critican, quizás a esto se refiere Sorensen cuando explica que las paradojas son excepcionalmente persistentes y que siempre que un lado parece prevalecer, se restaura el equilibrio mediante un contradesarrollo. Sin embargo, se ha podido constatar en este análisis que el intento por superar las paradojas ha llevado a proponer teorías, a rectificarlas o a completarlas. Así: el cálculo infinitesimal y la matemática de los números transfinitos son teorías más idóneas para tratar las paradojas de Zenón; la concepción semántica de la verdad y los lenguajes formalizados, junto con la teoría de tipos, han dado una respuesta al problema lingüístico que plantea la paradoja del mentiroso; y las reformulaciones y restricciones de las teorías axiomáticas de conjuntos impiden que ocurra la paradoja de Russell. Todo esto confirma la hipótesis de este trabajo; las paradojas han sido un estímulo para el progreso de las teorías y de los fundamentos del pensamiento.

BIBLIOGRAFÍA

Aristóteles. (1970). *Metafísica.* Madrid: Gredos.

Aristóteles. (1972). *Metafísica* (Séptima edición ed.). Madrid: Espasa-Calpe.

Barnes, J. (1992). *Los Presocráticos.* Madrid: Cátedra.

Bunge, M. (2005). *Diccionario de filosofía.* México, D.F.: Siglo XXI. Obtenido de https://books.google.com.ec/books?id=JJRzEm5a8PgC&pg=PA15&lpg=PA15&dq#v

Clark, M. (2009). *El gran libro de las paradojas.* Madrid: Gredos.

Colli, G. (2006). *Zenón de Elea.* Madrid: Sexto Piso.

Copi, I. M. (1995). *Introducción a la lógica.* Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires (Eudeba).

Davies, P. (1985). *La frontera del infinito.* Barcelona: Salvat.

Ferrater Mora, J. (1980). *Diccionario de filosofía* (Segunda ed.). Madrid: Alianza.

Gamut, L. (2010). *Lógica, lenguaje y significado. Lógica intensional y gramática lógica.* Bogotá: Universidad del Rosario.

García Pascua, J. E. (2003). Aquiles, la Tortuga y el infinito. *Revista de Filosofía, 28*(2), 215-236. Obtenido de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=859532

Garrido, M. (2005). *Lógica simbólica.* Madrid: Tecnos.

Haack, S. (1982). *Filosofía de las lógicas.* Madrid: Cátedra.

Hahn, H. (1983). El infinito. En J. R. Newman, *Sigma El mundo de las matemáticas* (Novena ed., Vol. Cuatro, pág. 385). Barcelona: Grijalbo.

Henle, J., & Tymoczko, T. (2002). *Razón, dulce razón.* Barcelona: Ariel.

Hodges, W. (2014 Fall edition). *"Tarski's Truth Definitions".* (E. N. Zalta, Ed.) Obtenido de The Stanford Enciclopedia of Philosophy: <http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/tarski-truth/>

Hofstadter, D. R. (2007). *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle.* Barcelona: Tusquets.

Kirk, G., Raven, J., & Schofield, M. (2011). *Los filósofos presocráticos.* Madrid: Gredos.

Kneale, W., & Kneale, M. (1972). *El desarrollo de la lógica.* Madrid: Tecnos.

Northrop, E. P. (1962). *Paradojas matemáticas.* México D. F.: Unión tipográfica editorial hispano americana (UTEHA).

Odifreddi, P. (2006). *La matemática del siglo XX.* Buenos Aires: Katz.

Pabón S. de Urbina, J. M. (2005). *Diccionario manual griego: griego clásico-español* (Decimoctava ed.). Barcelona: Vox.

Priest, G., & Berto, F. (Summer de 2013). *"Dialetheism".* (E. N. (ed.), Ed.) Obtenido de The Stanford Encyclopedia of Philosophy: <http://plato.stanford.edu/archives/sum2013/entries/dialetheism/>

Priest, G., Tanaka, K., & Weber, Z. (Spring de 2015). *"Paraconsistent Logic".* (E. N. Zalta, Ed.) Obtenido de The Stanford Encyclopedia of Philosophy: http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/logic-paraconsistent/

Quine, W. V. (1973). *Filosofía de la lógica.* Madrid: Alianza.

Quine, W. V. (1976). *The ways of paradox and other essays*. Obtenido de Dartmouth College: https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/Paradox.html

Russell, B. (1976). *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Madrid: Alianza.

Russell, B. (1983). Los metafísicos y las matemáticas. En J. Newman R., *Sigma. El mundo de las matemáticas* (Vol. Cuatro, págs. 368-381). Barcelona: Grijalbo.

Russell, B. (1983). *Significado y verdad.* Barcelona: Ariel.

Sainsbury, M. (2009). *Paradoxes* (Third edition ed.). New York: Cambridge University Press.

Segura Mungía, S. (2006). *Diccionario por raíces del latín y de las voces derivadas.* Bilbao: Universidad de Deusto.

Sorensen, R. (2007). *Breve historia de la paradoja. La filosofía y los laberintos de la mente.* Barcelona: Tusquets.

Strawson, P. F. (1969). *Introducción a una teoría de la lógica* . Buenos Aires: Nova.

Tarski, A. (1999). *La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica*. Obtenido de A parte rei. Revista de filosofía: http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/tarski.pdf

Tugendhat, E., & Wolf, U. (1997). *Propedéutica lógico-semántica.* Barcelona: Anthropos.